Integrace - Fubibi

```
>
```

Zadání

Jest nám spočísti integrál

```
> Int(ln(1-a^2*x^2)/(x^2*sqrt(1-x^2)),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Konvergence

Definujme

```
> f := (x,a) -> ln(1-a^2*x^2)/(x^2*sqrt(1-x^2));
```

$$f := (x, a) \to \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

Funkce f je definována jen pro a z intervalu (-1,1), neboť musí platit:

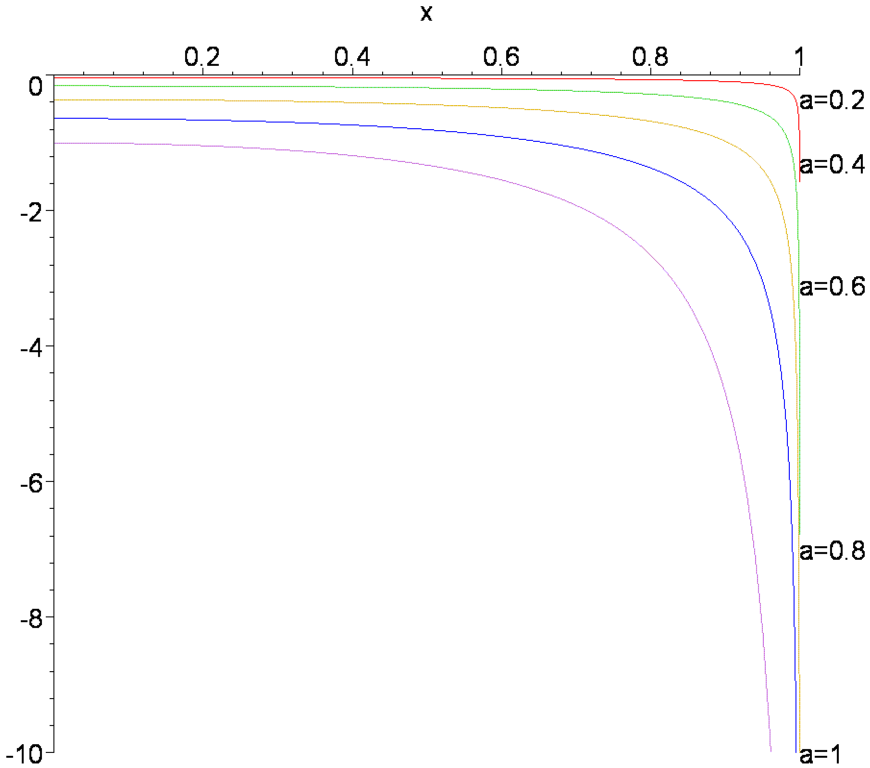
$$0 < 1 - a^2 x^2$$

a tedy

$$|a| < \frac{1}{x}, x \text{ z } (0,1]$$

Nyní si načrtněme, jak se chová fce f na intervalu v němž ji máme integrovati.
Nejdříve si však ještě povšiměme, že $f_a(x) = f_{-a}(x)$a že $f_0(x) = 0$ pro vš. x z (0,1), takže nám tedy stačí zajímat se o $0 < a$

```
> with(plots):
> p1:=plot([f(x,0.2),f(x,0.4),f(x,0.6),f(x,0.8),f(x,1)],x=0..1,
  -10..0,numpoints=100):
> p2:=textplot({[1,-0.35,`a=0.2`],[1,-1.3,`a=0.4`],[1,-3.1,`a=0
  .6`],[1,-7,`a=0.8`],[1,-10,`a=1`]},align=RIGHT):
> plots[display]({p1,p2});
```



Vyšetřeme konvergenci integrálu funkce f na intervalu [0,1]. Nejprve v okolí bodu 0

```
> Limit(f(x,a),x = 0,right)=limit(f(x,a),x = 0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} = -a^2$$

Konvergence integrálu v okolí bodu 1 je poněkud složitější.

Užitím substituce $y = 1 - x$, se přeneseme na pravém okolí bodu 0 a zkoumáme fci

```
> subs(x=1-y,f(x,a));
```

$$\frac{\ln(1 - a^2 (1 - y)^2)}{(1 - y)^2 \sqrt{1 - (1 - y)^2}}$$

což jest asymptoticky rovno $\frac{1}{\sqrt{y}}$, kterýžto integrál konverguje.

