Konvergence integrálu s parametrem

Zadání

Vyšetřeme konvergenci integrálu v závislosti na reálném parametru *a*.

```
> Int((Pi/2-arctan(x))/x^a,x=0..infinity);
```

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{x^{[0,\,-2]}}\, dx$$

Konvergence

Definujme:

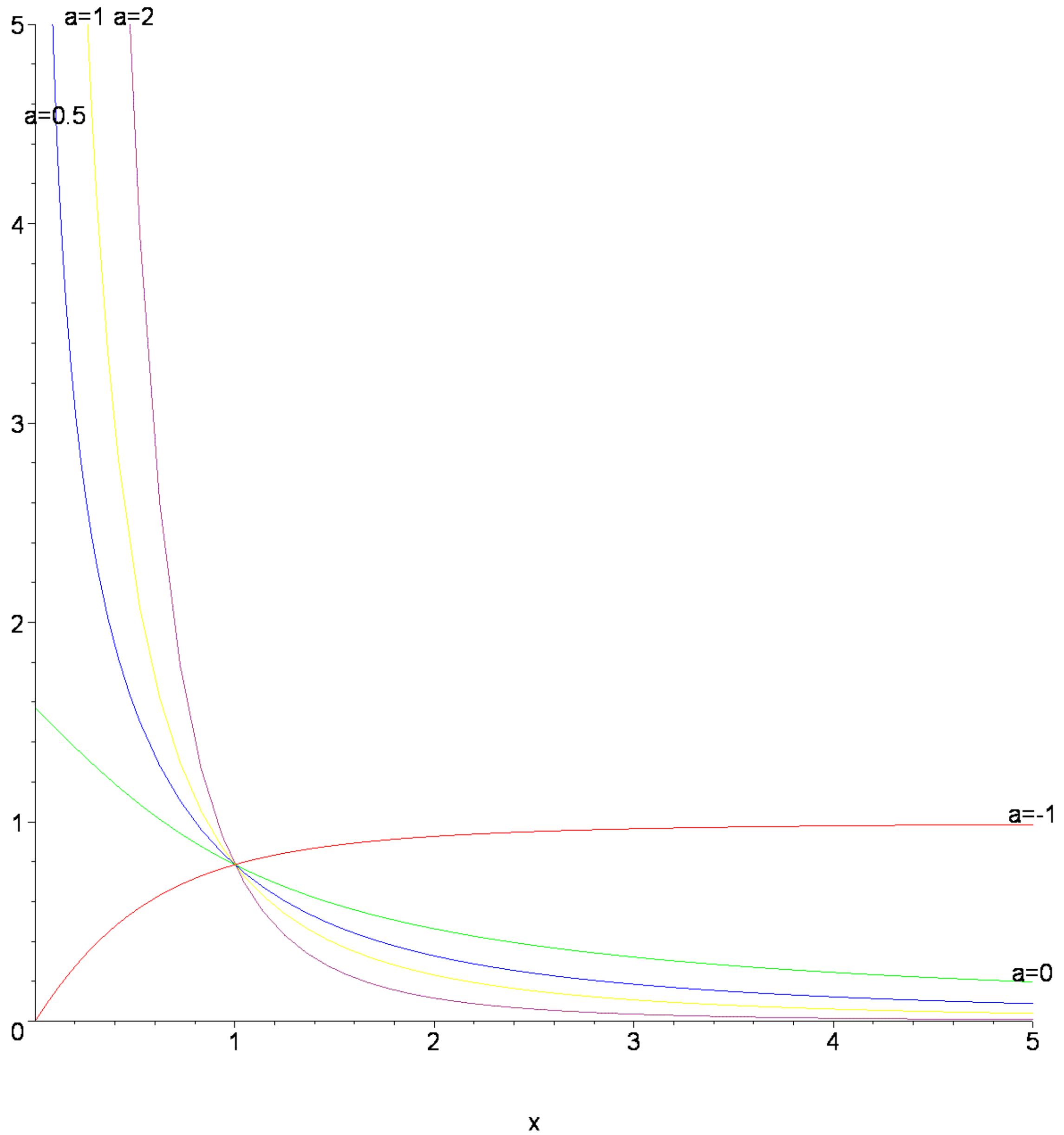
```
> f:=(x,a)->(Pi/2-arctan(x))/x^a;
```

$$f := (x, a) \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{x^a}$$

```
> with(plots):
```

Načrtněme si pět graf funkce *f*

```
> p1:=plot([f(x,-1),f(x,0),f(x,0.5),f(x,1),f(x,2)],x=0..5,0..5,
  color=[red,green,blue,yellow,maroon]):
> p2:=textplot({[5,1,`a=-1`],[5,0.2,`a=0`],[0.1,4.5,`a=0.5`],[0
  .25,5,`a=1`],[0.5,5,`a=2`]},align={ABOVE}):
> plots[display]({p1,p2});
```



Body nespojitosti v intervalu (0,∞) v tomto případě nejsou, stačí nám tedy zkoumat chování integrandu v okolí bodů 0 a ∞.

U 0 je funkce asymptoticky rovna

```
> 1/x^a;
```

$$\frac{1}{x^a}$$

kterýžto integrand koverguje pro

```
> a<1;
```

$$a < 1$$

V okolí ∞ pak jest fce asymptoticky rovna

```
> 1/x^(a+1);
```

$$\frac{1}{x^{(a+1)}}$$

Která konverguje pro

```
> 1+a>1;
```

$$0 < a$$

Jak jsme k tomu dospěli ? Uvědomíme si nejprve, že

```
> Diff(Pi/2-arctan(x),x)=diff(Pi/2-arctan(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Což u nekonečna jest asymptoticky rovno

```
> Diff(1/x,x)=diff(1/x,x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Přičemž

```
> Limit(Pi/2-arctan(x),x=infinity)=Limit((1/x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$$

```
>
>
```

A věc je jasná.

Složením podmínek pro konvergenci dostáváme, že *a* musí být z intervalu (0,1).