Konvergence integrálu

Má m vyšetřit konvergenci integrálu $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\,(1+x\sin(x)^2)}\,dx$

Označím integrovanou funkci jako f8(x).

```
> f8(x):=1/(1+x)/(1+x*sin(x)^2);
```

Zkusím nejprve, zdali se Maple "dopracuje" k nějaké hodnotě:

```
> int(1/(1+x)/(1+x*sin(x)^2),x = 0 .. infinity);
```

$$\mathrm{f8}(x) := \frac{1}{(1+x)\,(1+x\sin(x)^2)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\,(1+x\sin(x)^2)}\,dx$$

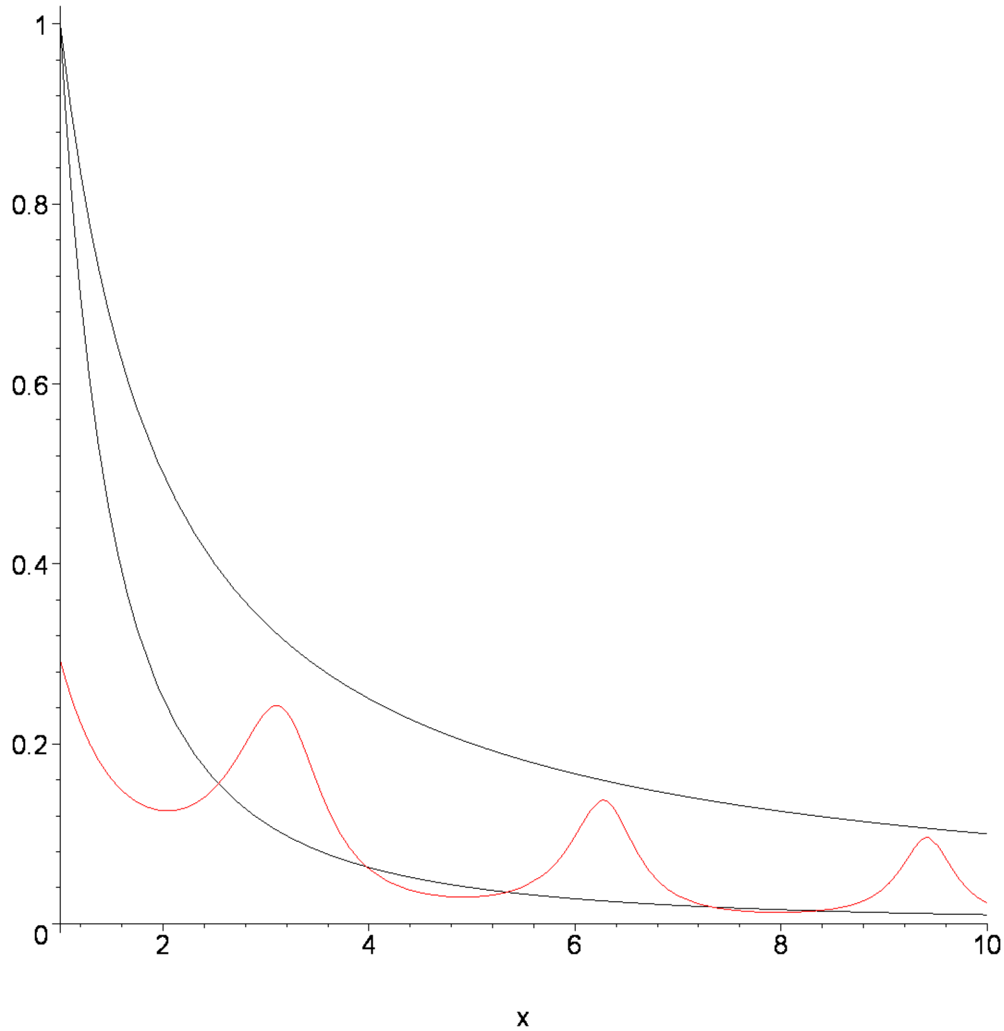
Selhalo to, a tak zkusím, zdali najde primitivní funkci k $\frac{1}{(1+x)\,(1+x\sin(x)^2)}$, u které bych pak počítal příslušné limity:

```
> int(1/(1+x)/(1+x*sin(x)^2),x);
```

$$\int \frac{1}{(1+x)\,(1+x\sin(x)^2)}\,dx$$

I to selže, stejně jako mé pokusy o nalezení primitivní funkce. "Podívám" se proto na průběh mé funkce. Pro porovnání vynesu i funkce $\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x^2}$:

```
> plot([1/x,1/(1+x)/(1+x*sin(x)^2),1/x^2],x=1..10,color=[black,
  red,black]);
```

