Teorie míry a integrálu

Příklady z teorie míry a integrálu versus Maple

Maple je poměrně nadán na příklady k jejichž výpočtům používáme teorie míry a integrálu. Jsou to především různé druhy určitých integrálů s nimiž si Maple poradí poměrně dobře:

```
> Int(log(1+a*sin(x)^2)/sin(x)^2,
  x=0..Pi/2)=int(log(1+a*sin(x)^2)/sin(x)^2, x=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a\sin(x)^2)}{\sin(x)^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\left(2\sqrt{\pi}\,a\sqrt{\frac{1}{a}+1}-2\sqrt{\pi}\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{a}}$$

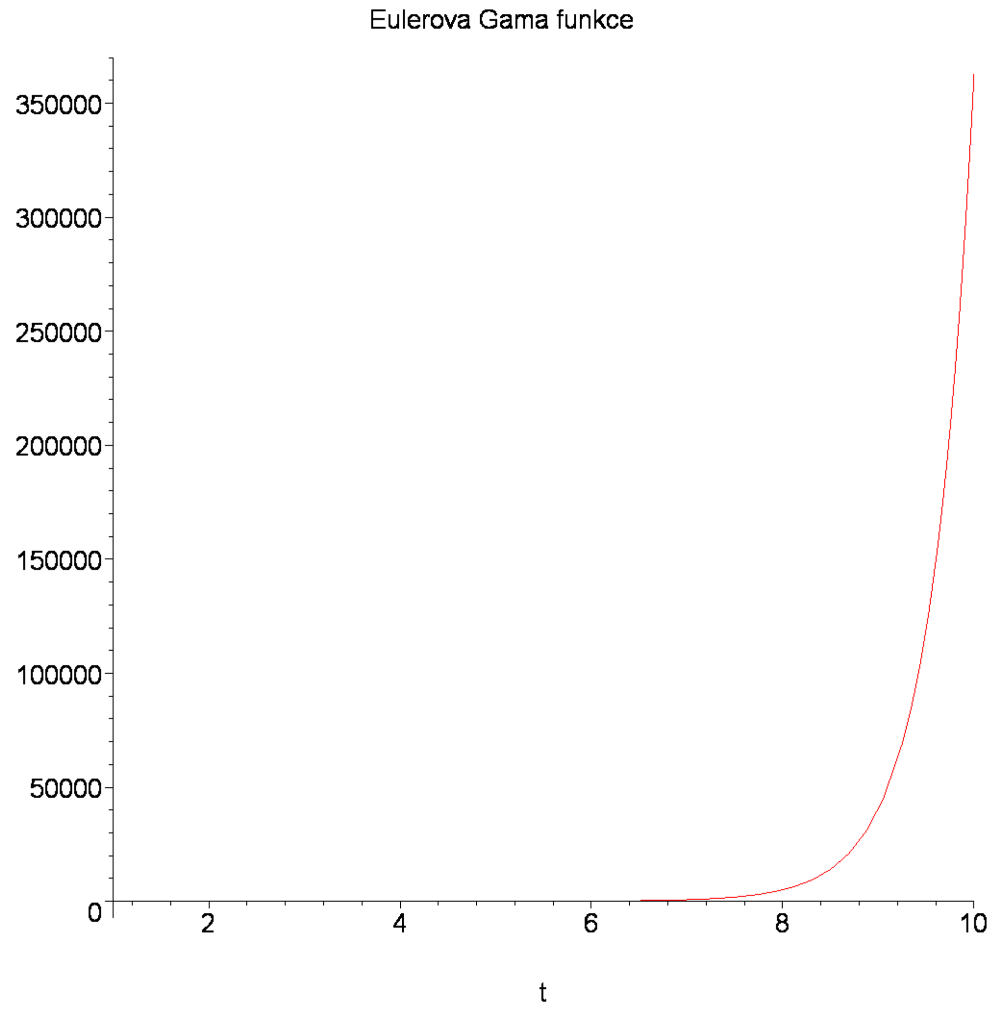
Gama funkce a její příbuzní

S gama funkcí je to v Maple prosté, používá se pod hlavičkou GAMMA(x).

