Řešte následující diferenciální rovnici:

$$x\,(x+1)\,y' - y = x\,(x+1)\,.$$

Řešení :

Všimněme si, že jestliže $x = 0$ nebo $x = -1$, pak nutně ze zadané diferenciální rovnice plyne, že $y = 0$,
neboli $y(0) = y(-1) = 0$.

Diferenciální rovnici upravme na tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) - \frac{y}{x\,(x+1)} = 1\ .$$

Jedná se lineární diferenciální rovnici 1. řádu, takže nejdříve budeme řešit homogenní rovnici pomocí separace proměnných a pak použijeme variaci konstant pro nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

a) Homogenní rovnice

Řešíme rovnici $\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) - \frac{y}{x\,(x+1)} = 0$.

Vidíme, že $y = 0$ je stacionární řešení.

Upravme na tvar: $\frac{\frac{\partial}{\partial x} y}{y} = \frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ a použijeme separaci proměnných.

Dostáváme $\ln(|y|) = \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) + C$, kde C je libovolné reálné číslo.

Upravme $|y| = \left|\frac{x}{x+1}\right| K$, kde K je libovolné kladné reálné číslo.

Neboli, $y = \frac{K\,x}{x+1}$, kde K je libovolné nenulové reálné číslo.

Vzpomeneme si na stacionární řešení a máme řešení homogenní rovnice:

$\mathrm{y}(x) = \frac{K\,x}{x+1}$, kde K je libovolné reálné číslo.

b) Variace konstant

Řešení původní rovnice hledáme ve tvaru $\mathrm{y}(x) = \frac{\mathrm{K}(x)\,x}{x+1}$, kde je K(x) je neznámá funkce.

Dosadíme do rovnice $\mathrm{y}(x) = \frac{\mathrm{K}(x)\,x}{x+1}$, její derivaci $\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x) = \frac{x\left(\frac{d}{dx}\mathrm{K}(x)\right)}{x+1} + \frac{\mathrm{K}(x)}{(x+1)^2}$

a upravíme na tvar: $\frac{d}{dx}\mathrm{K}(x) = \frac{x+1}{x}$.

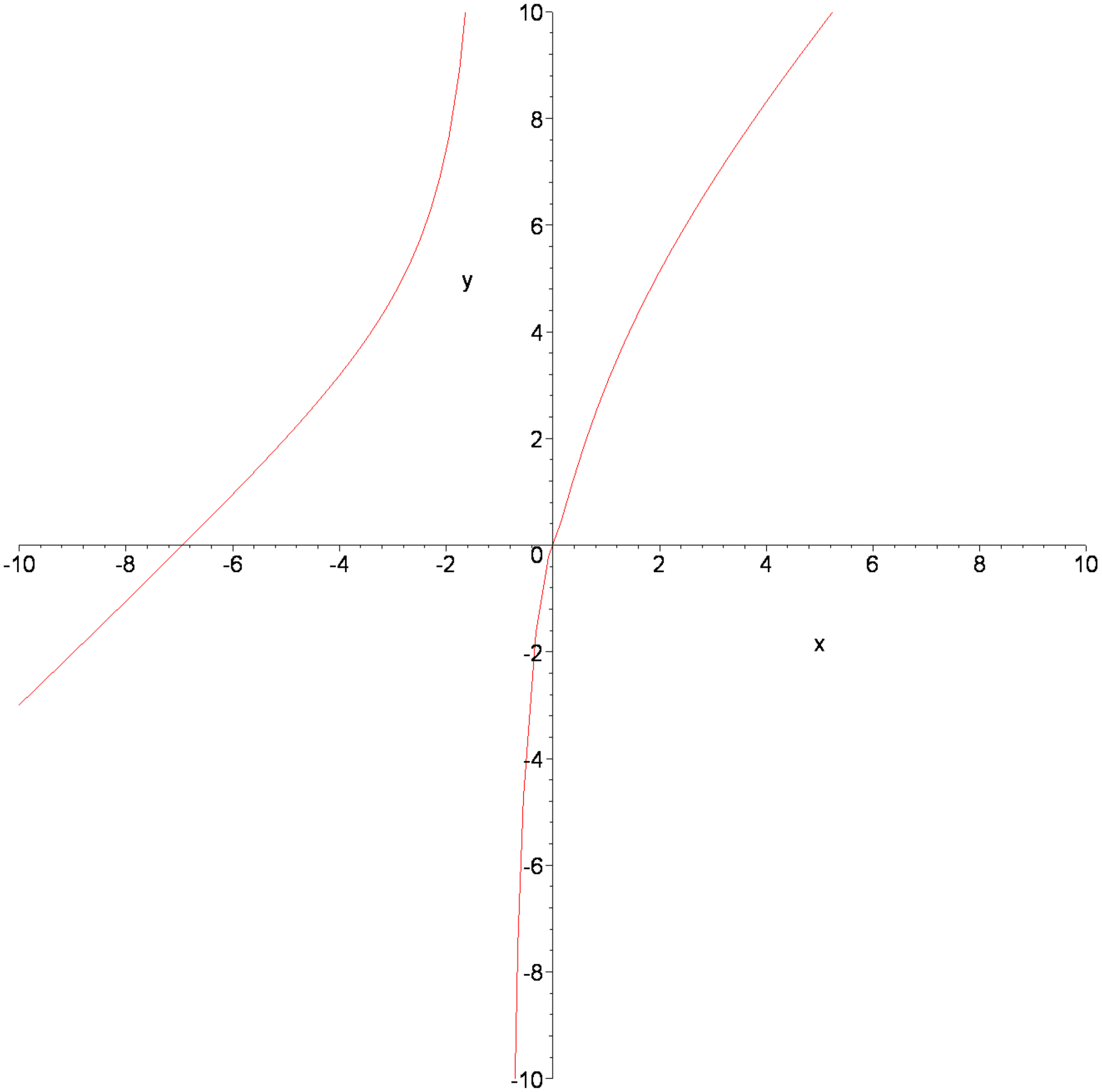
Odtud snadno spočteme, že $\mathrm{K}(x) = x + \ln(|x|)$

Řešení původní diferenciální rovnice je tedy

$y(x) = \frac{K\,x}{x+1} + \frac{(x + \ln(|x|))\,x}{x+1}$, kde K je libovolné reálné číslo.

