>
>

Obyčejné diferenciální rovnice - ODR v reálném oboru

vyhledal a vyřešil
Rudolf Franěk, rfra7138@orion.karlin.mff.cuni.cz

ODR - několik definic a vět potřebných pro úspěšné překonání záludnosti diferenciálních rovnic

Věta o existenci a jednoznačnosti

Uvažujme obecně nelineární diferenciální rovnici x´ = f(t,x) , kde f je daná spojitá funkce proměnných "t" a "x" definovaná na otevřené množině G $\subset R^2$; x je neznámá funkce proměnné t a x´značí první derivaci x podle t.

Definice:
Říkáme, že funkce g je řešením rovnice x´=f(t,x) v intervalu (a,b), jestliže pro každé t $\in$ (a,b) je (t, g(t)) $\in$ G $\subset R^2$, g má spojitou derivaci g´ a pro každé t $\in$ (a,b) platí g´(t) = f(t, g(t)).
Definice:
Budiž dána funkce f definovaná ve všech bodech t,x množiny A. Říkáme, že f splňuje v A Lipschitzovu podmínku vzhledem k x, existuje-li konstanta L > 0 taková, že platí : {(t, x_1) $\in$ A, (t, x_2) $\in$ A} $\Rightarrow$ $|\mathrm{f}(t, x_1) - \mathrm{f}(t, x_2)| \le L\,|x_2 - x_1|$
Poznámka:
Rovnice x´ = f(t,x) spolu s počáteční podmínkou g(t_0) = x_0 , kde (t_0, x_0) $\in$ G (dle definice 1.1), se nazývá tzv. Cauchyova úloha.
Věta :
Nechť funkce f je v intervalu Q: $|t - t_0| \le a,\ |x - x_0| \le b,\ 0 < a,\ 0 < b$ spojitá (a tedy omezená: $\exists$ $0 < M$ tak, že $|\mathrm{f}(t, x)| \le M$, (t,x)$\in$Q) a splňuje v Q Lipschitzovu podmnínku vzhledem k x s konstantou L. Položme k = $\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Potom platí:

1.Existuje řešení g rovnice x´ = f(t,x v intervalu <$t_0 - h, t_0 + h$>, pro které je $\mathrm{g}(t_0) = x_0$. Graf řešení g pro t $\in$ <$t_0 - h, t_0 + h$> leží v Q.
2. Toto řešení je jedinné v následujícím smyslu: Je-li h řešením rovnice x´ = f(t,x) v intervalu <a,b>, kde $t_0 - h \le a,\ a \le t_0,\ t_0 \le b,\ b \le t_0 + h$ a je-li $\mathrm{h}(t_0) = x_0$ je h(t) = g(t) v <a,b>.

Globální věta o existenci a jednoznačnosti

Věta :
Buď funkce f definovaná a spojitá na otevřené množině G $\subset R^2$ a nechť tam splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku. Buď (t_0, x_0) $\in$ G a buď x řešení rovnice x´ = f(t,x) splňující podmínku $\mathrm{x}(t_0) = x_0$ definované na intervalu <$t_0 - h, t_0 + h$>. Označme A = inf { α | α< t_0 a existuje řešení x rovnice x´ = f(t,x) v (α,t_0>, (t, x(t)) $\in$ G, t $\in$ (α,t_0>, $\mathrm{x}(t_0) = x_0$ }, B = sup { β | β< t_0 a existuje řešení y rovnice x´ = f(t,x) v (t_0,β> (t, x(t)) $\in$ G, t $\in$ (t_0,β>, $\mathrm{y}(t_0) = x_0$ }
Potom existuje existuje jedinné řešení rovnice x´ = f(t,x) v intervalu (A,B) ležící v G a

nabývající hodnoty x_0 v bodě t_0.

Obecné řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Maximální řešení diferenciální rovnice je takové řešení, které je je definované na celém definičním oboru této rovnice

Obecné řešení rovnice x´ + a(t)*x = b(t) je rovno součtu maximálního řešení této rovnice a obecného řešení homogenní rovnice x´ + a(t)*y = 0.

Diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnice, které mají tu výhodu, že k nalezení jejich řešení stačí algebraické operace. Tyto rovnice mají tvar $q(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r \, (D^{(r)})(y(x))$, q(t) je obečně nějaká komplexní funkce - jedná-li se o rovnici nehomogenní, q(t)=0 pro rovnice homogenní.

Dosadíme-li do rovnice za y(x)´ funkci $\mathbf{e}^{(\lambda x)}$, vznikne nám jiný polynom

$$F(\lambda) = \sum_{r=0}^{n} a_r \lambda^{(n-r)}$$

Definice:

Polynom $F(\lambda) = \sum_{r=0}^{n} a_r \lambda^{(n-r)}$ nazýváme chrakteristickým polynomem příslušné diferenciální rovnice $q(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r \, (D^{(r)})(y(x))$.

