Integrace - rovina

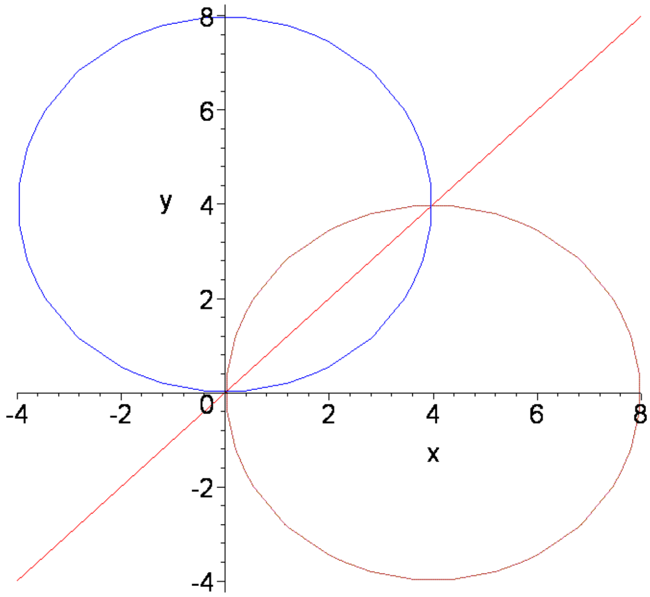
Zadání

Spočtěte míru plochy v R^2 vzniklé průnikem křivek zadaných $(x-a)^2+y^2=a^2$, $x^2+(y-a)^2=a^2$, $0<a$.

Substituce

Zde by substituce příklad velmi zkomplikovala, zato nám vydatně pomůže nákres. Pro $a=4$ vypadá náčrtek takto (ježto $0<a$ vypadá náčrtek pro obecný parametr podobně):

```
> with(plots):
> a:=4:
> p1:=implicitplot(x^2+(y-a)^2=a^2,x=-10..10,y=-10..10,color=blue):
> p2:=implicitplot((x-a)^2+y^2 = a^2,x=-10..10,y=-10..10,color=brown):
> p3:=plot(x,x=-4..8,color=red):
> plots[display]([p1,p2,p3]);
```



Vidíme, že oblast jejíž plochu máme spočítat je symetrická podle přímky $y=x$.Stačí tedy spočítat dvojnásobek integrálu $\int_0^a \sqrt{a^2-(x-a)^2}-x\,dx$. Což jest plocha mezi horní částí spodní kružnice a přímkou $y=x$ na intervalu $(0, a)$.

Výpočet

Na jednom řádku substitucí $\frac{x-a}{a}=\sin(t)$ $(dx=a\cos(t)\,dt)$ dostáváme, že:

```
> a:='a':
> 2*Int(sqrt(1-((x-a)/a)^2)-x,x = 0 .. a)=2*a*Int(cos(t)^2,t=0..Pi/2)-2*Int(x,x=0..a);
```

$$2\int_0^a \sqrt{1-\frac{(x-a)^2}{a^2}}-x\,dx = 2\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\,dt - 2\int_0^a x\,dx$$

Což není nic jiného než:

```
> 2*a*int(cos(t)^2,t = 0 .. 1/2*Pi)-2*int(x,x = 0 .. a);
```

$$\frac{1}{2} a \pi - a^2$$

```
>
```

Což jsme měli spočítati.