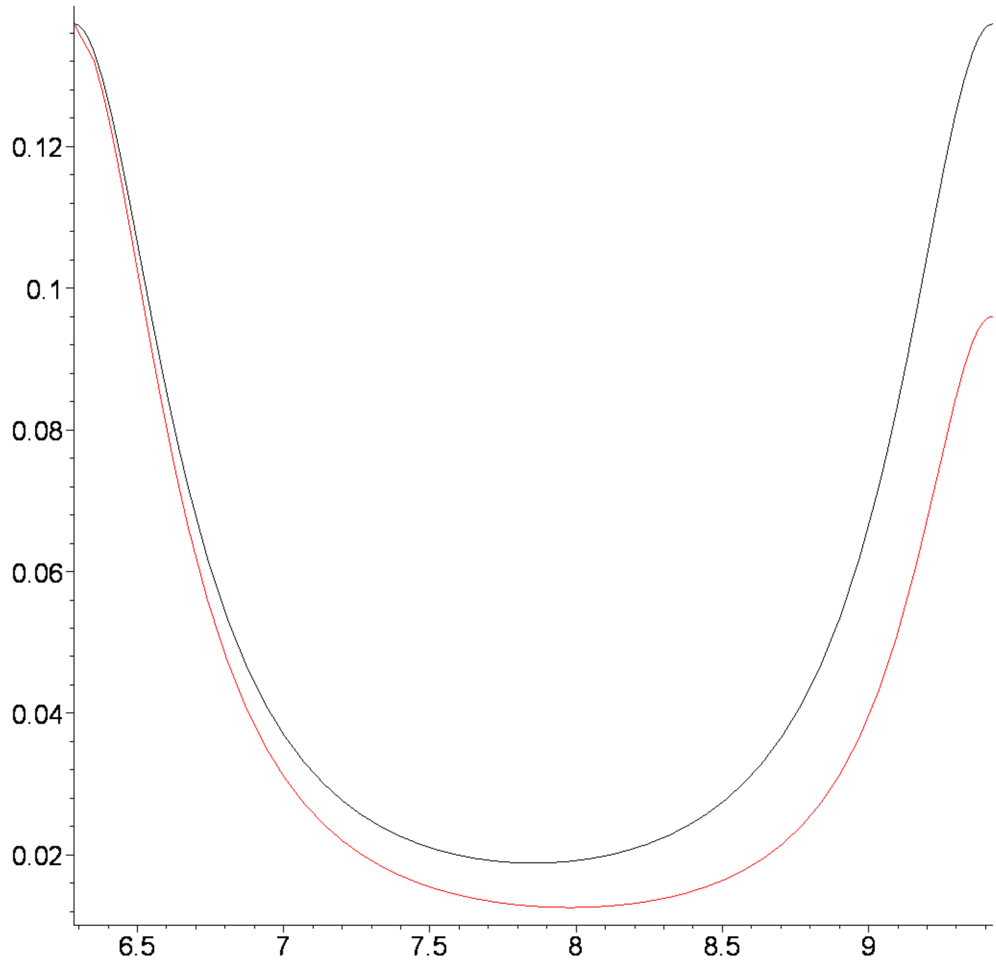


Z toho ale není patrné nic, neboť $\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverguje pro každé a.

Výhodný se ukázal tento trik: Jelikož $\sin(x)^2$ má periodu π budu na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$

brát funkci $\frac{1}{(1+x)(1+a\sin(x)^2)}$, kde $a = k\pi$. "Podívám" se na tuto funkci a srovnám s f8 např. pro k=2. Funkce f8 je opět červená:

```
> plot( [1/(1+2*Pi)/(1+2*Pi*sin(x)^2),f8(x)],x=2*Pi..3*Pi,
  color=[black,red]);
```



Je patrné, pro každé kladné k bude naše srovnávací funkce (označím ji s(x)) větší než f8.

Najdu k s(x) primitivní funkci:

```
> int(1/(1+a)/(1+a*sin(x)^2),x);
```

$$\frac{\arctan(\sqrt{1+a}\,\tan(x))}{(1+a)^{(3/2)}}$$

```
> simplify(%);
>
```

$$\frac{\arctan(\sqrt{1+a}\,\tan(x))}{(1+a)^{(3/2)}}$$

Toto je případ, kdy Maple neposkytuje ideální výsledky. Ručně, nebo pomocí Mathematica 3.0 lze dojít k primitivní funkci tvaru $\frac{\arctan(\sqrt{a+1}\,\tan(x))}{\sqrt{a+1}\,(1+a)}$, se kterou se pracuje lépe. Pro zkoušku:

```
> arctan(sqrt(a+1)*tan(x))/sqrt(a+1)/(1+a);
```

$$\frac{\arctan(\sqrt{1+a}\,\tan(x))}{(1+a)^{(3/2)}}$$

```
> diff(%,x);
```

>

$$\frac{1+\tan(x)^2}{(1+a)\,(1+(1+a)\tan(x)^2)}$$

Což vskutku upravím na $\dfrac{1}{(1+a)\,(1+a\sin(x)^2)}$.

Nyní $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{(1+k\pi)\,(1+k\pi\sin(x)^2)}\,dx = \left[\frac{\arctan(\sqrt{k\pi+1}\,\tan(x))}{\sqrt{k\pi+1}\,(1+k\pi)}\right]$od $(k\pi, (k+1)\pi)$, což je menší než $\dfrac{1}{(1+k\pi)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$. Jenže $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k\pi)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$ konverguje

a když pro každý interval $(k\pi, (k+1)\pi)$ vytvořím popsanou srovnávací funkci tak mám

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k\pi)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} > \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x)\,(1+x\sin(x)^2)}\,dx$ tedy můj integrál konverguje.

>