Tvrzení:

Funkce $\mathbf{e}^{(\lambda x)}$ je řešením rovnice $0 = \sum_{r=0}^{n} a_r \, (D^{(r)})(y(x))$ právě když λ je kořenem chrakteristického polynomu.

Definice některých důležitých pojmů pro řešení diferenciálních rovnic n-tého řádu

Definice:

Nehť funkce $f_1, f_2 .. f_k$, $1 \le k$ jsou obecně komplexní funkce definované na intervallu (a,b). Existují-li komplexní čísla $c_1, c_2 .. c_k$ taková, že $c_1 f_1 + c_2 f_2 .. c_k f_k = 0$ pro všechna x z (a,b), kde aspoň jedno z čísel $c_1, c_2 .. c_k$ je různé od nuly, říkáme, že funkce $f_1, f_2 .. f_k$ jsou lineárně závislé, v případě, že platí $c_j = 0$ pro všechna $j \le k$, $1 \le j$, pak jsou $f_1, f_2 .. f_k$ lineárně nezávislé.

Definice:

Buď $f_1, f_2 .. f_k$ systém funkcí v (a,b) takový, že existují derivace $(D^{(j)})(f_i(x))$, kde i = 1,2....,k, j = 0,1,...,k-1 pro všechna x ∊ (a,b). Determinant definovaný následujícím vzorcem nazýváme Wronského determinant, nebo také Wronskián v bodě x.

```
> W[f[1]..f[n]](x)=Det([f[1](x),f[2](x)..f[k](x)]..[`@@`(D,k
  -1)(f[1](x)),`@@`(D,k-1)(f[2](x))..`@@`(D,k-1)(f[n](x))]);
```

$$W_{f_1 .. f_n}(x) = \mathrm{Det}([\sin(x)+\cos(x), \sin(x)+\cos(x) .. \sin(x)+\cos(x)] .. [D_{1\,\$\,(k-1)}(\sin(x)) + D_{1\,\$\,(k-1)}(\cos(x)), D_{1\,\$\,(k-1)}(\sin(x)) + D_{1\,\$\,(k-1)}(\cos(x)) .. D_{1\,\$\,(k-1)}(\sin(x)) + D_{1\,\$\,(k-1)}(\cos(x))])$$

Hranaté závorky značí řádek matice.

Věta:

Nechť funkce $y_1, y_2 .. y_n$ jsou řešení rovnice n-tého řádu v intervalu (a,b) pak Wronskián $W_{y_1 .. y_n}(x)$ je buď roven nule všude v (a,b), nebo je naopak všude od nuly různý.

Definince:

Množinu n lineárně nezávislých řešení v (a,b) homogenní diferenciální rovnice n-tého řádu nazýváme fundamentálním systémem této rovnice.

Poznámka:

Fundamentální systém je určen pro každou rovnici jednoznačně.

Diferenciální rovnice n-tého řádu - metoda variace konstant

Nechť známe fundamentální systém dané rovnice a víme, že funkce $y_i(x)$ mají spojitou první derivaci a $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x)$ je partikulární řešení této diferenciální rovnice.

Definice:

Označme $W_{k, x_1, x_2 .. x_n}(x)$ pro k=1...n determinant, ketrý dostaneme z Wronskiánu $W_{x_1, x_2 .. x_n}(x)$ tak, že položíme $v_k^{\_i} = 0$ pro i = 0, 1..., n-2 a $v_k^{(n-1)} = 1$. Pro jednotlivé složky řešení soustavy tak dostaneme ? (kde q(x) je pravá strana původní rovnice).

Z toho snadno vyjádříme $c_k(x) = K_k + \int q(x) \frac{W_{k, x_1, x_2 .. x_n}(x)}{W_{x_1, x_2 .. x_n}(x)}\, dx$ kde k=1...n.

Řešení rovnice pak obdržíme takto: $\sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int q(x) \frac{W_{k, x_1, x_2 .. x_n}(x)}{W_{x_1, x_2 .. x_n}(x)}\, dx$.

Diferenciální rovnice n-tého řádu - Eulerovy rovnice

Eulerovy rovnice jsou rovnice typu L(x) = $a_0\, x^n\, (D^{(n)})(y(x))$ +...+ $a_{n-1}\, x\, D(y(x)) + a_n\, y(x)$, kde a_i , i=1..n jsou komplexní čísla

Příklady různých druhů ODR

Elemmentární případy diferenciálních rovnic, lineární diferenciální rovnice prvního řádu

mějme rovnici tvaru y´ = h(t), kde h je spojitá v intervalu (a,b)

```
> diff(y(t),t)=2*t;
```

$$\frac{d}{dt}\,y(t) = 2\,t$$

```
> y(t):=int(2*t,t)+c;
```

$$y(t) := t^2 + c$$

kde c je nějaká konstanta

*Mějme rovnici tvaru y´ = k(y(x))*l(x), kde "k" a "l" jsou dané spojité funkce*

Poznámka:

