Spojitost integralu s parametrem

>

Zadání

Máme dokázati, že funkce

```
> F:=a->Int((1-cos(x))/x^a,x=0..infinity);
```

$$F := a \to \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^a}\, dx$$

je spojitá na intervalu (1,3), a spočíst $\lim_{a \to 3-} F(a)$.

Konvergence

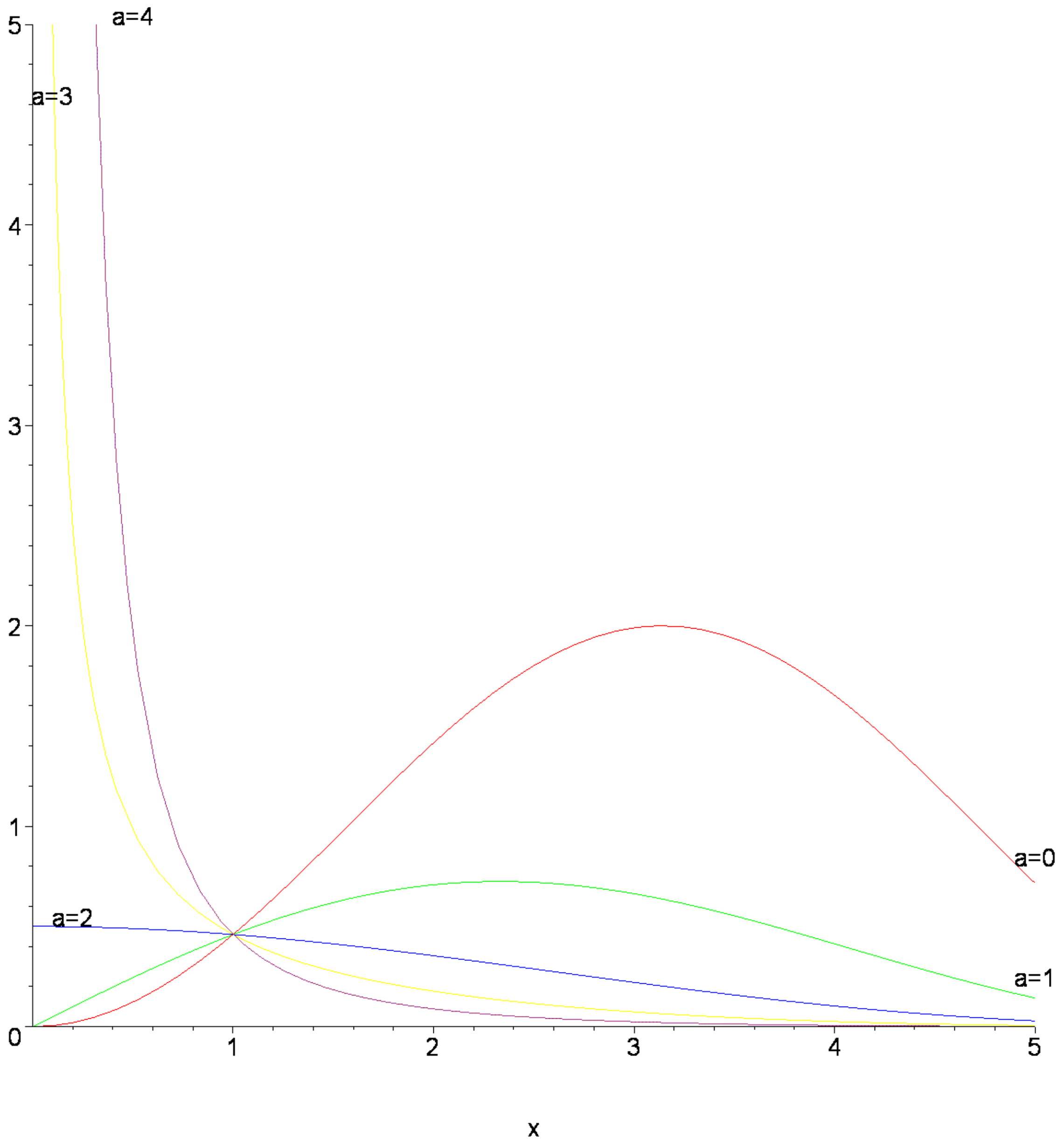
Definujme

```
> f:=(x,a)->(1-cos(x))/x^a;
```

$$f := (x, a) \to \frac{1 - \cos(x)}{x^a}$$

A načrtněmež

```
> with(plots):
> p1:=plot([f(x,0),f(x,1),f(x,2),f(x,3),f(x,4)],x=0..5,0..5,color=[red,green,blue,yellow,maroon]):
> p2:=textplot({[5,0.8,`a=0`],[5,0.2,`a=1`],[0.2,0.5,`a=2`],[0.1,4.6,`a=3`],[0.5,5,`a=4`]},align={ABOVE}):
> plots[display]({p1,p2});
```



