Integrace - prostor

Otázka

Roste objem jednotkové koule v R^k se zvyšující se dimenzí prostoru ?

Náčrtek jednotkové koule v prvních čtyřech dimenzích :-).

Užijeme-li projekci do prostoru o jednu dimenzi menšího, tak náčrtek jednotkových koulí může vypadat např. takto:

```
> with(plots):
```

Jednorozměrná:

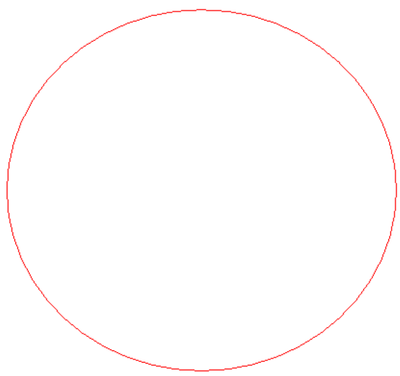
```
> plot([[0,0]],style=point,axes=none);
```


Dvourozměrná:

```
> plot(0,x=-1..1,axes=none);
```

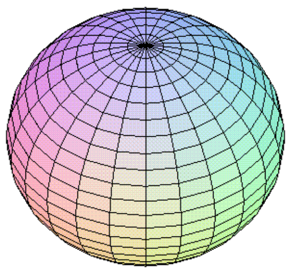

Trojrozměrná:

```
> plot([sin(t),cos(t),t=-Pi..Pi],axes=none);
```



A čtyřrozměrná:

```
> p4:=plottools[sphere]([0,0,0],1):
> plots[display]([p4]);
```



Odpověď

(vyřešil - prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. - t.č. děkan MFF UK)

Označíme předně obecně kouli v R^k jako množinu x z R^k

```
> B[r]={x,abs(x)<=r};
```

$$B_r = \{x, |x| \le r\}$$

```
> lambda[k](B[k])=alpha[k]*r^k;
```

$$\lambda_k(B_k) = \alpha_k\, r^k$$

kde α_k je objem jednotkové krychle v R^k.

Použijeme cimrmannovský krok stranou a - zaprvé označíme:

```
> I=Int(exp(-t^2),t=-infinity..infinity);
```

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{(-t^2)}\, dt$$

(což jest $\sqrt{\pi}$) - zadruhé spočteme:

```
> Int(exp(-abs(x^2)),x)=Int(exp(-(x[1]^2))*exp(-(x[2]^2))*exp(-
  (x[k]^2)),x[1]*x[2]*x[k]);
```

$$\int \mathbf{e}^{(-|x|^2)}\, dx = \mathrm{Int}\left(\mathbf{e}^{\left(-x_1^{\,2}\right)}\,\mathbf{e}^{\left(-x_2^{\,2}\right)}\,\mathbf{e}^{\left(-x_k^{\,2}\right)}, x_1\, x_2\, x_k\right)$$

(MapleV neumožňuje nějakým solidním způsobem vyjádřit některé symboly v textu, čili rozumí se, že v integrálu vpravo integrujeme po složkách, vlevo v R^k)

To však jest:

```
> Product(Int(exp(-(x[j])^2),x=-infinity..infinity),j=1..k)=pi^
  (k/2);
```

$$\prod_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{\left(-x_j^{\,2}\right)}\, dx = \pi^{\left(\frac{k}{2}\right)}$$

Dále využijeme geometrického významu integrálu a označíme:

```
> Int(exp(-abs(x)^2),x)=lambda[k+1]({[x,y],0<=y,y<=exp(-abs(x)^
```

```
2)});
```

$$\int e^{(-|x|^2)}\,dx = \lambda_{k+1}(\{0 \le y, y \le e^{(-|x|^2)}, [x, y]\})$$

($[x, y]$ samozřejmě z prostoru $R^{(k+1)}$).Množinu na pravé straně označíme M.Pro y z intervalu (0,1) označíme

```
> M^y={x,y<=exp(-abs(x)^2)};
```

$$M^y = \{x, y \le e^{(-|x|^2)}\}$$

pak tedy s využitím Fubiniho věty platí:

```
> lambda[k+1]({[x, y], y <= exp(-abs(x)^2), 0 <=
  y})=Int(lambda[k](M^y),y=0..1);
```

$$\lambda_{k+1}(\{0 \le y, y \le e^{(-|x|^2)}, [x, y]\}) = \int_0^1 \lambda_k(M^y)\,dy$$

Vyřešením nerovnice:

```
> y<=exp(-abs(x)^2);
```

$$y \le e^{(-|x|^2)}$$

dostaneme:

```
> abs(x)<=sqrt(ln(1/y));
```

$$|x| \le \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}$$

a platí tedy, že:

```
> M^y=B[sqrt(ln(1/y))];
```

$$M^y = B_{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}}$$

Tedy napravo stojí koule o poloměru $\sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}$. Dále jak jsme již uvedli máme:

```
> lambda[k](B[sqrt(ln(1/y))])=alpha[k]*(ln(1/y))^(k/2);
```

$$\lambda_k\left(B_{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}}\right) = \alpha_k \ln\left(\frac{1}{y}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)}$$