Rovnici tvaru y´ = k(y(x))*l(x) lze poměrně snadno vyřešit následující úpravou

```
> int(diff(y(x),x)/k(y(x)),x)=int(l(x),x);
```

$$\int \frac{\frac{d}{dx}\,y(x)}{k(y(x))}\,dx = \int l(x)\,dx$$

Příklad první

Zadání

```
> diff(y(x),x)=3*y(x)^(2/3)*x;
```

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = 3\,y(x)^{(2/3)}\,x$$

Výpočet

provedeme integrační část

```
> int((diff(y(x),x))/(3*y(x)^(2/3)),x)=int(x,x)+c;
```

$$y(x)^{(1/3)} = \frac{x^2}{2} + c$$

c je nějaká konstanta, c ∈ **R**

```
> y(x)=(1/2*x^2+c)^3;
```

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)^3$$

Toto je maximální řešení na **R**, leč ne jedinné. Jiné maximální řešení je například y(x):=0, ale také

```
> y1(x):=(x+K)^3,x<-K;
```

$$y1(x) := (x+K)^3,\ x < -K$$

```
> y1(x):=0, -K < x, x < K ;
```

$$y1(x) := 0,\ -K < x,\ x < K$$

```
> y1(x):=(x-K)^3,x>K;
```

$$y1(x) := (x-K)^3,\ K < x$$

A jak by to dělal Maple sám ?

```
> dsolve(diff(y(x),x)=3*y(x)^(2/3)*x,y(x));
```

$$y(x)^{(1/3)} - \frac{x^2}{2} - \_C1 = 0$$

Z čehož je patrné, že nám vyšel stejný výsledek, jako v předchozím psotupu

Příklad druhý

Zadání

```
> diff(y(x),x)=1+y(x)^2;
```

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = 1 + y(x)^2$$

```
> diff(y(x),x)*1/(1+y(x)^2)=1;
```

$$\frac{\frac{d}{dx}\,y(x)}{1 + y(x)^2} = 1$$

```
> int(diff(y(x),x)*1/(1+y(x)^2),x)=x+c;
```

$$\arctan(y(x)) = x + c$$

```
> y(x)=tan(x+c);
```

$$y(x) = \tan(x + c)$$

A jak by to dělal Maple

```
> dsolve(diff(y(x),x)=1+y(x)^2, y(x));
```

$$y(x) = \tan(x + \_C1)$$

Řešení rovnice založené na uhodnutí všech funkcí fundammentálního systému, nebo na zvláštních úpravách

Příklad první - založení na uhodnutí všech funkcí fundamentálního systému

Zadání

```
> `@@`(D,2)(y(x))-(x/(x-1))*D(y(x))+y(x)*(1/(x-1))=0;
```

$$(D^{(2)})(y(x)) - \frac{x\,D(y(x))}{x-1} + \frac{y(x)}{x-1} = 0$$

jako y1 si zvolíme funkci, která má y1´´=0, například y1 = x a zkusíme dosadit

```
> y1(x):=x;`@@`(D,2)(y1(x))-(x/(x-1))*D(y1(x))+y1(x)*(1
  /(x-1));
```

$$y1(x) := x$$

$$(D^{(2)})(x) - \frac{x\,D(x)}{x-1} + \frac{x}{x-1}$$

```
> simplify(`@@`(D,2)(y1(x))-(x/(x-1))*D(y1(x))+y1(x)*(1
  /(x-1)));
```

$$\frac{(D^{(2)})(x)\,x - (D^{(2)})(x) - x\,D(x) + x}{x-1}$$

Tento výraz je již evidentně roven nule, y1 je tedy jedno maximální řešení.

Jako y2 si zvolme například exp(x), derivace y2 nemění - lze tak vytknout exp(x) z rovnice na levé straně

```
> exp(x)*(1-(x/(x-1))+(1/(x-1)))=0;
```

$$\mathbf{e}^x\left(1-\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)=0$$

```
> simplify(exp(x)*(1-(x/(x-1))+(1/(x-1)))=0);
```

$$0=0$$

Tedy i y2 je maximálním řešením této rovnice.
Lze si dále všimnout, že x a exp(x) jsou funkce lineárně nezávislé. Tvoří tedy fundamentální systém této rovnice.
Celkové řešení lze tedy zapsat ve tvaru

```
> y(x):=c1*x+c2*exp(x);
```

