Integral s parametrem - spojitost

>

Zadání

Vyšetřete definiční obor funkce a její spojitost. Pokuste se určit hodnotu fce F(a), najděte limity v krajních bodech definičního oboru a oboru spojitosti, vyjádřete derivaci funkce:

```
> F:=a->Int((1-exp(-a*x))/(x*exp(x)),x=0..infinity);
```

$$F := a \to \int_0^\infty \frac{1 - e^{(-a\,x)}}{x\, e^x}\, dx$$

Definiční obor a konvergence

Na okolí $x = 0$ se integrand chová jako $\frac{a\,x}{x}$, kterýžto je definován pro libovolné a.

Na okolí $x = \infty$ se integrand chová jako $\frac{e^{(x\,(-a-1))}}{x}$, který konverguje pro libovolné $-a - 1 < 0$.

Máme tedy pro F(a) definiční obor (-1,∞).

Spojitost

Předně jest $f(x, a) = \frac{1 - e^{(-a\,x)}}{x\, e^x}$, spojitá dle x s.v. na intervalu (0,∞) pro vš. a z intervalu (-1,∞).

Dále jest $f(x, a)$ spojitá dle a s.v. na intervalu (-1,∞) pro s.v. x z intevalu (0,∞).

Dále hledáme fci g takovou, aby platilo:

```
> abs(f(x,a))<=g;
```

$$|f(x, a)| \le g$$

pro vš. x a a.

Rozlišíme nejprve dva případy. Pro $p < q$, pevná z intervalu (0,∞), $p < a$, $a < q$ platí:

```
> abs(f(x,a))<=(1-exp(-q*x))/(x*exp(x));
```

$$|f(x, a)| \le \frac{1 - e^{(-q\,x)}}{x\, e^x}$$

Pro $p < q$, pevná z intervalu (-1,0) platí:

```
> abs(f(x,a))<=-(1-exp(-p*x))/(x*exp(x));
```

$$|f(x, a)| \le -\frac{1 - e^{(-p\,x)}}{x\, e^x}$$

Jelikož má fce $f(x, a)$ konvergentní majorantu na každém intervalu [p,q], je na těchto intervalech fce F(a) spojitá a je spojitá i na sjednocení těchto intervalů i.e. na celém definičním oboru.

Derivace

Ježto definiční obor máme již určen a fce $f(x, a)$ je spojitá s.v. dle x pro vš. a, zajímá nás zda derivace fce $f(x, a)$ dle a má konečnou derivaci skoro všude.

Derivací integrandu podle parametru získáme funkci:

```
> Diff(f(x,a),a)=simplify(diff((1-exp(-a*x))/(x*exp(x)),a));
```

$$\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{f}(x, a) = \mathbf{e}^{(-x\,(a+1))}$$

Tato funkce je zřejmě omezená pro vš. x i vš. a. Nyní k ní najděmež vhodnou konvergentní majorantu. To zde není těžké neboť platí:

```
> exp(-x*(a+1))<=exp(-x);
```

$$\mathbf{e}^{(-x\,(a+1))} \le \mathbf{e}^{(-x)}$$

Tedy platí:

```
> Diff(F(a),a)=Int(Diff(f(x,a),a),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\int_0^{\infty} \frac{1-\mathbf{e}^{(-a\,x)}}{x\,\mathbf{e}^{x}}\,dx\right) = \int \frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{f}(x, a)\,dx$$

A v tomto konkrétním případě můžeme derivaci vyjádřiti explicitně jako:

```
> assume(a+1,positive):
> Diff(Int((1-exp(-a*x))/x/exp(x),x = 0 ..
  infinity),a)=int(exp(-x*(a+1)),x=0..infinity);
```

$$\frac{\partial}{\partial a\sim}\left(\int_0^{\infty} \frac{1-\mathbf{e}^{(-a\sim\,x)}}{x\,\mathbf{e}^{x}}\,dx\right) = \frac{1}{a\sim+1}$$

Hodnota fce a limity v krajních bodech

Nyní již snadno vyjádříme fci F(a) explicitně pomocí její derivace, což nám bylo předtím těžko učiniti. Nejprve jednoduše zintegrujeme výsledek, který jsme obdrželi před malou chvílí

```
> F(a)=int(1/(a+1),a)+c;
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\mathbf{e}^{(-a\sim\,x)}}{x\,\mathbf{e}^{x}}\,dx = \ln(a\sim+1)+c$$

a určíme konstantu c tak aby platilo:

```
> ln(a+1)+c=Int((1-exp(-a*x))/x/exp(x),x = 0 .. infinity);
```

$$\ln(a\sim+1)+c = \int_0^{\infty} \frac{1-\mathbf{e}^{(-a\sim\,x)}}{x\,\mathbf{e}^{x}}\,dx$$

Což však neznamená nic jiného nežli, že c je rovno 0, neboť po dosazení $a = 0$ do výše uvedené rovnosti dostáváme:

```
> ln(1)+c=0;
```

$$c = 0$$

Odtud také vidíme, že limity v krajních bodech definičního oboru fce F(a) jsou:

```
> Limit(F(a),a=-1)=limit(ln(a+1),a=-1);
```

$$\lim_{a\sim \to (-1)} \int_0^{\infty} \frac{1 - \mathbf{e}^{(-a\sim x)}}{x\, \mathbf{e}^{x}}\, dx = -\infty$$

```
> Limit(F(a),a=infinity)=limit(ln(a+1),a=infinity);
```

$$\lim_{a\sim \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 - \mathbf{e}^{(-a\sim x)}}{x\, \mathbf{e}^{x}}\, dx = \infty$$

```
>
```