Metody hledání primitivních funkcí

Def: Primitivní funkce

Nechť F a f jsou dvě funkce definované na otevřeném intervalu (a,b). Platí-li pro všechna x z intervalu (a,b) rovnost **F'(x)=f(x)**, řekneme, že funkce F je ***primitivní funkcí*** k funkci f na (a,b).

Hledání primitivní funkce je vlastně opačný postup k derivování. Je však mnohdy výrazně obtížnější. Pro existenci primitivní funkce k funkci f nám stačí, aby funkce f byla spojitá na daném intervalu. V některých případech však tuto funkci nejsme schopni vyjádřit jako elementární funkci. Příkladem takových funkcí jsou například funkce $f(x) = \mathbf{e}^{(x^2)}$, $g(x) = \mathbf{e}^{(-x^2)}$, $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $ch(x) = \sin(x^2)$, ...

Při hledání primitivních funkcí používáme tři základní metody. Přímou metodu u funkcí, kde lze primitivní funkci přímo, případně po úpravách, najít v tabulkách. Metoda per partes se používá hlavně v případech, kdy hledáme primitivní funkci k součinu dvou rozdílných typů funkcí. Třetí metodou, jak najít primitivní funkci jsou substituční pravidla.

Předpokládejme, že F je jedna zcela konkrétní pevně zvolená primitivní funkce k funkci f na intervalu *(a,b)*. Množina všech funkcí definovaných rovnicí $y = F(x) + c$, pro x z *(a,b)*, kde c je reálná konstanta, je množinou všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu *(a,b)*.

Def: Neurčitý integrál

Neurčitým integrálem funkce f na intervalu *(a,b)* se rozumí množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu *(a,b)*. Tato množina se označuje $\int \mathbf{f}(x)\, dx$.

Je tedy $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, kde c je libovolná reálná konstanta. Pro jednoduchost budeme vždy uvažovat $c = 0$.

1) Tabulkové integrály

Klíčem k úspěchu jsou právě tyto vzorce. Počítání integrálů jakýmkoliv způsobem vždy skončí právě u nich. Není tedy úplně na škodu si je alespoň připomenout.
Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou dané funkce definovány.

```
> Int(sin(x),x)=int(sin(x),x);
```

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$$

a) $\int k\, dx = k\, x$

b) $\int x^n\, dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$

c) $$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|)$$

d) $$\int \mathbf{e}^{x}\, dx = \mathbf{e}^{x}$$

e) $$\int a^{x}\, dx = \frac{a^{x}}{\ln(a)}$$

f) $$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$$

g) $$\int \cos(x)\, dx = \sin(x)$$

h) $$\int \frac{1}{\cos(x)^2}\, dx = \tan(x)$$

ch) $$\int \frac{1}{\sin(x)^2}\, dx = -\cot(x)$$

i) $$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x), \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

j) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x), \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

k) $$\int \sinh(x)\, dx = \cosh(x)$$

l) $$\int \cosh(x)\, dx = \sinh(x)$$

m) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\, dx = \ln(|x+\sqrt{x^2+k}|)$$

n) $$\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2\,a}\ln\left(\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right)$$

Převod na tabulkové integrály

Většina funkcí samozřejmě nevypadá tak, abychom mohli ihned použít některý z předcházejících vzorců. Přesto u mnoha funkcí, které vypadají na první pohled složitě, je cesta k jednoduššímu tvaru poměrně jednoduchá. Je k tomu ale nutné znát dvě základní pravidla:

1) integrace součtu:

$$\int \mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x)\, dx = \int \mathbf{f}(x)\, dx + \int \mathbf{g}(x)\, dx$$

2) integrace funkce násobené konstantou: $\int c\, \mathbf{f}(x)\, dx = c \int \mathbf{f}(x)\, dx$

V tuto chvíli by tedy neměl být problém spočítat ani tyto integrály:

a) $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\, dx$

Integrál ze součinu funkcí neumíme, ale ze součtu ano. Není nic jednoduššího než závorky roznásobit.

```
> expand((1-x)*(1-2*x)*(1-3*x));
```

$$1 - 6x + 11x^2 - 6x^3$$

Využijeme obě pravidla - jak pro integrování součtu, tak pro integrování funkce násobené konstantou. Zadaný integrál můžeme tedy přepsat do tvaru:

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\, dx = \int 1\, dx - 6\int x\, dx + 11\int x^2\, dx - 6\int x^3\, dx$$

A nyní už můžeme každý integrál počítat podle vzorce a) respektive b).

$$\int 1\, dx - 6\int x\, dx + 11\int x^2\, dx - 6\int x^3\, dx = x - 3x^2 + \frac{11x^3}{3} - \frac{3x^4}{2}$$

b) $\int \frac{1}{2+3x^2}\, dx$

Tato funkce je nápadně podobná funkci $\frac{1}{a^2+x^2}$, ke které primitivní funkci známe. Převést původní funkci do tohoto tvaru nebude takový problém. Nejdříve se "zbavíme trojky":

