Integrace - prostor

Zadání

Máme spočíst trojný integrál

```
> Int(Int(Int(abs(z*y),z),y),x);
```

$$\iiint |z\,y|\,dz\,dy\,dx$$

přes množinu $M = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\, x^2 + y^2 \le 2\,x\}$

Substituce

Tentokráte užijeme cylindrických (válcových souřadnic):

$$\phi := (x, y, z) \to (r\cos(a), r\sin(a), t)$$

Jakobián transformačního zobrazení jest:

```
> with(linalg):
> Det(array([[cos(a),-r*sin(a),0],[sin(a),r*cos(a),0],[0,0,1]]))=simplify(det(array([[cos(a),-r*sin(a),0],[sin(a),r*cos(a),0],[0,0,1]])));
```

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix}\cos(a) & -r\sin(a) & 0\\ \sin(a) & r\cos(a) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = r$$

Transformací dostáváme podmínky:

```
> abs(t)<=sqrt(4-r^2);
```

$$|t| \le \sqrt{4 - r^2}$$

```
> r<=2*sin(a);
```

$$r \le 2\sin(a)$$

```
> a>0 and a<Pi/2, a>3/2*Pi and a< 2*Pi;
```

$$0 < a \text{ and } a < \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} < a \text{ and } a < 2\pi$$

A dostáváme tak trojný integrál

```
> 2*Int(Int(Int(abs(sin(a)*t)*r^2,t=-sqrt(4-r^2)..sqrt(4-r^2)),r=0..2*cos(a)),a=0..Pi/2);
```

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos(a)}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} |\sin(a)\,t|\,r^2\,dt\,dr\,da$$

Výpočet

Pro Maple je věc prakticky hotová

```
> 2*Int(Int(Int(abs(sin(a)*t)*r^2,t=-sqrt(4-r^2)..sqrt(4-r^2)),r=0..2*cos(a)),a=0..Pi/2)=int(2*int(int(abs(sin(a)*t)*r^2,t=-sqrt(4-r^2)..sqrt(4-r^2)),r=0..2*cos(a)),a=0..Pi/2);
```

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos(a)}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} |\sin(a)\,t|\,r^2\,dt\,dr\,da = 0$$

My ještě můžeme případ rozebrat podrobněji.

Integrál na levé straně výrazu je roven

```
> 4*Int(Int(Int(sin(a)*t*r^2,t=0..sqrt(4-r^2)),r=0..2*cos(a)),a
=0..Pi/2)=4*Int(Int(int(sin(a)*t*r^2,t=0..sqrt(4-r^2)),r=0..2
*cos(a)),a=0..Pi/2);
```

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos(a)}\int_0^{\sqrt{4-r^2}}\sin(a)\,t\,r^2\,dt\,dr\,da=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos(a)}\frac{1}{2}\sin(a)\,r^2\,(4-r^2)\,dr\,da$$

a snadno dopočteme, že to jest

```
> 4*Int(int(2*sin(a)*r^2-1/2*sin(a)*r^4,r = 0 .. 2*cos(a)),a =
0 .. 1/2*Pi)=[4*int(int(2*sin(a)*r^2-1/2*sin(a)*r^4,r = 0 ..
2*cos(a)),a)],[a=0..Pi/2];
```

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{16}{3}\sin(a)\cos(a)^3-\frac{16}{5}\sin(a)\cos(a)^5\,da=\left[-\frac{16}{3}\cos(a)^4+\frac{32}{15}\cos(a)^6\right],\left[a=0\,..\,\frac{\pi}{2}\right]$$

```
>
```

a dostáváme výsledek, který nám Maple spočetl ihned.