Integrace - Fubini

```
>
```

Zadání

Jest nám spočísti integrál z funkce

```
> f:=x->sin(x^2)*(exp(-x^2)-exp(-2*x^2))/x;
```

$$f := x \to \frac{\sin(x^2)\,(\mathbf{e}^{(-x^2)} - \mathbf{e}^{(-2\,x^2)})}{x}$$

na intervalu $(0,\infty)$

Konvergence

Viz. ověření předpokladů Fubiniho věty

Výpočet

Použijeme opět Fubiniho větu. Nejdříve zapíšeme integrál jako

```
> Int(Int(Diff(sin(x^2)*(exp(t*x^2)/x),t),t=-1..-2),x=0..infinity)=Int(Int(diff(sin(x^2)*(exp(t*x^2)/x),t),t=-1..-2),x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty \int_{-1}^{-2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(x^2)\,\mathbf{e}^{(t\,x^2)}}{x}\right) dt\, dx = \int_0^\infty \int_{-1}^{-2} \sin(x^2)\, x\, \mathbf{e}^{(t\,x^2)}\, dt\, dx$$

Opět předpokládejme, že máme ověřeny předpoklady Fubiniho věty, ke kterým se ještě vrátíme, a pokusme se spočíst

```
> Int(Int(sin(x^2)*x*exp(t*x^2),x = 0 .. infinity),t = -1 .. -2);
>
```

$$\int_{-1}^{-2} \int_0^\infty \sin(x^2)\, x\, \mathbf{e}^{(t\,x^2)}\, dx\, dt$$

Provedeme nejprve výpočet vnitřního integrálu metodou per partes

```
> Int(sin(x^2)*x*exp(t*x^2),x = 0 .. infinity)=Int(Diff(int(x*exp(t*x^2),x)*sin(x^2),x),x=0..infinity)-Int(int(x*exp(t*x^2),x)*diff(sin(x^2),x),x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, x\, \mathbf{e}^{(t\,x^2)}\, dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^{(t\,x^2)}\sin(x^2)}{t}\right) dx - \int_0^\infty \frac{\mathbf{e}^{(t\,x^2)}\cos(x^2)\, x}{t}\, dx$$

První člen na pravé straně rovnosti je ovšem roven nule. Opakujeme metodu per partes a dostáváme

```
> -Int(1/t*exp(t*x^2)*cos(x^2)*x,x = 0 .. infinity)=-(Int(Diff(int(exp(t*x^2)*x,x)*cos(x^2)/t,x),x = 0 .. infinity)-Int(int(exp(t*x^2)*x,x)*diff(cos(x^2)/t,x),x = 0 .. infinity));
```

$$-\int_0^{\infty} \frac{e^{(t x^2)}\cos(x^2)\,x}{t}\,dx = -\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\,\frac{e^{(t x^2)}\cos(x^2)}{t^2}\right) dx + \int_0^{\infty} -\frac{e^{(t x^2)}\sin(x^2)\,x}{t^2}\,dx$$

tedy

```
> Int(sin(x^2)*x*exp(t*x^2),x = 0 ..
  infinity)(1+(1/t^2))=1/2*1/t^2;
```

$$\left(\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,x\,e^{(t x^2)}\,dx\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{2\,t^2}$$

Což není nic jiného než

```
> Int(sin(x^2)*x*exp(t*x^2),x = 0 ..
  infinity)=simplify((1/(2*t^2))/(1+1/t^2));
```

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,x\,e^{(t x^2)}\,dx = \frac{1}{2\,(t^2+1)}$$

A ověříme integrační schopnosti Maplu :-)

```
> assume(t,negative);
> simplify(int(sin(x^2)*x*exp(t*x^2),x = 0 .. infinity));
```

$$\frac{1}{2\,(t\sim^2+1)}$$

Nyní snadno dopočítáme

```
> (1/2)*Int(1/(t^2+1),t=-2..-1)=int((1/2)*(1/(t^2+1)),t=-2..-1)
  ;
```

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t\sim^2+1}\,dt\sim = \frac{1}{2}\arctan(2) - \frac{\pi}{8}$$

Ověření přepokladů Fubiniho věty

Ověření předpokladů je v tomto případě snadné neboť

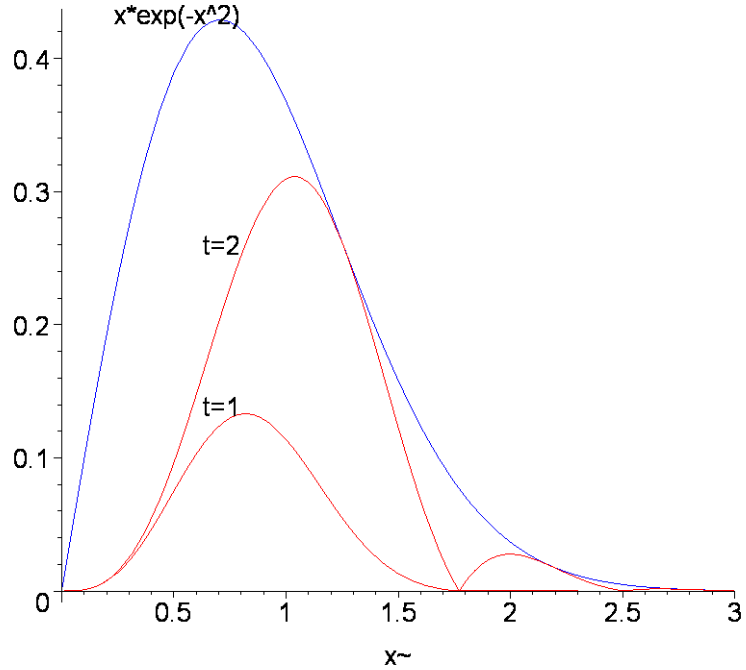
```
> assume(x,positive);
> abs(sin(x^2)*x*exp(-t*x^2))<=x*exp(-x^2);
```

$$x\sim\, e^{(-t\sim\, x\sim^2)}\,\left|\sin(x\sim^2)\right| \le x\sim\, e^{(-x\sim^2)}$$

A fce na pravé staně nerovnosti jest konvergentní majorantou.

Pro názornost se můžeme podívat na obrázek.

```
> with(plots):
> p1:=plot([abs(sin(x^2)*x*exp(-x^2)),abs(sin(x^2)*x*exp(-2*x^2)),
  x*exp(-x^2)],x=0..3,color=[red,red,blue]):
> p2:=textplot({[0.8,0.132,`t=1`],[0.8,0.253,`t=2`],[0.8,0.426,`x*
  exp(-x^2)`]},align={ABOVE,LEFT}):
> plots[display]({p1,p2});
```



Nakonec tedy dostáváme

```
> int(f(x,a),x=0..infinity)=-1/8*Pi+1/2*arctan(2);
```

$$\frac{1}{4} I \ln(1 - I) - \frac{1}{4} I \ln(2 - I) - \frac{1}{4} I \ln(1 + I) + \frac{1}{4} I \ln(2 + I) = \frac{1}{2} \arctan(2) - \frac{\pi}{8}$$

```
>
>
```