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{2}{3}+x^2}\, dx$$

A odtud podle vzorce i) dostaneme:

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\, dx = \frac{1\sqrt{6}\arctan\left(\frac{1x\sqrt{6}}{2}\right)}{6}$$

c) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx$

Vydělíme-li čitatele jmenovatelem

```
> cela_cast:=quo(x^4,x^2+1,x);   zbytek:=rem(x^4,x^2+1,x);
```

$$cela\_cast := x^2 - 1$$

$$zbytek := 1$$

dostaneme postupně

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int x^2\,dx - \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan(x)$$

d) $\int \tan(x)^2\,dx$

Tento integrál na první pohled vypadá, že nemá nic společného s tabulkovými integrály uvedenými v první části. Ukážeme si však, že jednoduchými úpravami můžeme tento integrál spočítat.

$$\int \tan(x)^2\,dx = \int \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}\,dx = \int \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^2}\,dx = \int \frac{1}{\cos(x)^2} - 1\,dx = \tan(x) - x$$

e) Mnoho integrálů vypadá na první pohled nepříjemně. Stačí však malá úprava a úloha se zjednoduší. Triků je hodně a příkladů ještě víc. Následujících příklady se po větším či menším úsilí se dají převést na tabulkové integrály.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx\,,\quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx\,,\quad \int \frac{1-x^7}{x\,(x^7+1)}\,dx\,,\quad \int \frac{(1-x)^2}{x^2}\,dx\,,$$

$$\int \frac{x^2}{3-2x^2}\,dx,\ \int \cot(x)^2\,dx,\ \ldots$$

3) Per partes

Ne každou funkci lze však převést postupnými úpravami na součet funkcí, jejichž primitivní funkce jsou v tabulkách. Daná funkce ani nemusí na první pohled vypadat tak ošklivě, přesto ať se snažíme, jak se snažíme, rozložit se nám ji nepodaří. Potřebujeme tedy nějaké pravidlo pro integrování součinu funkcí. Takový součin budeme integrovat po částech - **per partes**.
Metody per partes se užívá hlavně v případech, kdy počítáme integrál ze součinu dvou funkcí různého typu (polynom*goniometrická funkce, polynom*exponenciela, exponenciela*goniometrická funkce, apod.).
Nechť F je primitivní funkce k funkci f a G je primitivní funkce k funkci g. Potom

$$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{G}(x)\,dx = \mathrm{F}(x)\,\mathrm{G}(x) - \int \mathrm{F}(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx$$

a) $\int x\,\mathrm{e}^x\,dx$

Při počítání tohoto integrálu se budeme snažit zbavit jednoho typu funkce. Zvolme proto

```
> G(x):=x; f(x):=exp(x);          g(x):=diff(G(x),x);
  F(x):=int(f(x),x);
```

$$G(x) := x$$
$$f(x) := e^x$$
$$g(x) := 1$$
$$F(x) := e^x$$

a potom dostaneme

```
> Int(f(x)*G(x),x)=F(x)*G(x)-Int(F(x)*g(x),x);
```

$$\int e^x\, x\, dx = e^x\, x - \int e^x\, dx$$

Pomohli jsme si docela dost. Teď už nebude žádný problém naše úsilí úspěšně zakončit.

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x$$

b) $\int \ln(x)\, dx$

V tomto případě zdánlivě nejde o součin dvou funkcí. Budeme-li však uvažovat součin $1.\ln(x)$, můžeme se vhodnou volbou za funkci f a G pohodlně zbavit funkce $\ln(x)$.

```
> G(x):=ln(x); f(x):=1;          g(x):=diff(G(x),x);
  F(x):=int(f(x),x);
```

$$G(x) := \ln(x)$$
$$f(x) := 1$$
$$g(x) := \frac{1}{x}$$
$$F(x) := x$$

```
> Int(f(x)*G(x),x)=F(x)*G(x)-Int(F(x)*g(x),x);
```

$$\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - \int 1\, dx$$

$$\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - \int 1\, dx = x \ln(x) - x$$

c) $\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx$

Tento příklad je sen zařazen schválně, aby bylo vidět, že nemá cenu ihned propadat panice, pokud to hned nevyjde. Při počítání tohoto integrálu se používá trik, který v mnoha případech pomůže.

```
> G(x):=ln(x); f(x):=1/x;          g(x):=diff(G(x),x);
  F(x):=int(f(x),x);
```

$$G(x) := \ln(x)$$
$$f(x) := \frac{1}{x}$$

$$g(x) := \frac{1}{x}$$

$$F(x) := \ln(x)$$

```
> Int(f(x)*G(x),x)=F(x)*G(x)-Int(F(x)*g(x),x);
```

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln(x)^2 - \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

