Integrace-rady

## *Zadání*

Jest nám vyjádřiti integrál

```
> Int(x^2*ln(1-x^2),x=0..1);
```

$$\int_0^1 x^2 \ln(1-x^2)\, dx$$

jako součet řady.

## *Výpočet*

Rozvinutím $\ln(1-x^2)$ v mocninnou řadu dostáváme

```
> Int(x^2*ln(1-x^2),x=0..1)=-Int(x^2*Sum(x^(2*k)/k,k=1..infinit
  y),x=0..1);
```

$$\int_0^1 x^2 \ln(1-x^2)\, dx = -\int_0^1 x^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(2k)}}{k}\right) dx$$

Po záměně sumítka a integřítka

```
> -Int(x^2*Sum(x^(2*k)/k),k = 0 ..
  1)=-Sum((1/(2*k+3))/k,k=1..infinity);
```

$$-\int_0^1 x^2 \left(\sum \frac{x^{(2k)}}{k}\right) dk = -\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)\,k}\right)$$

Zde pro nás úkol prakticky skončil. MapleV však ještě rád sumu sečte.

```
> -Sum((1/(2*k+3))/k,k=1..infinity)=-sum(1/(2*k+3)/k,k = 1 ..
  infinity);
```

$$-\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)\,k}\right) = -\frac{8}{9} + \frac{2}{3}\ln(2)$$

## *Ověření předpokladů věty o záměně sumy a integrálu*

Aby výše uvedené závěry byly správné musíme ještě ověřit, zda platí

```
> Sum(Int(abs(-x^2*(x^(2*k))/k),x = 0 .. 1),k = 1 ..
  infinity)<infinity;
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left|\frac{x^2\, x^{(2k)}}{k}\right| dx < \infty$$

```
>
>
```

To jsme však již ověřili, neboť suma v předchozím paragrafu konverguje absolutně.