$$\mathrm{y}(x):=c1\,x+c2\,\mathbf{e}^x$$

kde c1 a c2 jsou nějaké konstanty

Máme-li dány nějaké počáteční podmínky: například

```
> y(0):=x[0];
```

$$\mathrm{y}(0):=x_0$$

pak lze poměrně snadno dopočítat

```
> c1:=D(x[0])-x[0];c2:=x[0];
```

$$c1:=\mathrm{D}(x_0)-x_0$$

$$c2:=x_0$$

```
> y:='y';
```

$$y:=y$$

"Maple řešení"

```
> dsolve( diff(y(x),x,x) - (x/(x-1))*diff(y(x),x) +
  y(x)*(1/(x-1)) = 0);
```

$$\mathrm{y}(x)=\_C1\,x+\_C2\,\mathbf{e}^x$$

```
>
```

Řešení se tedy shodují

Příklad druhý

Zadání

```
> D(y(x))-y(x)*tan(x)=exp(x);
```

$$\mathrm{D}(\mathrm{y}(x))-\mathrm{y}(x)\tan(x)=\mathbf{e}^x$$

Celou rovnici vynásobím cos(x), cos(x) je různé od nuly - dle zadání

```
> D(y(x))*cos(x)-y(x)*sin(x)=exp(x)*cos(x);
```

$$\mathrm{D}(\mathrm{y}(x))\cos(x)-\mathrm{y}(x)\sin(x)=\mathbf{e}^x\cos(x)$$

```
> D(y(x))*cos(x)-y(x)*sin(x)=D(y(x)*cos(x));
```

$$\mathrm{D}(\mathrm{y}(x))\cos(x)-\mathrm{y}(x)\sin(x)=\mathrm{D}(\mathrm{y}(x))\cos(x)+\mathrm{y}(x)\,\mathrm{D}(\cos(x))$$

```
> exp(x)*cos(x)=D(y(x)*cos(x));
```

$$\mathbf{e}^x\cos(x)=\mathrm{D}(\mathrm{y}(x))\cos(x)+\mathrm{y}(x)\,\mathrm{D}(\cos(x))$$

```
> y(x)=(int(exp(x)*cos(x),x)+c)/cos(x);
```

$$\mathrm{y}(x)=\frac{\frac{1}{2}\mathbf{e}^x\cos(x)+\frac{1}{2}\mathbf{e}^x\sin(x)+c}{\cos(x)}$$

```
> y(x)=1/2*exp(x)*(1+tan(x))+c/cos(x);
```

$$y(x) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^{x} (1 + \tan(x)) + \frac{c}{\cos(x)}$$

Tyto funkce jsou řešením na intervalech $\{-\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi\}$, k ∈ Z

```
Error, `}` unexpected
```

Řrešení po Mapleovsku

```
> dsolve(diff(y(x),x)-y(x)*tan(x)=exp(x),y(x));
```

$$y(x) = \frac{\_C1}{\cos(x)} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}^{x} (\cos(x) + \sin(x))}{\cos(x)}$$

Obě řešení se tedy shodují

Příklad třetí

Zadání

```
> D(y(x))=-sqrt(1-y(x)^2);
```

$$D(y(x)) = -\sqrt{1 - y(x)^2}$$

Tento výraz lze upravit následujícím způsobem:

```
> -D(y(x))/sqrt(1-y(x)^2)=1;
```

$$-\frac{D(y(x))}{\sqrt{1 - y(x)^2}} = 1$$

Snadno lze nahlédnout, že

```
> -D(y(x))/sqrt(1-y(x)^2)=D(arccos(y(x)));
```

$$-\frac{D(y(x))}{\sqrt{1 - y(x)^2}} = D(\arccos(y(x)))$$

Dosadíme-li do předchozí úpravy rovnice:

```
> D(arccos(y(x)))=1;
```

$$D(\arccos(y(x))) = 1$$

```
> arccos(y(x))=x+c;
```

$$\arccos(y(x)) = x + c$$

```
> y(x)=cos(x+c);
```

$$y(x) = \cos(x + c)$$

Kde x ∈ (-c,-c+π)

```
>
>
>
Warning, premature end of input
>
```

Maple řešení

```
> dsolve(diff(y(x),x)=-sqrt(1-y(x)^2),y(x));
```

$$y(x) = -\sin(x + \_C1)$$

```
> dsolve(diff(y(x),x)=-sqrt(1-y(x)^2),y(x))=x-arccos(y(
  x));
```

$$(y(x) = -\sin(x + \_C1)) = x - \arccos(y(x))$$

Konečné výsledky se tedy shodují

Příklad čtvrtý

Zadání

```
> D(y(x))+y(x)*cotg(x)=exp(-x);
```

$$D(y(x)) + y(x)\,\mathrm{cotg}(x) = \mathbf{e}^{(-x)}$$

Celou rovnici vynásobím sin(x)

```
> D(y(x))*sin(x)+y(x)*cos(x)=exp(-x)*sin(x);
```

$$D(y(x))\sin(x) + y(x)\cos(x) = \mathbf{e}^{(-x)}\sin(x)$$

```
> D(y(x))*sin(x)+y(x)*cos(x)=D(y(x)*sin(x));
```

$$D(y(x))\sin(x) + y(x)\cos(x) = D(y(x))\sin(x) + y(x)\,D(\sin(x))$$

```
> D(y(x)*sin(x))=exp(-x)*sin(x);
```

$$D(y(x))\sin(x) + y(x)\,D(\sin(x)) = \mathbf{e}^{(-x)}\sin(x)$$

Nyní provedeme integrační část

```
> y(x)*sin(x)=int(exp(-x)*sin(x),x)+c;
```

$$y(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-x)}\cos(x) - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-x)}\sin(x) + c$$

