Konvergence integralu

Zadání

Máme vyšetřit konvergenci integrálu

```
> F(a):=a->int((1-exp(-x))/x^a,x=0..infinity);
```

$$F(a) := a \to \int_0^{\infty} \frac{1 - \mathbf{e}^{(-x)}}{x^a}\, dx$$

a spojitost fce $F(a)$.

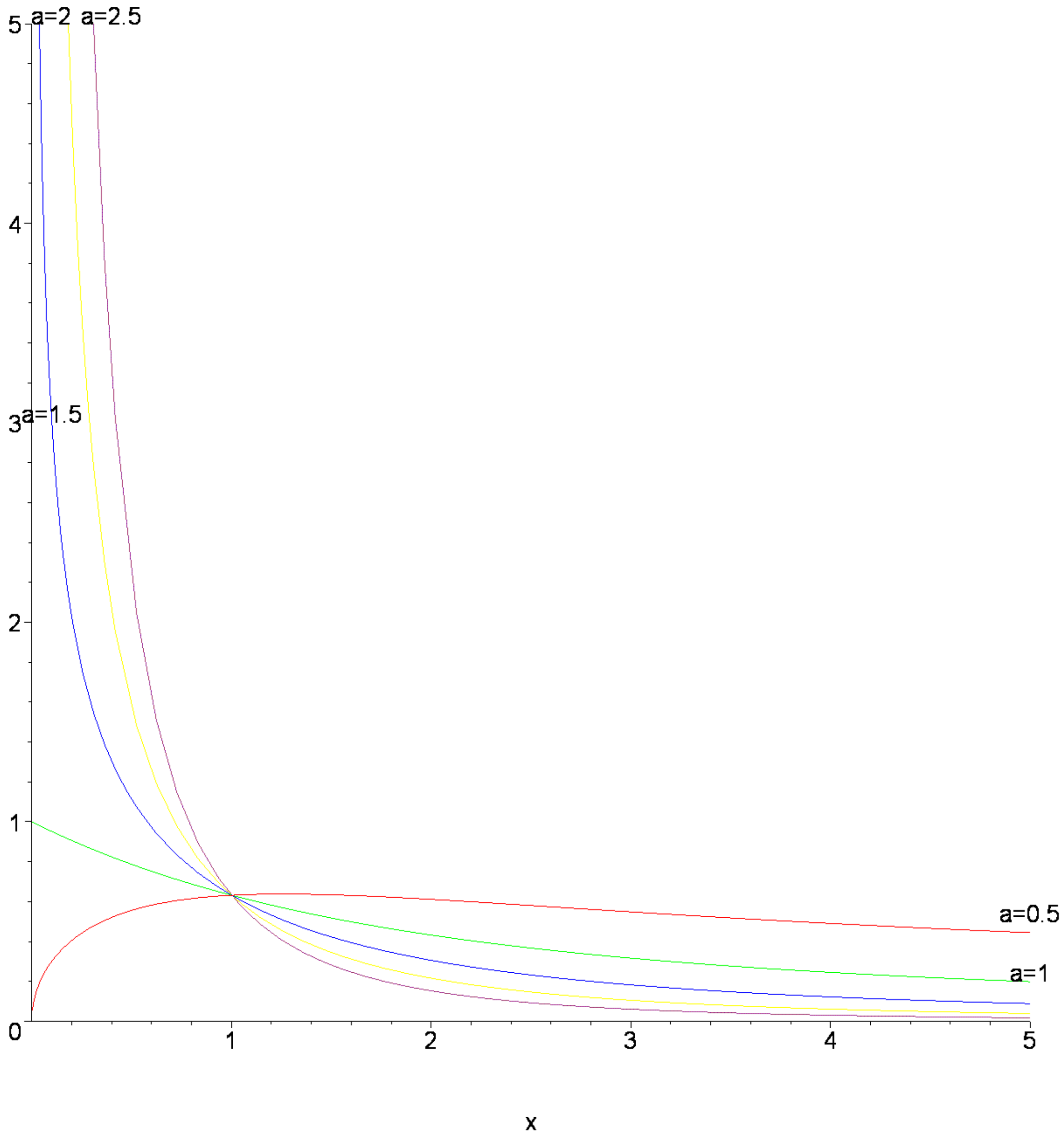
Konvergence

Nakreslíme si průběh integrandu

```
> f:=(x,a)->(1-exp(-x))/x^a;
```

$$f := (x, a) \to \frac{1 - \mathbf{e}^{(-x)}}{x^a}$$

```
> with(plots):
> p1:=plot([f(x,0.5),f(x,1),f(x,1.5),f(x,2),f(x,2.5)],x=0..5,0..5,
  color=[red,green,blue,yellow,maroon]):
> p2:=textplot({[5,0.5,`a=0.5`],[5,0.2,`a=1`],[0.1,3,`a=1.5`],[0.1
  ,5,`a=2`],[0.4,5,`a=2.5`]},align={ABOVE}):
> plots[display]({p1,p2});
```