Sepíšeme-li řetězec poznatků, které jsme byli právě učnili dostáváme:

```
> pi^(k/2)=Int(exp(-abs(x)^2),x);
```

$$\pi^{\left(\frac{k}{2}\right)} = \int e^{(-|x|^2)}\,dx$$

```
> Int(exp(-abs(x)^2),x)=alpha[k]*Int(ln(1/y)^(k/2),y=0..1);
```

$$\int e^{(-|x|^2)}\,dx = \alpha_k \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{y}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)} dy$$

Substitucí $y = e^{(-s)}$, $dy = -e^{(-s)}\, ds$ máme:

```
> alpha[k]*Int(ln(1/y)^(1/2*k),y=0..1)=alpha[k]*Int(exp(-s)*s^(
  k/2),s=0..infinity);
```

$$\alpha_k \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{y}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)} dy = \alpha_k \int_0^\infty e^{(-s)}\, s^{\left(\frac{k}{2}\right)}\, ds$$

Integrál napravo však, jak pozorujeme, není nic jiného gamma funkce. Tedy:

```
> alpha[k]*Int(exp(-s)*s^(1/2*k),s = 0 ..
  infinity)=alpha[k]*Gamma(k/2+1);
```

$$\alpha_k \int_0^\infty e^{(-s)}\, s^{\left(\frac{k}{2}\right)}\, ds = \alpha_k\, \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

Po vydělení potom:

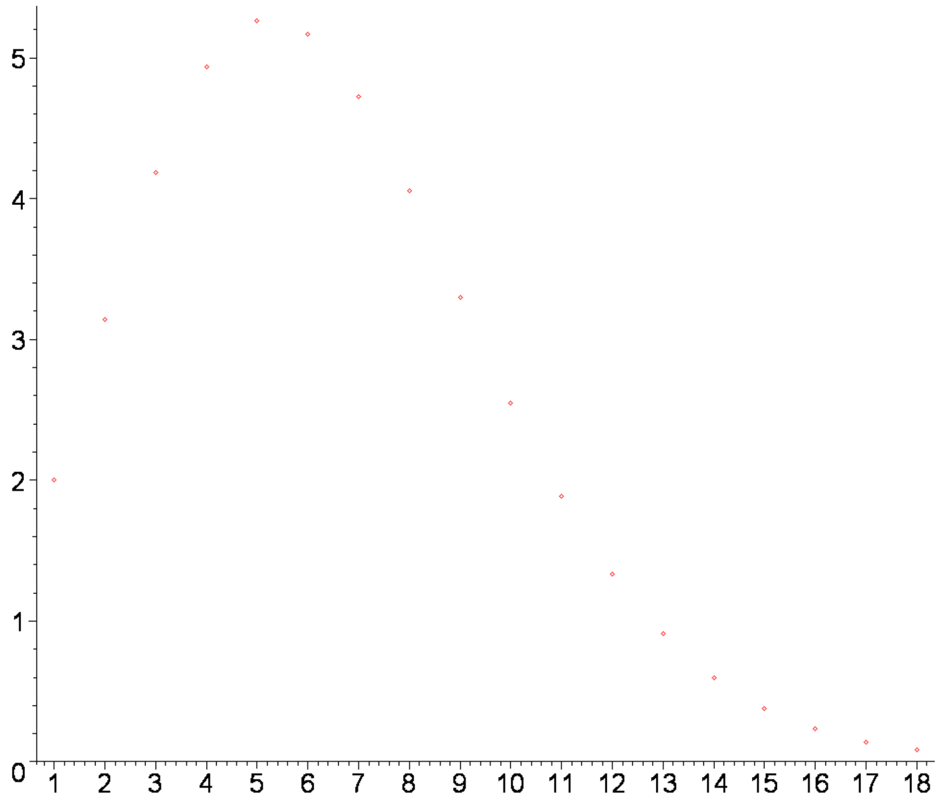
```
> alpha[k]=pi^(k/2)/Gamma(k/2+1);
```

$$\alpha_k = \frac{\pi^{\left(\frac{k}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$$

A objem jednotkové koule máme spočtený.

Na závěr poprosíme MapleV, aby nám přehledně načrtl vývoj objemu jednotkové koule v prostorech R až R^{20}.

```
> plot([seq([k,Pi^(k/2)/GAMMA(k/2+1)],k=1..18)],style=point,xti
  ckmarks=18);
```



>

Vidíme sami, že objem jednotkobé koule roste až do dimenze 5, kde nabývá svého maxima, ale poté objem jednotkové koule klesá, jak Γ fce ve jmenovateli stahuje exponencielu v čitateli.

A to je odpověď na naši otázku.