Na první pohled to vypadá, že jsme si moc nepomohli. Teď ale použijeme slibovaný trik. Z předcházející rovnice můžeme hledaný integrál snadno vypočítat. To už je otázka pouze převádějí z jedné strany rovnice na druhou.

$$2\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln(x)^2 \qquad => \qquad \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2$$

V dalším oddíle o substituci bude vidět, že tento integrál dokážeme spočítat mnohem jednodušším způsobem.

d) $\int \mathbf{e}^x \sin(x)\, dx$

Tento příklad je hodně podobný předcházejícímu, proto rychleji.

```
> G(x):=exp(x); f(x):=sin(x);          g(x):=diff(G(x),x);
  F(x):=int(f(x),x);
```

$$G(x) := \mathbf{e}^x$$

$$f(x) := \sin(x)$$

$$g(x) := \mathbf{e}^x$$

$$F(x) := -\cos(x)$$

```
> Int(f(x)*G(x),x)=F(x)*G(x)-Int(F(x)*g(x),x);
```

$$\int \sin(x)\,\mathbf{e}^x\,dx = -\cos(x)\,\mathbf{e}^x - \int -\cos(x)\,\mathbf{e}^x\,dx$$

A ještě jednou ...

```
> G(x):=exp(x); f(x):=cos(x);          g(x):=diff(G(x),x);
  F(x):=int(f(x),x);
```

$$G(x) := \mathbf{e}^x$$

$$f(x) := \cos(x)$$

$$g(x) := \mathbf{e}^x$$

$$F(x) := \sin(x)$$

```
> Int(f(x)*G(x),x)=F(x)*G(x)-Int(F(x)*g(x),x);
```

$$\int \cos(x)\,\mathbf{e}^x\,dx = \sin(x)\,\mathbf{e}^x - \int \sin(x)\,\mathbf{e}^x\,dx$$

$$\int e^X \sin(x)\,dx = -\cos(x)\,\mathbf{e}^x - \int -\cos(x)\,\mathbf{e}^x\,dx = -\cos(x)\,\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^x\sin(x) - \int \mathbf{e}^x \sin(x)\,dx$$

A stejný trik jako v předchozím příkladě ...

$$2\int e^{x}\sin(x)\,dx = -\cos(x)\,e^{x} + e^{x}\sin(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int e^{x}\sin(x)\,dx = \frac{1\,e^{x}\,(\sin(x)-\cos(x))}{2}$$

e) rekurentní vzorce:

Mnoho integrálů můžeme počítat pomocí rekurentních vzorců. Časem zjistíme, že spočítat například integrál ze $\sin(x)^n$ je jednoduché pouze pro n liché. Pro n sudé je to téměř nadlidský úkol. Odvoďme si tedy metodou per partes rekurentní vzorec pro výpočet integrálu

$$\boldsymbol{R_n(x) = \int \sin(x)^n\,dx}$$

Jistě platí: $R_0(x) = \int 1\,dx = x$, $\quad R_1(x) = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$

Dále

$$R_n(x) = \int \sin(x)\sin(x)^{(n-1)}\,dx = \textbf{(\&)} =$$

$$-\cos(x)\sin(x)^{(n-1)} - \int -\cos(x)^2\,(n-1)\,\sin(x)^{(n-2)}\,dx =$$

$$=$$

$$-\cos(x)\sin(x)^{(n-1)} + (n-1)\int \sin(x)^{(n-2)}\cos(x)^2\,dx =$$

$$=$$

$$-\cos(x)\sin(x)^{(n-1)} + (n-1)\int \sin(x)^{(n-2)}\,(1-\sin(x)^2)\,dx =$$

$$=$$

$$-\cos(x)\sin(x)^{(n-1)} + (n-1)\left(\int \sin(x)^{(n-2)}\,dx - \int \sin(x)^n\,dx\right) =$$

$$= -\cos(x)\sin(x)^{(n-1)} + (n-1)\,(R_{n-2}(x) - R_n(x))$$

A odtud dostaneme

$$R_n(x) = \frac{\sin(x)^{(n-1)}\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\,R_{n-2}(x)$$

Tedy např.

$$\int \sin(x)^4\,dx = \frac{1\,\sin(x)^3\cos(x)}{4} + \frac{3}{4}\int \sin(x)^2\,dx = \frac{1\,\sin(x)^3\cos(x)}{4} - \frac{3\cos(x)\sin(x)}{8} + \frac{3x}{8}$$

(&):

```
> G(x):=sin(x)^(n-1); f(x):=sin(x);          g(x):=diff(G(x),x);
  F(x):=int(f(x),x);
```

$$G(x) := \sin(x)^{(n-1)}$$
$$f(x) := \sin(x)$$
$$g(x) := \frac{\sin(x)^{(n-1)} (n-1) \cos(x)}{\sin(x)}$$
$$F(x) := -\cos(x)$$

```
> Int(f(x)*G(x),x)=F(x)*G(x)-Int(F(x)*g(x),x);
```

$$\int \sin(x) \sin(x)^{(n-1)} \, dx = -\cos(x) \sin(x)^{(n-1)} - \int -\frac{\cos(x)^2 \sin(x)^{(n-1)} (n-1)}{\sin(x)} \, dx$$

e) Zde jsou další příklady na nichž si lze procvičit metodu per partes:

$$\int x^2 \sin(x)^2 \, dx, \ \int \arcsin(x) \, dx, \ \int x^2 \arcsin(x) \, dx, \ \int x^2 e^x \sin(x) \, dx, \ \int \cos(x)^n \, dx,$$
$$\int \cos(x)^4 \, dx, \ \int \sin(x)^6 \, dx$$

4) Substituce

Další metodou, jak řešit integrály, jsou metody substituční.

A) I. substituční pravidlo

Pomocí prvního substitučního pravidla budeme počítat integrály typu $\int f(G(x)) \, g(x) \, dx$.

Předpokládejme, že *F* daná rovnicí $y = F(t)$ je primitivní funkcí k funkci *f* na intervalu *(c,d)*. Funkce *g* daná rovnicí $t = G(x)$ je diferencovatelná na intervalu *(a,b)* a zobrazí tento interval na intelval *(c,d)* a je primitivní funkcí k funkci *g*. Potom platí:

$$\int f(G(x)) \, g(x) \, dx = \int f(t) \, dt = F(t) = F(G(x))$$

a) $\int \sin(x)^3 \cos(x) \, dx$

V tomto případě je $f(t) = t^3$, $G(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$. Prakticky postupujeme následujícím způsobem.

```
> t:=sin(x);   dt=diff(t,x)*dx;
```

$$t := \sin(x)$$
$$dt = \cos(x) \, dx$$

a dostaneme

$$\int \sin(x)^3 \cos(x) \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} = \textbf{(\&)} = \frac{\sin(x)^4}{4}$$

(&):

```
> t:=sin(x):  1/4*t^4;
```

$$\frac{1}{4} \sin(x)^4$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+3}\,dx$

Integrál nejdříve upravíme

$$\int \frac{x^3}{x^8+3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4\,x^3}{x^8+3}\,dx$$

Potom

```
> t:=x^4;   dt=diff(t,x)*dx;
```

$$t := x^4$$

$$dt = 4\,x^3\,dx$$

$$\int \frac{x^3}{x^8+3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+3}\,dt = \frac{1\sqrt{3}\,\arctan\left(\frac{1\,t\sqrt{3}}{3}\right)}{12} = \frac{1\sqrt{3}\,\arctan\left(\frac{1\,x^4\sqrt{3}}{3}\right)}{12}$$

```
> t:=x^4: 1/12*sqrt(3)*arctan(1/3*t*sqrt(3));
```

$$\frac{1}{12}\sqrt{3}\,\arctan\left(\frac{x^4\sqrt{3}}{3}\right)$$

c) Substitucí je mnoho. Většina z nich není na první pohled vidět a k jejich vhodnému používání pomůže pouze praxe. Pro některé typy funkcí existují doporučené substituce, které mají jednu výhodu - jejich aplikací se většinou po větším úsilí doberete k cíli. Těmto substitucím je věnována celá šestá část tohoto dokumentu.

$$\int \frac{1}{\arcsin(x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx,\ \int \sqrt{1-3\,x}\,dx,\ \int \frac{x^2}{x^6+4}\,dx,\ \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx,$$
$$\int \sin(x)^2\cos(x)^7\,dx,\ \ldots$$

B) II. substituční pravidlo

Při použití druhého substitučního pravidla se postupuje přesně obráceně než u prvního pravidla. Druhé substituční pravdlo se používá nejčastěji v případech, kdy hledaný integrál je některého z typů uvedených v poslední části tohoto dokumentu. V poslední části budou uvedeny substituce, které je vhodné zvolit, abychom příslušné integrály převedli na integrály jednodušší.
Předpokládejme, že funkce G je diferencovatelná a ryze monotónní na intervalu I a zobrazuje tento interval na interval J. Předpokládejme dále, že funkce f je definovaná na intervalu J a má

na tomto intervalu primitivní funkci. Potom můžeme výpočet integrálu $\int f(x)\,dx$ převést substitucí $x = G(t)$, $dx = g(t)\,dt$ na výpočet integrálu $\int f(G(t))\,g(t)\,dt$. Zadaný integrál pak můžeme vypočítat z rovnosti $\int \mathbf{f(x)\,dx} = \int \mathbf{f(G(t))\,g(t)\,dt}$ do níž po integraci pravé strany dosadíme $t = G_{-1}(x)$

a) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

```
> t:='t';
```

$$t := t$$

```
> x:=2*sin(t);
```

$$x := 2\sin(t)$$

```
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := 2\cos(t)\,dt$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2\sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,dt = 4\int \sqrt{\cos(t)^2}\cos(t)\,dt = 4\int \cos(t)^2\,dt =$$
$2\cos(t)\sin(t) + 2t$

```
> tt:=solve(2*sin(t)=x,t):  2*cos(tt)*sin(tt)+2*tt;
```

$$2\cos(t)\sin(t) + 2t$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1\sqrt{4-x^2}\,x}{2} + 2\arcsin\left(\frac{1\,x}{2}\right)$$

Je třeba si uvědomit, na kterých intervalech jsme příslušné výpočty prováděli. V našem případě platí I=[-2,2] a J=$\left[-\frac{1\,\pi}{2}, \frac{1\,\pi}{2}\right]$.

Tento příklad byl svým způsobem výjimečný. Většinou totiž nevíme , jak zvolit substituci $x = G(t)$. Častějším případem bude volba $t = G_{-1}(x)$.

b) $\int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx$

Volíme substituci $t := \sqrt{x-4}$. Odtud $x := 4 + t^2$ a $dx := 2\,t\,dt$.

```
> x:='x';
```

$$x := x$$

```
> t:='t';
```

$$t := t$$

```
> x:=solve(t=sqrt(x-4),x);
```

$$x := 4 + t^2$$

```
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := 2\,t\,dt$$

```
> t:='t';x:='x';
```

$$t := t$$

$$x := x$$

```
> t:=sqrt(x-4):    2*t-4*arctan(1/2*t);
```

$$2\sqrt{x-4} - 4\arctan\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx = \int 2\,\frac{t^2}{4+t^2}\,dt = 2\,t - 4\arctan\left(\frac{1\,t}{2}\right) = 2\sqrt{x-4} - 4\arctan\left(\frac{1\sqrt{x-4}}{2}\right)$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)^3}}\,dx$ (volte $x = 2\tan(t)$), $\int \frac{x}{(1-3\,x)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\,dx$

5) Racionální funkce

Při počítání integrálů je naší snahou převést tento integrál na tabulkový nebo na výpočet intergálu z racionální funkce. K tomu nám slouží výše uvedené metody. Ukažme si nyní, jak se počítají intergály z racionální funkce.

V první fázi upravíme racionální funkci na součet polynomu a ryze lomenné racionální funkce (dělení polynomů). Problémem tedy zůstane pouze integrování ryze lomenné racionální funkce. Postup integrování takovéto funkce si ukážeme v následujících příkladech.

a) $\int \frac{x+1}{x^4 - 4\,x^3 + 5\,x^2 - 4\,x + 4}\,dx$

Ukažme si, jak se funkce rozkládá na součet parciálních zlomků "na papíře". V dalších příkladech už využijeme schopností Maplu a necháme ho, ať se trápí sám. Práce je to totiž jednotvárná, zdlouhavá a ne příliš myšlenkově náročná.

V prvním kroku rozložíme polynom ve jmenovateli na součin mocnin dále nerozložitelných reálných polynomů - lineárních a kvadratických.

```
> factor(x^4-4*x^3+5*x^2-4*x+4);
```

$$(x^2+1)\,(x-2)^2$$

Polynomy prvního stupně odpovídají kořenovým činitelům příslušných reálných kořenů ($(x-2)^2$ - dvojnásobný reálný kořen 2) a polynomy druhého stupně odpovídají dvěma komplexně sdruženým kořenům (x^2+1 - dva komplexní kořeny *i*,-*i*).

Ke každému takovému polynomu přísluší tolik parciálních zlomků, kolikanásobný je příslušný kořen s tím, že v každém následujícím zlomku se snižuje stupeň jmenovatele o jedničku. V případě reálných kořenů je v čitateli vždy konstanta, v případě komplexních kořenů (kvadratický trojčlen) je v čitateli lineární funkce.

$$\frac{x+1}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}=\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)^2}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C+Dx}{x^2+1}$$

Snad se teď situace trochu vyjasnila. Ještě zbývá dopočítat koeficienty A, B, C, D. Ukažme si jednu z možností, jak lze tyto koeficienty spočítat. Převedeme všechny zlomky na pravé straně rovnice na společného jmenovatele.

```
> simplify(A/(x-2)^2+B/(x-2)+(C+D*x)/(x^2+1));
```

$$\frac{Ax^2+A+Bx^3-2Bx^2+Bx-2B+Cx^2-4Cx+4C+Dx^3-4Dx^2+4Dx}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)^2}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C+Dx}{x^2+1}=$$
$$\frac{Ax^2+A+Bx^3-2Bx^2+Bx-2B+Cx^2-4Cx+4C+Dx^3-4Dx^2+4Dx}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

Po úpravě

$$x+1=Ax^2+A+Bx^3-2Bx^2+Bx-2B+Cx^2-4Cx+4C+Dx^3-4Dx^2+4Dx$$

Už se to začíná pěkně rýsovat. Dostali jsme rovnost dvou polynomů. Aby tato rovnost platila, musí se rovnat koeficienty u x se stejnou mocninou na levé i pravé straně rovnosti. Dostaneme tedy čtyři rovnice o čtyřech neznámých.

$$\begin{aligned} D+B&=0\\ C-4D+A-2B&=0\\ -4C+B+4D&=1\\ 4C+A-2B&=1 \end{aligned}$$

```
> solve({B+D=0, A-2*B+C-4*D=0, B-4*C+4*D=1, A-2*B+4*C=1},
  {A,B,C,D});
```

$$\left\{A=\frac{3}{5},\ B=\frac{-7}{25},\ C=\frac{-1}{25},\ D=\frac{7}{25}\right\}$$

Dosadíme koeficienty A, B, C, D do původního výrazu.

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)^2}=\frac{3\,(1)}{5\,(x-2)^2}-\frac{7\,(1)}{25\,(x-2)}+\frac{-\frac{1}{25}+\frac{7x}{25}}{x^2+1}$$

Pokud máte pocit, že jsme si moc nepomohli, tak jste špatně četli část o substituci.

$$\int\frac{x+1}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}\,dx=\frac{3\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx}{5}-\frac{7\int\frac{1}{x-2}\,dx}{25}+\frac{1\int\frac{-1+7x}{x^2+1}\,dx}{25}=$$
$$-\frac{3\,(1)}{5\,(x-2)}-\frac{7\ln(x-2)}{25}+\frac{7\ln(x^2+1)}{50}-\frac{1\arctan(x)}{25}$$

b) $$\int \frac{x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx$$

A teď slíbené potrápení Maplu. Nejdříve si rozložíme funkci na součet parciálních zlomků.

```
> convert((x^2+2*x+13)/(x^5-2*x^4+2*x^3-4*x^2+x-2),parfrac,x);
```

$$\frac{-22-16x}{5(x^2+1)^2}+\frac{21}{25(x-2)}+\frac{-21x-42}{25(x^2+1)}$$

Od této chvíle bude počítání integrálů z funkcí tohoto typu úplnou hračkou.

$$\int \frac{x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx = \frac{21\int \frac{1}{x-2}\,dx}{25}-\frac{21\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx}{25}-\frac{2\int \frac{11+8x}{(x^2+1)^2}\,dx}{5}=$$

$$\frac{21\ln(x-2)}{25}-\frac{21\ln(x^2+1)}{50}-\frac{97\arctan(x)}{25}-\frac{1(22x-16)}{10(x^2+1)}$$

c) $$\int \frac{x^6-x^5+3x^3-30x^2+59x-44}{x^4-x^3-7x^2+13x-6}\,dx,\quad \int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^4-x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx,\ \dots$$

6) Integrování podle typu funkce - doporučené substituce

Pro některé typy funkcí existují tzv. doporučené substituce. Uveďme si některé z nich.

A) $$\int \mathrm{R}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\left(\frac{1}{s}\right)}\right)dx$$

Pokud je daná funkce v tomto tvaru, jako vhodná substituce se doporučuje: $t^s = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

a) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$

Zvolíme $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

```
> x:='x': t:='t':
> x:=solve(t=sqrt((2-x)/(2+x)),x);
```

$$x := -\frac{2\,(-1+t^2)}{1+t^2}$$

```
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := -\frac{8\,t\,dt}{(1+t^2)^2}$$

Odtud pak $x := -\dfrac{2\,(-1+t^2)}{1+t^2}$ a $dx := -\dfrac{8\,t\,dt}{(1+t^2)^2}$. Dosazením do původního integrálu dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx = -8\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{4\,t}{1+t^2} - 4\arctan(t) =$$

$$2\sqrt{-\frac{x-2}{2+x}} + \sqrt{-\frac{x-2}{2+x}}\,x - 4\arctan\left(\sqrt{-\frac{x-2}{2+x}}\right)$$

```
> x:='x': t:='t':
> t:=sqrt((2-x)/(2+x)):  simplify(4*t/(1+t^2)-4*arctan(t));
```

$$\sqrt{-\frac{x-2}{x+2}}\,x + 2\sqrt{-\frac{x-2}{x+2}} - 4\arctan\left(\sqrt{-\frac{x-2}{x+2}}\right)$$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}\,dx$

Tato funkce ještě není ve tvaru, ve kterém bychom ji potřebovali. To se dá ale lehce napravit.

$$\int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}-1}{\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+1}\,dx$$

Teď už můžeme použít navrhovanou substituci $t=\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$.

```
> x:=solve(t=((x+a)/(x-a))^(1/2),x);
```

$$x := \sqrt{-2\,a},\, -\sqrt{-2\,a}$$

```
> x:='x': t:='t':
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := 0$$

$$\int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}-1}{\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+1}\,dx = \int -\frac{4\,t\,a}{(1+t)^2\,(-1+t^2)}\,dt$$

Teď už pouze rozložíme funkci na součet parciálních zlomků, uděláme zpětnou substituci a máme hotovo.

```
> convert(-4*t*a/((1+t)^2*(-1+t^2)),parfrac,t);
```

$$-\frac{a}{2\,(-1+t)}+\frac{a}{(1+t)^2}+\frac{a}{2\,(1+t)}-\frac{2\,a}{(1+t)^3}$$

$$\int -\frac{4\,t\,a}{(1+t)^2\,(-1+t^2)}\,dt =$$

$$\frac{1\,a\int \frac{1}{1+t}\,dt}{2}+a\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt-2\,a\int \frac{1}{(1+t)^3}\,dt-\frac{1\,a\int \frac{1}{-1+t}\,dt}{2} =$$

$$\frac{1\,a\ln(1+t)}{2}-\frac{a}{1+t}+\frac{a}{(1+t)^2}-\frac{1\,a\ln(-1+t)}{2}$$

```
> t:=((x+a)/(x-a))^(1/2):
  1/2*a*ln(1+t)-a/(1+t)+a/((1+t)^2)-1/2*a*ln(-1+t);
```

$$\frac{1}{2}\,a\ln\left(1+\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)-\frac{a}{1+\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}}+\frac{a}{\left(1+\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)^2}-\frac{1}{2}\,a\ln\left(-1+\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}\,dx =$$

$$\frac{1\,a\ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+1\right)}{2}-\frac{a}{\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+1}+\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+1\right)^2}-\frac{1\,a\ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}-1\right)}{2}$$

c) $$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+(x+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\,dx$$

Teď už trochu rychleji. Použijeme substituci $t=(x+1)^{\left(\frac{1}{6}\right)}$.

```
> x:='x': t:='t':
> x:=solve(t=(x+1)^(1/6),x);
```

$$x := -1+t^6$$

```
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := 6\,t^5\,dt$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+(x+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\,dx = \int \frac{6\,(1-t^3)\,t^5}{1+t^2}\,dt =$$

$$-\frac{6\,t^7}{7}+\frac{6\,t^5}{5}+\frac{3\,t^4}{2}-2\,t^3-3\,t^2+6\,t+3\,\ln(1+t^2)-6\,\arctan(t)$$

```
> x:='x': t:='t':
> t:=(x+1)^(1/6):
  -6/7*t^7+6/5*t^5+3/2*t^4-2*t^3-3*t^2+6*t+3*ln(1+t^2)-6*arc
  tan(t);
```

$$-\frac{6\,(x+1)^{(7/6)}}{7}+\frac{6\,(x+1)^{(5/6)}}{5}+\frac{3\,(x+1)^{(2/3)}}{2}-2\,\sqrt{x+1}-3\,(x+1)^{(1/3)}$$
$$+6\,(x+1)^{(1/6)}+3\,\ln(1+(x+1)^{(1/3)})-6\,\arctan((x+1)^{(1/6)})$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+(x+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\,dx = -\frac{6\,(x+1)^{\left(\frac{7}{6}\right)}}{7}+\frac{6\,(x+1)^{\left(\frac{5}{6}\right)}}{5}+\frac{3\,(x+1)^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{2}-2\,\sqrt{x+1}$$
$$-3\,(x+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}+6\,(x+1)^{\left(\frac{1}{6}\right)}+3\,\ln\left(1+(x+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)-6\,\arctan\left((x+1)^{\left(\frac{1}{6}\right)}\right)$$

d) $$\int \frac{1}{((x+1)^2\,(x-1)^4)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\,dx,\quad \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx,\quad \int \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{1+x^2}\,dx$$

B) $\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx$

Nejvhodnější substituce u takto vypadajících funkcí ještě závisí na přesnějším vzhledu dané funkce. Nechť *u = sin(x), v = cos(x)* => *R(u,v)*

1) ***R(-u,v) = -R(u,v)*** => ***t=cos(x)***
2) ***R(u,-v) = -R(u,v)*** => ***t=sin(x)***
3) ***R(-u,-v) = R(u,v)*** => ***t=tan(x)***
4) ***jindy*** => ***t=tan(x/2)*** - univerzální substituce

a) $\int \frac{\sin(x)^2}{1+\sin(x)^2}\, dx$

Tato funkce splňuje třetí podmínku. Použijeme tedy substituci *t=tan(x)*. Abychom mohli tuto substituci použít, musíme si pomocí *tan(x)* vyjádřit $\sin(x)^2$. Pro jiné případy je zde uvedeno také vyjádření $\cos(x)^2$ pomocí *tan(x)*.

$$\sin(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\sin(x)^2+\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} / \frac{\sin(x)^2+\cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\tan(x)^2}{\tan(x)^2+1} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos(x)^2 = \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2+\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2}{\cos(x)^2} / \frac{\sin(x)^2+\cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\tan(x)^2+1} = \frac{1}{1+t^2}$$

```
>
> x:='x': t:='t':
> x:=solve(t=tan(x),x);
```

$$x := \arctan(t)$$

```
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{\sin(x)^2}{1+\sin(x)^2}\, dx = \int \frac{t^2}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}\, dt = \int \frac{t^2}{1+2t^2}\, dt = \frac{1\,t}{2} - \frac{1\sqrt{2}\arctan(t\sqrt{2})}{4}$$

```
> t:=tan(x):     1/2*t-1/4*sqrt(2)*arctan(t*sqrt(2));
```

$$\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan(t\sqrt{2})$$

$$\int \frac{\sin(x)^2}{1+\sin(x)^2}\, dx = \frac{1\tan(x)}{2} - \frac{1\sqrt{2}\arctan(\tan(x)\sqrt{2})}{4}$$

b) $\displaystyle\int \frac{2+\cos(x)}{1+2\cos(x)}\,dx$

Při integrování této funkce musíme použít univerzální substituci *t=tan(x/2)*. Vyjádřeme si tedy *cos(x)* pomocí *tan(x/2)* (pro další případné příklady uvedeme i vyjádření *sin(x))*.

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} = \frac{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} / \frac{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} = \frac{1-\tan\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} / \frac{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{1\,x}{2}\right)^2} = \frac{2\,t}{1+t^2}$$

```
> x:=solve(t=tan(x/2),x);
```

$$x := 2\arctan(t)$$

```
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{2+\cos(x)}{1+2\cos(x)}\,dx = \int \frac{2\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(1+\frac{2\,(1-t^2)}{1+t^2}\right)(1+t^2)}\,dt = \int -\frac{2\,(3+t^2)}{(-3+t^2)\,(1+t^2)}\,dt =$$

$$\sqrt{3}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{1\,t\sqrt{3}}{3}\right) + \arctan(t)$$

```
> t:=tan(x/2):     sqrt(3)*arctanh(1/3*t*sqrt(3))+arctan(t);
```

$$\sqrt{3}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{t\sqrt{3}}{3}\right) + \arctan(t)$$

$$\int \frac{2+\cos(x)}{1+2\cos(x)}\,dx = \sqrt{3}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{1\tan\left(\frac{1x}{2}\right)\sqrt{3}}{3}\right) + \arctan\left(\tan\left(\frac{1x}{2}\right)\right)$$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{sin}(x)}\,dx$

Toto je integrál splňující čtvrtou podmínku. Dá se ale pomocí jednoduchých úprav převést na integál splňující první podmínku (tedy jeho řešení vede na použití prvního substitučního pravidla.

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx = \int \frac{1-\sin(x)}{1-\sin(x)^2}\,dx = \int \frac{1}{\cos(x)^2}\,dx + \int -\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,dx = \tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}$$

d) $\displaystyle\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin(x)-\cos(x)+5}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{\tan(x)+4\cot(x)+4}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}\,dx$

C) $\int \mathrm{R}(\mathrm{e}^{(a\,x)})\,dx$

V takovýchto případech se doporučuje substituce $t = \mathbf{e}^{(a\,x)}$.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{(2x)}+8}{\mathrm{e}^{(2x)}+4\,\mathrm{e}^{x}+8}\,dx$

Jelikož platí rovnost $\mathrm{e}^{(2\,x)} = (\mathrm{e}^{x})^2$, můžeme provést substituci $t = \mathrm{e}^{x}$.

$$\int \frac{e^{(2x)}+8}{e^{(2x)}+4e^x+8}\,dx = \int \frac{(e^x)^2+8}{(e^x)^2+4e^x+8}\,dx$$

```
> x:='x': t:='t':
> x:=solve(t=exp(x),x);
```

$$x := \ln(t)$$

```
> dx:=simplify(diff(x,t))*dt;
```

$$dx := \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{(\mathbf{e}^x)^2+8}{(\mathbf{e}^x)^2+4\,\mathbf{e}^x+8}\,dx = \int \frac{t^2+8}{(t^2+4t+8)\,t}\,dt = \ln(t) - 2\arctan\left(\frac{1\,t}{2}+1\right)$$

```
> t:=exp(x):    ln(t)-2*arctan(1/2*t+1);
```

$$\ln(t) - 2\arctan\left(\frac{t}{2}+1\right)$$

```
>
```

$$\int \frac{\mathbf{e}^{(2x)}+8}{\mathbf{e}^{(2x)}+4\,\mathbf{e}^x+8}\,dx = \ln(\mathbf{e}^x) - 2\arctan\left(\frac{1\,\mathbf{e}^x}{2}+1\right)$$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{\mathbf{e}^{(2x)}+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\mathbf{e}^{(2x)}+\mathbf{e}^x-2}\,dx, \ldots$