V 0 je integrand asymptoticky roven

```
> x^(2-a);
```

$$x^{(2+[0,2])}$$

Který konverguje pro

```
> (2-a)>-1;
```

$$0 < 3 + [0, 2]$$

Neboť

```
> Diff(1-cos(x),x)=diff(1-cos(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(1-\cos(x)) = \sin(x)$$

Což jest u nuly asymptoticky rovno *x*.

U ∞ je situace jednodušší, protože integrand je menší nebo roven

```
> 2/x^a;
```

$$\frac{2}{x^{[0,-2]}}$$

Který konverguje pro

```
> a>1;
```

$$1 < [0, -2]$$

Složením podmínek pro konvergenci integrálu dostáváme, že integrál konverguje pro *a* z intervalu (1,3).

Spojitost

Předně jest f(*x*, *a*), spojitá dle *x* s.v. na intervalu (0,∞) pro vš. *a* z intervalu (1,3).

Dále jest f(*x*, *a*) spojitá dle *a* s.v. na intervalu (1,3) pro s.v. *x* z intevalu (0,∞).

Musíme tedy především nalézt k ní konvergentní majorantu. Zvolme nejdříve $p < q$, pevná z intervalu (1,3) a uvažujme $p < a$, $a < q$.

Pro *x* z intervalu (0,1) je majorantou:

```
> (1-cos(x))/x^a<=(1-cos(x))/x^q;
```

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^{[0,\,-2]}} \le \frac{1 - \cos(x)}{x^q}$$

Pro *x* z intervalu (1,∞) máme

```
> (1-cos(x))/x^a<=2/x^p;
```

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^{[0,\,-2]}} \le \frac{2}{x^p}$$

Na celém intervalu máme tedy konvergentní majorantu

```
> abs(f(x,a))<=piecewise(0<x and x<1,(1-cos(x))/(x^q),x>=1,2/x^p);
```

$$\left| \frac{1 - \cos(x)}{x^{[0,\,-2]}} \right| \le \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^q} & 0 < x \textbf{ and } x < 1 \\[2ex] \dfrac{2}{x^p} & 1 \le x \end{cases}$$

Tedy je funkce F(*a*) spojitá na každém intervalu [*p*, *q*] a tedy i na jejich sjednocení tudíž na celém definičním oboru.

Limita

Máme spočíst limitu

```
> Limit(F(a),a=3,left);
```

$$\lim_{[0,\,-2] \to 3-} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^{[0,\,-2]}}\, dx$$

Budeme tedy zkoumat chování integrálu

```
> Int((1-cos(x))/x^3,x=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^3}\, dx$$

U nuly je integrand asymptoticky roven, jak jsme byli zjistili,

```
> x^(2-a)=1/x;
```

$$x^{(2+[0,2])} = \frac{1}{x}$$

jehož integrál diverguje k ∞.

U nekonečna, jak jsme byli taktéž zjistili, jest integrand asymptoticky roven

```
> 1/x^3;
```

$$\frac{1}{x^3}$$

Jehož integrál zřejmě konverguje.

Jelikož

```
> Limit(F(a),a=3,left)=Int(Limit(f(x,a),a=3,left),x=0..infinity);
```

$$\lim_{[0,-2]\to 3-} \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{[0,-2]}}\, dx = \int_0^\infty \lim_{[0,-2]\to 3-} \frac{1-\cos(x)}{x^{[0,-2]}}\, dx$$

Diverguje námi vyšetřovaný integrál k nekonečnu.

```
> Limit(Int((1-cos(x))/(x^a),x = 0 .. infinity),a =
  3,left)=infinity;
```

$$\lim_{[0,-2]\to 3-} \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{[0,-2]}}\, dx = \infty$$