V okolí nuly je integrand asymptoticky roven

```
> x/x^a=1/(x^(a-1));
```

$$\frac{x}{x^a}=\frac{1}{x^{(a-1)}}$$

Neboť

```
> Limit(x,x=0,right)=Limit(1-exp(-x),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to 0+} x=\lim_{x\to 0+} 1-\mathbf{e}^{(-x)}$$

a

```
> Limit(Diff(x,x),x=0,right)=Limit(Diff(1-exp(-x),x),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to 0+} \frac{d}{dx}x=\lim_{x\to 0+} \frac{d}{dx}(1-\mathbf{e}^{(-x)})$$

kterýžto konverguje pro

```
> a-1<1;
```

$$a < 2$$

U nekonečna jest situace jednoduchá, neboť integrand je zde asymptoticky roven

```
> 1/(x^a);
```

$$\frac{1}{x^a}$$

který konverguje pro

```
> a>1;
```

$$1 < a$$

Složením podmínek dostáváme definiční obor.

```
> solve({a-1<1,a>1},a);
```

$$\{1 < a, a < 2\}$$

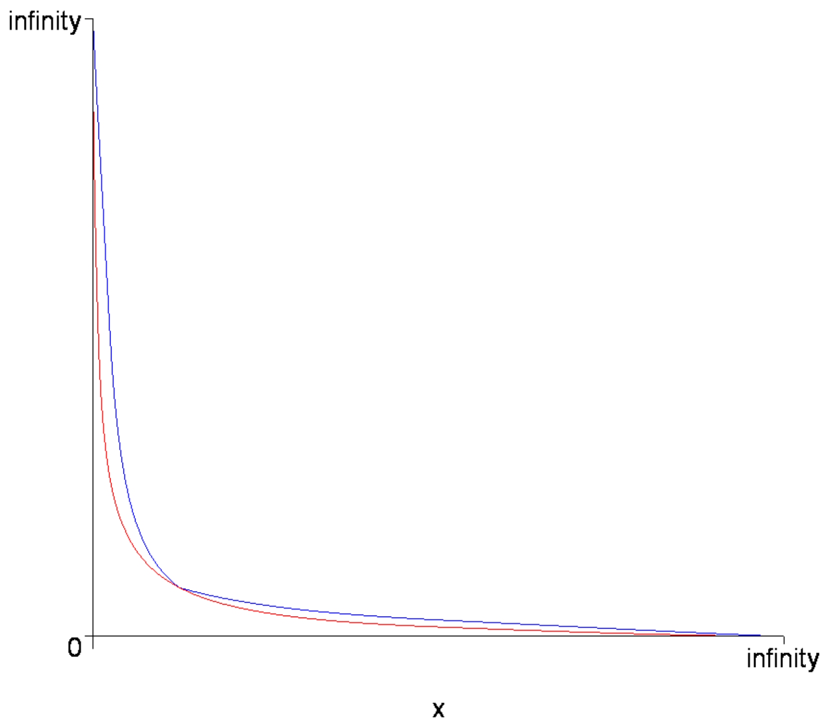
```
>
>
```

Spojitost

Nalezněmež konvergentní majorantu pro integrand. Vezměme předně pevná $p < q$, $p < a$, $a < q$, p, q z intervalu (1,2).

Z obrázku vidíme, že jako majorantu můžeme volit fci $g(x) = \max\left(\frac{1-\mathbf{e}^{(-x)}}{x^p}, \frac{1-\mathbf{e}^{(-x)}}{x^q}\right)$

```
> plot([(1-exp(-x))/(x^1.5),max((1-exp(-x))/(x^1.1),(1-exp(-x))
  /(x^1.9))],x=0..infinity,color=[red,blue]);
```




```
>
```

Ježto fce $g(x)$ je majorantou pro libovolná $p < q$, p, q z intervalu (1,2) jsme hotovi, neboť pak jest fce $F(a)$ spojitá na každém intervalu $[p, q]$, a tedy i na jejich sjednocení, a tudíž v celém intervalu (1,2).