Následně vzjádříme y(x)

```
> y(x)=-1/2*exp(-x)*(1+cotg(x))+c/sin(x);
```

$$y(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-x)}(1 + \mathrm{cotg}(x)) + \frac{c}{\sin(x)}$$

kde c ∈ R a x ∈ (kπ,(k+1)π), k ∈ Z

```
Error, missing operator or `;`
```

A Maple ?

```
> dsolve(diff(y(x),x)+y(x)*(cos(x)/sin(x))=exp(-x),y(x)
  );
```

$$y(x) = \frac{\_C1}{\sin(x)} - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{e}^{(-x)}(\cos(x) + \sin(x))}{\sin(x)}$$

Což se shoduje s výše uvedeným řešením

Riccatiova rovnice

Jedná se o rovnici typu

```
> diff(y(x),x)=P(x)*y(x)^2+Q(x)*y(x)+R(x);
```

$$\frac{d}{dx}y(x) = P(x)\,y(x)^2 + Q(x)\,y(x) + R(x)$$

Kde P,Q,R jsou spojité funkce v intervalu (a,b)

```
>
```

Zadání příkladu

```
> diff(y(x),x)=x*y(x)^2+x^2*y(x)-2*x^3+1;
```

$$\frac{d}{dx}y(x) = x\,y(x)^2 + x^2\,y(x) - 2\,x^3 + 1$$

Je patrné, že jedním z řešení této rovnice je "x", použijme pomocnou funkci g(x), g(x)<>0

```
> y(x)=x+1/(g(x));
```

$$y(x) = x + \frac{1}{g(x)}$$

```
>
> x*(x+1/g(x))^2+x^2*(x+1/g(x))-2*x^3+1;
```

$$x\left(x+\frac{1}{g(x)}\right)^2 + x^2\left(x+\frac{1}{g(x)}\right) - 2\,x^3 + 1$$

```
> simplify(x*(x+1/g(x))^2+x^2*(x+1/g(x))-2*x^3+1)=diff(x+
1/g(x),x);
```

$$\frac{3\,x^2\,g(x) + x + g(x)^2}{g(x)^2} = 1 - \frac{\frac{d}{dx}\,g(x)}{g(x)^2}$$

```
> diff(g(x),x)+3*x^2*g(x)=-x;
```

$$\left(\frac{d}{dx}\,g(x)\right) + 3\,x^2\,g(x) = -x$$

```
> dsolve(diff(g(x),x)+3*x^2*g(x)=-x,g(x));
```

$$g(x) = e^{(-x^3)}\,\_C1 - \frac{1}{3}\,\frac{x^2\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}, -x^3\right)\right)e^{(-x^3)}}{(-x^3)^{(2/3)}}$$

A konečně tedy:

```
> y(x)=x+exp(x^3)/((-int(exp(x^3)*x,x)+_C1));
```

$$y(x) = x + \frac{e^{(x^3)}}{\frac{1}{3}\,(-1)^{(1/3)}\left(\frac{x^2\,(-1)^{(2/3)}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{(-x^3)^{(2/3)}} - \frac{x^2\,(-1)^{(2/3)}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}, -x^3\right)}{(-x^3)^{(2/3)}}\right) + \_C1}$$

Maple :

```
> dsolve(diff(y(x),x)=x*y(x)^2+x^2*y(x)-2*x^3+1,y(x));
```

$$y(x) = \frac{3\,\_C1\,x\,e^{(x^3)}}{(-x^3)^{(1/3)}\left(\_C1\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \_C1\,\Gamma\left(\frac{2}{3}, -x^3\right) + 1\right)} + \frac{x\left((-x^3)^{(1/3)} + \_C1\,(-x^3)^{(1/3)}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \_C1\,(-x^3)^{(1/3)}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}, -x^3\right)\right)}{(-x^3)^{(1/3)}\left(\_C1\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \_C1\,\Gamma\left(\frac{2}{3}, -x^3\right) + 1\right)}$$

