

- Vicerozmerny integral

[15. Vypočítejte objem tělesa ohraničeného kuzelem $x^2 + y^2 = z^2$

[$z > 0$, válcem $x^2 + y^2 = 2y$

[a rovinou $z=0$.

[Pro představu se pokusíme si to nakreslit.

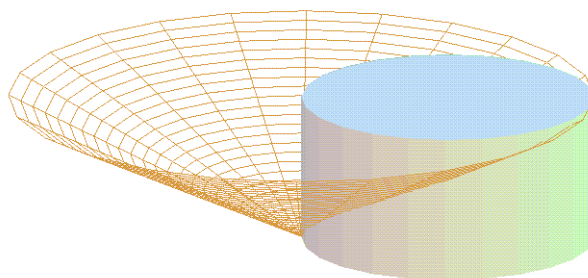
```
[ > c:=cylinder([0,1,0],1,1):
```

```
[ > dc:=plots[display](c,scaling=constrained,style=patchnogrid):
```

```
[ > ic:=cone([0,0,0],2,color=gold):
```

```
[ > dic:=plots[display](ic,scaling=constrained,style=wireframe):
```

```
[ > plots[display]({dic,dc});
```



[Budeme počítat objem té části válce, která není součástí kužele.

[Půdorysem plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

[která ohraničuje těleso shora, je kruh $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$

[Zdola je těleso ohraničeno rovinou (x,y) . Proto $V =$ dvojný integrál ze z podle x a y přes

[množinu D, kde D je kruh $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$

[Zavedeme si polární souřadnice a určíme integrační hranice

[$\rho^2 (\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2) = 2\rho \sin(\phi)$

[$\rho = 2 \sin(\phi)$

[$\rho = 0$

[a ϕ je z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$

[Můžeme integrovat:

[`> int(int(rho^2, rho=0..2*sin(phi)), phi=0..Pi);`

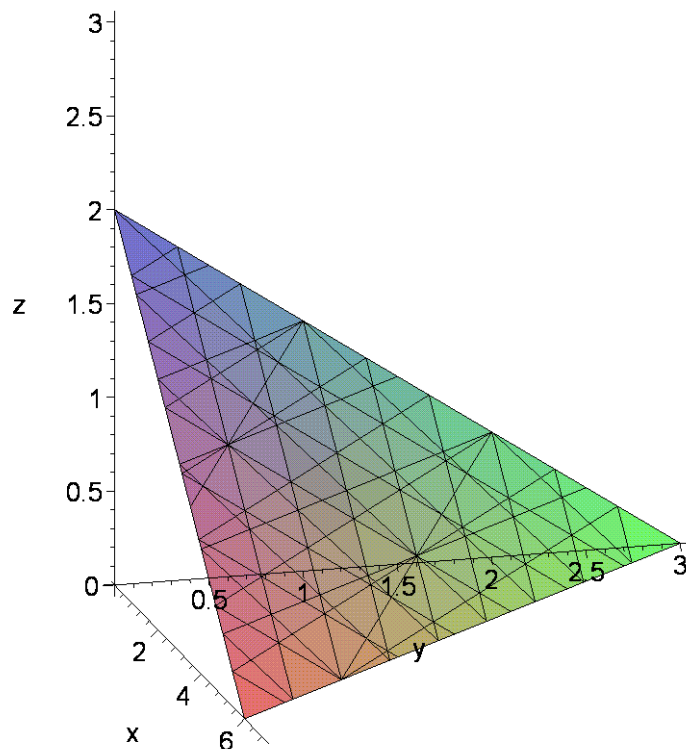
$$\frac{32}{9}$$

[Objem je roven přesně tomuto číslu. A je to.

[16. Vypočítejte objem tělesa ohraničeného souřadnicovými osami a plochou $x+2y+3z-6=0$.

[Nacrtněte obrázek:

[`> implicitplot3d(x+2*y+3*z-6=0, x=0..7, y=0..3, z=0..3);`



Budeme integrovat nejdrive podle x pres interval (0,6), podle y pres (0,-x/2-3) a podle z pres(0,-x/3-2y/3+2). Ted opet staci pouze dosadit do integralu

> $\text{int}(\text{int}(\text{int}(x, z=0 \dots -x/3 - (2*y)/3 + 2), y=0 \dots -x/2 + 3), x=0 \dots 6);$

9

Takze objem telesa, ktere je vymezeno souradnicovymi rovinami a rovinou $x+2y+3z-6=0$ je roven 9.

[>