Integrace - rovina

>

Zadání

Máme spočísti míru množiny $M = \{y < x^2, x^2 < 2\,y, x < y^2, y^2 < 3\,x\}$

Substituce

Nejdříve se podívejme jak bychom mohli příklad řešit "z obrázku". Pak si ukážeme, že je vhodnější užít substituce.

Množina M je plocha omezená křivkami

```
> y=x^2;
```

$$y = x^2$$

```
> y=x^2/2;
```

$$y = \frac{x^2}{2}$$

```
> y=sqrt(x);
```

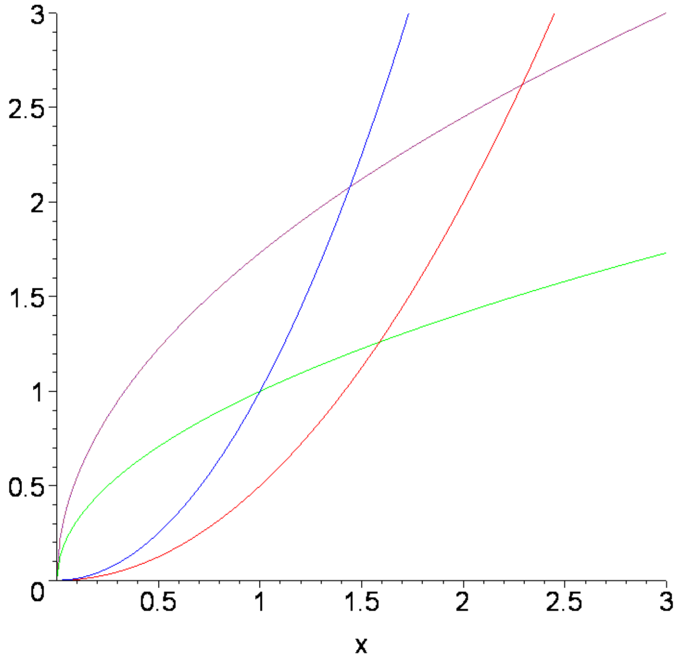
$$y = \sqrt{x}$$

```
> y=sqrt(3*x);
```

$$y = \sqrt{3}\,\sqrt{x}$$

Tedy znázorněno

```
> plot([x^2,x^2/2,sqrt(x),sqrt(3*x)],x=0..3,0..3,color=[blue,red,green,maroon]);
```



Mohli bychom tedy spočíst průsečíky křivek a zintegrovat po částech. My však užijeme substituci

$$\phi := (x, y) \rightarrow \left((u\,v^2)^{\left(\frac{1}{3}\right)}, (u^2\,v)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \right)$$

Jacobián tohoto transformačního zobrazení jest

```
> with(linalg):
> Det(array([[1/3/(u*v^2)^(2/3)*v^2,2/3/(u*v^2)^(2/3)*u*v],[2/3/(u^2*v)^(2/3)*u*v,1/3/(u^2*v)^(2/3)*u^2]]))=-1/3;
```

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\,\frac{v^2}{(u\,v^2)^{(2/3)}} & \frac{2}{3}\,\frac{u\,v}{(u\,v^2)^{(2/3)}} \\ \frac{2}{3}\,\frac{u\,v}{(u^2\,v)^{(2/3)}} & \frac{1}{3}\,\frac{u^2}{(u^2\,v)^{(2/3)}} \end{bmatrix}\right) = \frac{-1}{3}$$

Dosazením dostáváme následující podmínky

```
> (u^2*v)^(1/3)<(u^2*v^4)^(1/3);
```

$$(u^2\,v)^{(1/3)} < (u^2\,v^4)^{(1/3)}$$

```
> (u^2*v^4)^(1/3)<2*(u^2*v)^(1/3);
```

$$(u^2\,v^4)^{(1/3)} < 2\,(u^2\,v)^{(1/3)}$$

```
> (u*v^2)^(1/3)<(u^4*v^2)^(1/3);
```

$$(u\,v^2)^{(1/3)} < (u^4\,v^2)^{(1/3)}$$

```
> (u^4*v^2)^(1/3)<3*(u*v^2)^(1/3);
```

$$(u^4\,v^2)^{(1/3)} < 3\,(u\,v^2)^{(1/3)}$$

Umocníme, odmocníme a dostaneme že v musí ležet v intervalu (1,2) a u v intervalu (1,3)

Výpočet

Tedy dostáváme integrál, který již spočteme z hlavy.

```
> Int(Int(1/3,u=1..3),v=1..2)=int(int(1/3,u=1..3),v=1..2);
```

$$\int_1^2\!\!\int_1^3 \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{2}{3}$$

```
>
```