Metoda transformace proměnných

Zadání

```
> diff(y(x),x)=(y(x)+x)^2;
```

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = (y(x) + x)^2$$

Provedeme transformaci:

```
> y(x)=g(x)-x;
```

$$y(x) = g(x) - x$$

```
> diff(y(x),x)=diff(g(x)-x,x);
```

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = \left(\frac{d}{dx}\,g(x)\right) - 1$$

```
> diff(g(x),x)=(y(x)+x)^2+1;
```

$$\frac{d}{dx}\,g(x) = (y(x) + x)^2 + 1$$

```
> diff(g(x),x)=g(x)^2+1;
```

$$\frac{d}{dx}\,g(x) = g(x)^2 + 1$$

Je patrné, že jsme původní úlohu převedli velmi jednoduše řešitelný tvar:

```
> dsolve(diff(g(x),x)=g(x)^2+1,g(x));
```

$$g(x) = \tan(x + \_C1)$$

```
> g(x)=tan(x+c);
```

$$g(x) = \tan(x + c)$$

```
> y(x)=g(x)-x;
```

$$y(x) = g(x) - x$$

```
> y(x)=tan(x+c)-x;
```

$$y(x) = \tan(x + c) - x$$

x ∈ R

Což je řešení

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Homogenní

Zadání

v (-1,1) řešte:

```
> diff(y(x),x)=y(x)/sqrt(1-x^2);
```

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = \frac{y(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Funkce 1/sqrt(1-x^2) je spojitá na intervalu (-1,1) takž i maximální řešení rovnice je definováno na tomto intervalu

```
> diff(y(x),x)/y(x)=1/sqrt(1-x^2);
```

$$\frac{\frac{d}{dx}\,y(x)}{y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

```
> ln(y(x))=int((1/sqrt(1-x^2)),x)+c;
```

$$\ln(y(x)) = \arcsin(x) + c$$

```
> y(x)=exp(arcsin(x)+c);
```

$$y(x) = \mathbf{e}^{(\arcsin(x) + c)}$$

```
>
```

Nehomogenní

Zadání

Máme rovnici v obecném tvaru

```
> diff(y(x),x)=h(x)*y(x)+ch(x);
```

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \mathrm{h}(x)\,\mathrm{y}(x) + \mathrm{ch}(x)$$

h a ch jsou spojité funkce v (a,b), existuje-li v (a,b) alespoň jedno x, tak, že $\mathrm{ch}(x) \neq 0$, pak nazýváme rovnici nehomogenní.

```
>
>
Warning, premature end of input
```

Zadání

```
> diff(y(x),x)=(-1/x)*y(x)+3*x;
```

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = -\frac{\mathrm{y}(x)}{x} + 3\,x$$

```
> ch(x)=3*x;
```

$$\mathrm{ch}(x) = 3\,x$$

```
> h(x)=-1/x;
```

$$\mathrm{h}(x) = -\frac{1}{x}$$

Nejprve spočítáme fundamentální funkci:

```
> XX(x)=exp(int(h(x),x));
```

$$\mathrm{XX}(x) = \mathbf{e}^{\left(\int \mathrm{h}(x)\,dx\right)}$$

```
> XX=exp(int(-1/x,x))*c1;
```

$$XX = \frac{\mathrm{D}(x_0) - x_0}{x}$$

kde c1 i c je nějaká nenulová konstanta

```
> y(x)=c/x+1/x*int(3*x^2,x);
```

$$\mathrm{y}(x) = \frac{c}{x} + x^2$$

```
>
```

Maple:

```
> dsolve(diff(y(x),x)=(-1/x)*y(x)+3*x,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \frac{x^3 + \_C1}{x}$$

Rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Rovnice tvaru $\sum_{r=0}^{n} a_r\,(\mathrm{D}^{(r)})(\mathrm{y}(x)) = \mathrm{L}(\mathrm{y}(x))$

Homogenní rovnice

Příklad první

Zadání

```
> `@@`(D,3)(y(x))-`@@`(D,2)(y(x))-4*D(y(x))+4*y(x)=0;
```

$$(D^{(3)})(y(x)) - (D^{(2)})(y(x)) - 4\,D(y(x)) + 4\,y(x) = 0$$

Charakteristická rovnice vypadá následujícím způsobem

```
> diff(diff(diff(exp(l*x),x),x),x)-diff(diff(exp(l*x),x),x)-4*diff(exp(l*x),x)+4*exp(l*x)=0;
>
```

$$l^3\,\mathbf{e}^{(l\,x)} - l^2\,\mathbf{e}^{(l\,x)} - 4\,l\,\mathbf{e}^{(l\,x)} + 4\,\mathbf{e}^{(l\,x)} = 0$$

```
> exp(l*x)<>0;
```

$$\mathbf{e}^{(l\,x)} \neq 0$$

```
> (diff(diff(diff(exp(l*x),x),x),x)/exp(l*x)-diff(diff(exp(l*x),x),x)/exp(l*x)-4*diff(exp(l*x),x)/exp(l*x)+4*exp(l*x)/exp(l*x))=0;
```

$$l^3 - l^2 - 4\,l + 4 = 0$$

```
> l[1,2,3]=solve(l^3-l^2-4*l+4 = 0);
```

$$l_{1,\,2,\,3} = (1, 2, -2)$$

```
>
> y(x)=c1*exp(1*x)+c2*exp(2*x)+c3*exp(-2*x);
```

$$y(x) = (D(x_0) - x_0)\,\mathbf{e}^x + x_0\,\mathbf{e}^{(2\,x)} + c3\,\mathbf{e}^{(-2\,x)}$$

```
>
```

A Maple ?

```
> dsolve(diff(diff(diff(y(x),x),x),x)-diff(diff(y(x),x),x)-4*diff(y(x),x)+4*y(x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{(-2\,x)} + \_C2\,\mathbf{e}^{(2\,x)} + \_C3\,\mathbf{e}^x$$

$x \in R$

Příklad druhý

Zadání

```
> `@@`(D,15)(y(x))+2*(`@@`(D,12)(y(x)))-`@@`(D,11)(y(x))+`@@`(D,9)(y(x))-2*(`@@`(D,8)(y(x)))-`@@`(D,5)(y(x))=0;
```

$$(D^{(15)})(y(x)) + 2\,(D^{(12)})(y(x)) - (D^{(11)})(y(x)) + (D^{(9)})(y(x)) - 2\,(D^{(8)})(y(x)) - (D^{(5)})(y(x)) = 0$$

Nyní snadno sestavíme charakteristický polynom

```
> l^15+2*l^12-l^11+l^9-2*l^8-l^5=0;
```

$$l^{15} + 2\,l^{12} - l^{11} + l^9 - 2\,l^8 - l^5 = 0$$

```
> l[1..15]=solve(l^15+2*l^12-l^11+l^9-2*l^8-l^5=0);
```

$$l_{1\,..\,15} = \Big($$

$$0, 0, 0, 0, 0, 1, I, -I, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} I\sqrt{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2} I\sqrt{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} I\sqrt{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2} I\sqrt{3}, -1, -1, -1\Big)$$

>

```
> y(x)=c1*exp(0)+c2*x*exp(0)+c3*(x^2)*exp(0)+c4*(x^3)*exp(0)+c5*(x^4)*exp(0)+c6*sin(x)+c7*cos(x)+c8*exp(-x)+c9*x*exp(-x)+c10*(x^2)*exp(-x)+c11*exp(x)+c12*exp((1/2)*x)*cos(sqrt(3)*x/2)+c13*x*exp((1/2)*x)*cos(sqrt(3)*x/2)+c14*exp((1/2)*x)*sin(sqrt(3)*x/2)+c15*x*exp((1/2)*x)*sin(sqrt(3)*x/2);
```

$$y(x) = D(x_0) - x_0 + x_0\, x + c3\, x^2 + c4\, x^3 + c5\, x^4 + c6 \sin(x) + c7 \cos(x) + c8\, \mathbf{e}^{(-x)} + c9\, x\, \mathbf{e}^{(-x)} + c10\, x^2\, \mathbf{e}^{(-x)} + c11\, \mathbf{e}^{x} + c12\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + c13\, x\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + c14\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + c15\, x\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right)$$

>

Maple:

```
> dsolve(diff(y(x),x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x) + 2*diff(y(x),x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x) - diff(y(x),x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x) + diff(y(x),x,x,x,x,x,x,x,x,x) - 2*diff(y(x),x,x,x,x,x,x,x,x) - diff(y(x),x,x,x,x,x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, \mathbf{e}^{x} + \_C2\, \mathbf{e}^{(-x)} + \_C3\, \mathbf{e}^{(-x)}\, x + \_C4\, \mathbf{e}^{(-x)}\, x^2 + \_C5 + \_C6\, x + \_C7\, x^2 + \_C8\, x^3 + \_C9\, x^4 + \_C10 \sin(x) + \_C11 \cos(x) + \_C12\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + \_C13\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + \_C14\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) x + \_C15\, \mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) x$$

>

>

Nehomogenní rovnice - řešení metodou variace konstatnt

Příklad první

Zadání

Buď $f(x)$ spojitá funkce v intervalu (a,b)

>

>

>

```
Warning, premature end of input
```

```
> `@@`(D,2)(y(x))-y(x)=f(x);
```

$$(D^{(2)})(y(x)) - y(x) = f(x)$$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

```
> `@@`(D,2)(y(x))-y(x)=0;
```

$$(D^{(2)})(y(x)) - y(x) = 0$$

Můžeme sestavit chrakteristický polynom

> $\lambda^2 - 1 = 0$
>
>