Výpočet

Užijeme Fubiniho větu. Nejprve rozepíšeme integrand do tvaru

$$\frac{\ln(1 - a^2 x^2) - \ln(1 - 0\, x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} = \mathrm{G}(a) - \mathrm{G}(0)$$

kde $\mathrm{G}(a)$ je primitivní funkce k k fci

```
> Diff(f(a,x),a)=diff(f(x,t),t);
```

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{a^2 \sqrt{1 - a^2}}\right) = -\frac{2\, t}{(1 - t^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}}$$

Integrál pak můžeme vyjádřit jako

```
> Int(Int(diff(f(x,t),t),t=0..a),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^a -\frac{2\,t}{(1-t^2\,x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dt\,dx$$

Nyní musíme ověřit předpoklady Fubiniho věty, abychom mohli zaměnit pořadí integrace. Předpokládejme na chvíli,
že je již máme ověřeny, a zkusme spočíst integrál

```
> Int(Int(diff(f(x,t),t),x=0..1),t=0..a);
```

$$\int_0^a \int_0^1 -\frac{2\,t}{(1-t^2\,x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dt$$

Použijme nejprve substituci $x=\sin(y)$, $(dx=\cos(y)\,dy)$

```
> Int(Int(diff(f(sin(x),t)*diff(sin(x),x),t),x=0..1),t=0..a);
```

$$\int_0^a \int_0^1 -\frac{2\,t\cos(x)}{(1-t^2\sin(x)^2)\sqrt{1-\sin(x)^2}}\,dx\,dt$$

Protože na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$ je $0 \le \cos(y)$, můžeme integrál přepsat do následujícího tvaru

```
> Int(-2*t*Int(1/(1-t^2*sin(y)^2),y = 0 .. Pi/2),t = 0 .. a);
```

$$\int_0^a -2\,t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-t^2\sin(y)^2}\,dy\,dt$$

Po další substituci, $\tan\left(\frac{y}{2}\right)=z$, $(\sin(y)=\frac{2\,z}{1+z^2}$, $dy=\frac{2\,dz}{1+z^2})$, a zkrácení dostáváme integrál

```
> Int(-2*t*Int(1/(1+z^2*(1-t^2)),z = 0 .. infinity),t = 0 ..
  a);
```

$$\int_0^a -2\,t \int_0^{\infty} \frac{1}{1+z^2\,(1-t^2)}\,dz\,dt$$

Což již, jak snadno spočteme, dává integrál

```
> Int(-2*t*Int(Diff(arctan(z*sqrt(1-t^2))/sqrt(1-t^2),z),z = 0
  .. infinity),t = 0 ..
  a)=Int(-2*t*int(Diff(arctan(z*sqrt(1-t^2))/sqrt(1-t^2),z),z =
  0 .. infinity),t = 0 ..a);
```

$$\int_0^a -2\,t \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\arctan(z\sqrt{1-t^2}\,)}{\sqrt{1-t^2}}\right) dz\, dt = \int_0^a -\frac{t\,\pi}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

neboli

```
> int(-t*Pi/(1-t^2)^(1/2),t = 0 .. a);
```

$$-\frac{\pi\,(\sqrt{1-a^2}-1+a^2)}{\sqrt{1-a^2}}$$

Ověření předpokladů Fubiniho věty

Vráťme se nyní k doposud neověřeným předpokladům Fubiniho věty.
Protože

```
> abs(2*t/(1-t^2*x^2)/sqrt(1-x^2)) <= 2*t/(1-t^2*x^2)/sqrt(1-x^2);
```

$$2\left|\frac{t}{(1-t^2\,x^2)\sqrt{1-x^2}}\right| \le \frac{2\,t}{(1-t^2\,x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

a protože na pravé straně stojí nezáporná, měřitelná (spojitá s. v.) fce a jelikož tedy existuje

```
> Int(Int(2*t/(1-t^2*x^2)/sqrt(1-x^2),t=0..a),x=0..1);
```

$$\int_0^1\int_0^a \frac{2\,t}{(1-t^2\,x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dt\, dx$$

je fce na straně pravé integrovatelnou majorantou k fci na straně levé. Tím jsou předpoklady Fubiniho věty ověřeny.
Závěrem tedy můžeme zvolat "hurá" a konstatovat

```
> int(f(x,a),x = 0 .. 1) = Pi(sqrt(1-a^2)-1);
```

$$\frac{\sqrt{\pi}\left(-2\sqrt{\pi}\,a^2\sqrt{-\frac{1}{a^2}+1}-2\sqrt{\pi}\sqrt{-a^2}\right)}{2\sqrt{-a^2}} = \pi(\sqrt{1-a^2}-1)$$

\>

\>

\>

\>