Nakresleme si graf tohoto řešení třeba pro $K = 5$:

```
> K:=5:
> y:=x->K*x/(x+1)+(x+ln(abs(x)))*x/(x+1):
> plot(y(x),x=-10..10,y=-10..10,discont=true);
```



Podívejme se nyní, nejde-li námi nalezené řešení v bodě 0 nebo -1 dodefinovat.
To by šlo tehdy, kdyby byla nultá a první derivace konečná a spojitá v bodech 0 nebo

-1 .

Navíc, dodefinovali bychom hodnotami $y(0) = 0$ či $y(-1) = 0$ (viz poznámka na začátku řešení).

Spočteme limity v 0 pomocí Maple:

```
> K:='K':assume(K,real); #předpokládejme, že K je reálné
> Limit(y(x),x=0,left)=limit(y(x),x=0,left);
> Limit(y(x),x=0,right)=limit(y(x),x=0,right);
> dydx:=D(y): #definujme funkci dydx jako derivaci y podle x
> Limit(dydx(x),x = 0,left) = limit(dydx(x),x = 0,left);
> Limit(dydx(x),x = 0,right) = limit(dydx(x),x = 0,right);
```

$$\lim_{x \to 0-} \frac{K\sim x}{x+1} + \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{K\sim x}{x+1} + \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{K\sim}{x+1} - \frac{K\sim x}{(x+1)^2} + \frac{\left(1+\frac{\operatorname{abs}(1,x)}{|x|}\right)x}{x+1} + \frac{x+\ln(|x|)}{x+1} - \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{K\sim}{x+1} - \frac{K\sim x}{(x+1)^2} + \frac{\left(1+\frac{\operatorname{abs}(1,x)}{|x|}\right)x}{x+1} + \frac{x+\ln(|x|)}{x+1} - \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{(x+1)^2} = -\infty$$

Vidíme, že limita derivací je rovna $-\infty$, nebudeme tedy v 0 dodefinovávat.

Podívejme se na bod -1 :

```
> Limit(y(x),x=-1,left)=limit(y(x),x=-1,left);
> Limit(y(x),x=-1,right)=limit(y(x),x=-1,right);
> Limit(dydx(x),x = -1,left) = limit(dydx(x),x = -1,left);
> Limit(dydx(x),x = -1,right) = limit(dydx(x),x = -1,right);
```

$$\lim_{x \to (-1)-} \frac{K\sim x}{x+1} + \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{x+1} = \operatorname{signum}(K\sim -1)\,\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)+} \frac{K\sim x}{x+1} + \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{x+1} = -\operatorname{signum}(K\sim -1)\,\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)-} \frac{K\sim}{x+1} - \frac{K\sim x}{(x+1)^2} + \frac{\left(1+\frac{\operatorname{abs}(1,x)}{|x|}\right)x}{x+1} + \frac{x+\ln(|x|)}{x+1} - \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{(x+1)^2} = \operatorname{signum}(K\sim -1)\,\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)+} \frac{K\sim}{x+1} - \frac{K\sim x}{(x+1)^2} + \frac{\left(1+\frac{\operatorname{abs}(1,x)}{|x|}\right)x}{x+1} + \frac{x+\ln(|x|)}{x+1} - \frac{(x+\ln(|x|))\,x}{(x+1)^2} = \operatorname{signum}(K\sim -1)\,\infty$$

Vidíme tedy, že pro $K \neq 1$ je limita $y(x)$ nekonečná, nebudeme teda dodefinovávat.

Pro $K = 1$:

```
> K := 1:
> Limit(y(x),x=-1,left)=limit(y(x),x=-1,left);
> Limit(y(x),x=-1,right)=limit(y(x),x=-1,right);
> Limit(dydx(x),x = -1,left) = limit(dydx(x),x = -1,left);
> Limit(dydx(x),x = -1,right) = limit(dydx(x),x = -1,right);
```

$$\lim_{x \to (-1)-} \frac{x}{x+1} + \frac{(x + \ln(|x|))\, x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to (-1)+} \frac{x}{x+1} + \frac{(x + \ln(|x|))\, x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to (-1)-} \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{abs}(1, x)}{|x|}\right) x}{x+1} + \frac{x + \ln(|x|)}{x+1} - \frac{(x + \ln(|x|))\, x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to (-1)+} \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{abs}(1, x)}{|x|}\right) x}{x+1} + \frac{x + \ln(|x|)}{x+1} - \frac{(x + \ln(|x|))\, x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

Tedy pro $K = 1$ můžeme dodefinovat $y(-1) := 0$.

Maple taky umí řešit diferenciální rovnice sám:

```
> y:='y':
> dif_rce := x*(x+1)*D(y)(x)-y(x)=x*(x+1): #zadání dif. rce
> dsolve(dif_rce,y(x)); #řešení dif. rce
```

$$y(x) = \frac{(\ln(x) + x + \_C1)\, x}{x+1}$$

Tohle je řešení spočtené Maplem. Ona konstanta $\_C1$ znamená libovolné reálné číslo. Dostali jsme tedy výsledek, který je intervalu $(0, \infty)$ stejný jako výsledek spočítaný 'ručně'.

```
>
>
```