

[Integrace - rady

- Zadání

[Rozvinutím vhodné funkce v mocninou řadu jest nám převést v řadu integrál:

> `Int(exp(-x)*cos(sqrt(x)),x=0..infinity);`

$$\int_0^{\infty} e^{(-x)} \cos(\sqrt{x}) dx$$

- Ověření předpokladů věty o záměně sumy a integrálu

[Vhodnou funkcí k rozvedení je zde $\cos(\sqrt{x})$:

> `cos(x)=(-1)^k*x^(2*k)/factorial(2*k);`

$$\cos(x) = \frac{(-1)^k x^{(2k)}}{(2k)!}$$

[V tomto případě dostáváme:

> `Int(exp(-x)*cos(x^(1/2)),x = 0 ..`

`infinity)=Int(exp(-x)*Sum((-1)^k*x^k/factorial(2*k),k=0..infinity),x=0..infinity);`

$$\int_0^{\infty} e^{(-x)} \cos(\sqrt{x}) dx = \int_0^{\infty} e^{(-x)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} \right) dx$$

[Nás zajímá zda konverguje suma:

> `Sum(1/factorial(2*k)*Int(exp(-x)*x^k,x=0..infinity),k=0..infinity);`

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k)!} \int_0^{\infty} e^{(-x)} x^k dx \right)$$

[Pomocí metody per partes a rekurence spočteme integrál v sumě:

> `Int(exp(-x)*x^k,x=0..infinity)=[-exp(-x)*x^k]-Int(-exp(-x)*k*x^(k-1),x=0..infinity), [x=0..infinity];`

$$\int_0^{\infty} e^{(-x)} x^k dx = [-e^{(-x)} x^k] - \int_0^{\infty} -e^{(-x)} k x^{(k-1)} dx, [x=0.. \infty]$$

[Protože je však zároveň:

> `Int(exp(-x)*x^0,x = 0 .. infinity)=1;`

$$\int_0^{\infty} e^{(-x)} dx = 1$$

[Dostáváme, že:

> `Int(exp(-x)*x^k,x=0..infinity)=factorial(k);`

$$\int_0^{\infty} e^{(-x)} x^k dx = k!$$

[Tím máme vyjádřenu sumu ve tvaru:

> `Sum(Int(exp(-x)*x^k,x = 0 .. infinity)/(2*k)!,k = 0 ..`

```
infinity)=Sum(k!/(2*k!),k = 0 .. infinity);
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k)!} \int_0^{\infty} e^{(-x)} x^k dx \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$$

Kterážto suma na pravé straně konverguje absolutně podle podílového kritéria a nemusíme tedy ani hledat vhodnou majorantu.

– Výpočet

Již můžeme jen konstatovat, že platí:

```
> Int(exp(-x)*cos(x^(1/2)),x = 0 ..  
infinity)=Sum((-1)^k*k!/(2*k!),k = 0 .. infinity);
```

$$\int_0^{\infty} e^{(-x)} \cos(\sqrt{x}) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k)!}$$

podle věty o záměně sumy a integrálu. A nakonec se ještě zeptáme MapleV, zda jsme se nespletli.

```
> if(evalf(int(exp(-x)*cos(x^(1/2)),x = 0 ..  
infinity),15)=evalf(sum((-1)^k*k!/(2*k!),k = 0  
..infinity),15)) then print(`Nespletli jste se.`) fi;
```

Nespletli jste se.

```
>
```

Tedy alespoň ne hruběji nežli na 15 desetinných míst ...