```
> GAMMA(x);
> k! = GAMMA(k+1);
> plot({GAMMA(t)},t=1..10,title=`Eulerova Gama funkce`);
```

$$\Gamma(x)$$

$$k! = \Gamma(k+1)$$



Maple dobře ovládá i funkci dvou proměnncých $\mathrm{B}(x, y)$, která je definována:

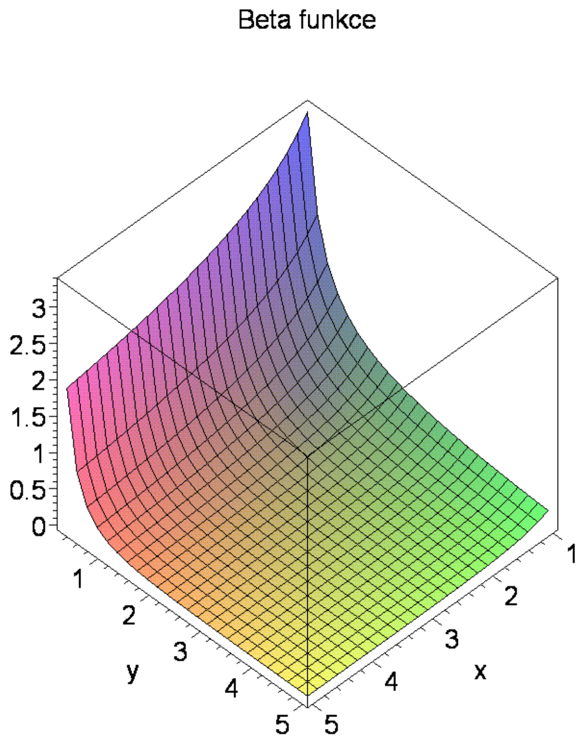
$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Nebo ekvivalentně:

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{(x-1)}\,(1-t)^{(y-1)}\,dt$$

```
> Beta(x,y);
> plot3d(Beta(x,y), x=1..5, y=0.3..5, style=patch, axes=boxed,
  title=`Beta funkce`);
```

$$\mathrm{B}(x, y)$$



Na GAMMA funkci je třeba si zvyknout. Už třeba proto, že Maple v jejím tvaru někdy vrací výsledek integrace:

```
> assign(signum(n+1)=1);
> Int(x^n*exp(-x), x=0..infinity)=int(exp(-x)*x^n,
  x=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} x^n \mathbf{e}^{(-x)}\, dx = \Gamma(n)\, n$$

Vícerozměrné integrály

Pokud nám jde čistě o funkci a ne o efekt můžeme dál vesele používat už naučený příkaz int, pouze ho provedeme několikrát za sebou. Takhle třeba vypadá objem jednotkového válce.

```
> int(int(int(1,y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)), x=-1..1),z=0..1);
```

$$\pi$$

Pokud chceme i efekt, musíme si načíst balíček Student.

```
> with(student);
```

$[D, \mathit{Diff}, \mathit{Doubleint}, \mathit{Int}, \mathit{Limit}, \mathit{Lineint}, \mathit{Product}, \mathit{Sum}, \mathit{Tripleint}, \mathit{changevar}, \mathit{completesquare}, \mathit{distance}, \mathit{equate}, \mathit{integrand}, \mathit{intercept}, \mathit{intparts}, \mathit{leftbox}, \mathit{leftsum}, \mathit{makeproc}, \mathit{middlebox}, \mathit{middlesum}, \mathit{midpoint}, \mathit{powsubs}, \mathit{rightbox}, \mathit{rightsum}, \mathit{showtangent}, \mathit{simpson}, \mathit{slope}, \mathit{summand}, \mathit{trapezoid}]$

V tomto balíčku se naléźá příkazy Tripleint a Doubleint, které podobné věci řeší. Bohužel tento příkaz je určen převážně na sázení, pro získání hodnoty integrálu bychom museli používat složitě funkci value:

```
> integral := Tripleint(1,
  y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2),x=-1..1,z=0..1);
> value(integral);
```

$$integral := \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx \, dz$$

$$\pi$$

Obdobná je situace s Doubleint. Takhle by vypadal obsah kruhu:

```
> integral2 := Doubleint(1,
  y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2),x=-1..1);
> value(integral2);
```

$$integral2 := \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx$$

$$\pi$$

Maple tak bohužel nemůže splnit náš sen tj. počítat integrály přes množiny, výpočet objemů různých těles apod. Slabou náplastí je, že umí integrály transformovat do nových souřadnic pomocí příkazu changevar. Převedeme integrál do kulových souřadnic:

```
> Tripleint(x,
  y,x,z)=changevar({x=r*cos(t)*cos(u),y=r*sin(t)*cos(u),z=r*sin
  (u)}, Tripleint(x, y,x,z),[r,t,u]);
```

$$\iiint x \, dy \, dx \, dz = \iiint r \cos(t) \cos(u) \left| \cos(u)\, r^2 \right| dr \, dt \, du$$

Kromě spočítání Jakobiánu si moc nepomůžeme, meze changevar nespočítá:

```
> changevar({x=r*cos(t),y=r*sin(t),z=h}, Tripleint(1,
  y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2),x=0..1,z=0..1),[r,t,h]);
Warning, Computation of new ranges not implemented
```

$$\iiint |r| \, dr \, dt \, dh$$

```
>
```

Použitá literatura :

Jan Malý : Teorie míry a integrálu
B.P. Dĕmidovič : Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu