Integrace - prostor

>

## *Zadání*

Máme spočísti $\iiint z\,dz\,dy\,dx$ přes množinu $M = \{ (x+y)^2 + z^2 \le 1, 0 < x, 0 < y, 0 < z \}$

## *Substituce*

Použijeme sférické souřadnice

$$\phi := (x, y, z) \to (r\cos(a)\cos(b), r\sin(a)\cos(b), r\sin(b))$$

kde $0 < r$, $b$ je z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $a$ je z intervalu $(0, 2\pi)$.

Substitucí dostáváme následující čtyři podmínky

```
> r^2+2*r^2*cos(a)^2*cos(b)^2 <= 1;
```

$$r^2 + 2r^2\cos(a)^2\cos(b)^2 \le 1$$

```
> 0 < r*cos(a)*cos(b);
```

$$0 < r\cos(a)\cos(b)$$

```
> 0 < r*sin(a)*cos(b);
```

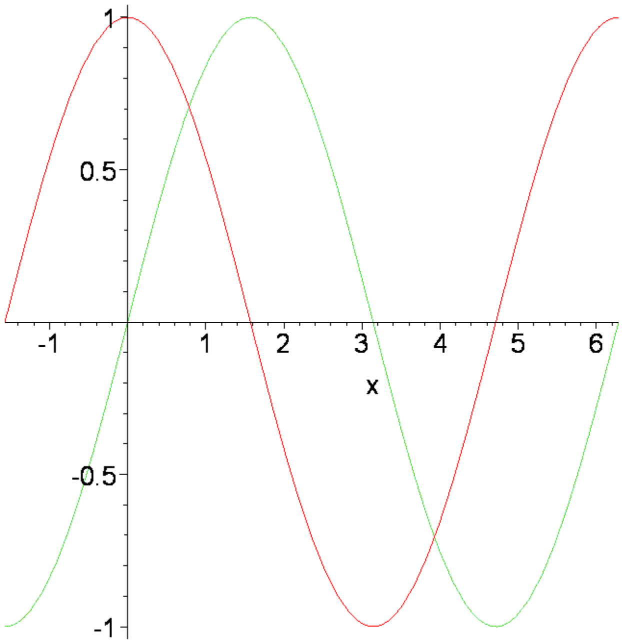
$$0 < r\sin(a)\cos(b)$$

```
> 0 < r*sin(b);
```

$$0 < r\sin(b)$$

Z grafu

```
> plot({sin(x),cos(x)},x=-Pi/2..2*Pi);
```




je patrné, že podmínky jsou splněny pokud $a$ je z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, $b$ je z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ a

$$r \le \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sin(a)\cos(a)\cos(b)^2}}$$

Jakobián transformačního zobrazení $\phi$ jest

```
> with(linalg):
> Det(array([[cos(a)*cos(b), -r*sin(a)*cos(b),
```

```
-r*cos(a)*sin(b)], [sin(a)*cos(b), r*cos(a)*cos(b),
-r*sin(a)*sin(b)], [sin(b), 0,
r*cos(b)]]))=simplify(det(array([[cos(a)*cos(b),
-r*sin(a)*cos(b), -r*cos(a)*sin(b)], [sin(a)*cos(b),
r*cos(a)*cos(b), -r*sin(a)*sin(b)], [sin(b), 0,
r*cos(b)]])));
```

$$\operatorname{Det}\left(\begin{bmatrix} \cos(a)\cos(b) & -r\sin(a)\cos(b) & -r\cos(a)\sin(b) \\ \sin(a)\cos(b) & r\cos(a)\cos(b) & -r\sin(a)\sin(b) \\ \sin(b) & 0 & r\cos(b) \end{bmatrix}\right) = \cos(b)\, r^2$$

který jest nenulový (tedy $\phi$ je regulární) na intervalu $(-\infty,\infty)\mathrm{x}(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\mathrm{x}(0,\infty)$ pro proměnné v pořadí a,b,r

K tomu abychom ukázali, že zobrazení $\phi$ je difeomorfní, bychom museli ještě ověřit, že jde o zobrazení prosté, což budeme
předpokládat ale nikoliv dokazovat.

***Výpočet***

Nyní tedy máme vypočíst

```
> Int(Int(Int(r^3*sin(b)*cos(b),r = 0 ..
1/sqrt(1+2*sin(a)*cos(a)*cos(b)^2)),b = 0 .. Pi/2),a = 0 ..
Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+2\sin(a)\cos(a)\cos(b)^2}}} r^3\sin(b)\cos(b)\,dr\,db\,da$$

Což dává

```
> Int(Int(sin(b)*cos(b)/(4*(1+2*sin(a)*cos(a)*cos(b)^2)^2),b = 0
.. Pi/2),a = 0 .. Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,\frac{\sin(b)\cos(b)}{(1+2\sin(a)\cos(a)\cos(b)^2)^2}\,db\,da$$

Dále upravíme

```
> Int(1/8/(1+sin(2*a)),a = 0 .. Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+\sin(2a)}\,da$$

Provedeme nejprve substituci $2a = y$ , ($da = \frac{1\,dy}{2}$) a poté substituci $\tan\left(\frac{y}{2}\right) = t$, ( $\sin(y) = \frac{2t}{1+t^2}$, $dy = \frac{2\,dt}{1+t^2}$), tím integrál převedeme na tvar

```
> Int(1/(1+2*t+t^2),t = 0 .. infinity)*1/8=Int(Diff(-1/(1+t),t),t
= 0 .. infinity)*1/8;
```

$$\frac{1}{8}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+2\,t+t^{2}}\,dt=\frac{1}{8}\int_{0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

>

Což jak vidno dává lehce kýžený výsledek

$$\int\int\int z\,dz\,dy\,dx=\frac{1}{8}$$