```
Warning, premature end of input
```

```
> l[1,2]=solve(lambda^2-1=0);
```

$$l_{1,2} = (1, -1)$$

Fundamentální systém této homogenní rovnice tvoří fuknce $\mathbf{e}^x$ a $\mathbf{e}^{(-x)}$. A prtikulární řešení vypadá takto:

```
Error, missing operator or `;`
```

```
> y(x)=c1*exp(x)+c2*exp(-x);
```

$$y(x) = (D(x_0) - x_0)\,\mathbf{e}^x + x_0\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

Nyní nastupuje metoda variace konstant - místo konstant, budeme chápat c1 a c2 jako funkce proměnné x

```
> y(x)=c1(x)*exp(x)+c2(x)*exp(-x);
```

$$y(x) = (D(x_0)(x) - x_0(x))\,\mathbf{e}^x + x_0(x)\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

```
> D(y(x))=diff(c1(x)*exp(x)+c2(x)*exp(-x),x);
```

$$D(y(x)) = \left((D^{(2)})(x_0)(x) - \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\right)\mathbf{e}^x + (D(x_0)(x) - x_0(x))\,\mathbf{e}^x + \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\mathbf{e}^{(-x)} - x_0(x)\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

Zvolím si

```
> diff(c1(x),x)*exp(x)+diff(c2(x),x)*exp(-x)=0;
```

$$\left((D^{(2)})(x_0)(x) - \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\right)\mathbf{e}^x + \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\mathbf{e}^{(-x)} = 0$$

```
> D(y(x))=simplify( diff(c1(x)*exp(x)+c2(x)*exp(-x),x)
  ,
  {exp(x)*exp(-x)=1,diff(c1(x),x)*exp(x)+diff(c2(x),x)*
  exp(-x)=0});
```

$$D(y(x)) = \frac{-x_0(x) + (D(x_0)(x) - x_0(x))\,(\mathbf{e}^x)^2}{\mathbf{e}^x}$$

```
> `@@`(D,2)(y(x))=diff(c1(x)*exp(x)-c2(x)*exp(-x),x);
```

$$(D^{(2)})(y(x)) = \left((D^{(2)})(x_0)(x) - \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\right)\mathbf{e}^x + (D(x_0)(x) - x_0(x))\,\mathbf{e}^x - \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\mathbf{e}^{(-x)} + x_0(x)\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

>

```
> `@@`(D,2)(y(x)) = simplify(
  diff(c1(x),x)*exp(x)+c1(x)*exp(x)-diff(c2(x),x)*exp(-
  x)+c2(x)*exp(-x) ,
  {exp(x)*exp(-x)=1,diff(c1(x),x)*exp(x)+diff(c2(x),x)*
  exp(-x)=0});
```

$$(D^{(2)})(y(x)) = \frac{x_0(x) + (D(x_0)(x) - x_0(x))\,(\mathbf{e}^x)^2 - 2\left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)}{\mathbf{e}^x}$$

```
> `@@`(D,2)(y(x)) = y(x)-2*(diff(c2(x),x))*exp(-x);
```

$$(D^{(2)})(y(x)) = y(x) - 2\left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\mathbf{e}^{(-x)}$$

Výsledek našeho snažení je, že máme jednoduchou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

```
> diff(c1(x),x)*exp(x)+diff(c2(x),x)*exp(-x)=0;
```

$$\left((D^{(2)})(x_0)(x) - \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\right)\mathbf{e}^x + \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\mathbf{e}^{(-x)} = 0$$

```
> -2*diff(c2(x),x)*exp(-x)=f(x);
```

$$-2\left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\mathbf{e}^{(-x)} = f(x)$$

```
> dsolve(-2*diff(c2(x),x)*exp(-x)=f(x),c2(x));
```

$$x_0(x) = \int -\frac{1}{2}f(x)\,\mathbf{e}^x\,dx + \_C1$$

Sečtením obou rovnic získáme c1(x):

```
> diff(c1(x),x)*exp(x)+diff(c2(x),x)*exp(-x)-diff(c2(x)
  ,x)*exp(-x)=1/2*f(x);
>
```

$$\left((D^{(2)})(x_0)(x) - \left(\frac{d}{dx}x_0(x)\right)\right)\mathbf{e}^x = \frac{1}{2}f(x)$$

```
> c1(x)=int(1/2*f(x)*exp(-x),x)+_C2;
```

$$D(x_0)(x) - x_0(x) = \int \frac{1}{2}f(x)\,\mathbf{e}^{(-x)}\,dx + \_C2$$

Konečný výsledek tedy vypadá následujícím způsoebem

```
> y(x)=exp(x)*(int(1/2*f(x)*exp(-x),x)+_c1) +
  exp(-x)*(-1/2*int(f(x)*exp(x),x)+_c2);
```

$$y(x) = \mathbf{e}^x\left(\int \frac{1}{2}f(x)\,\mathbf{e}^{(-x)}\,dx + \_c1\right) + \mathbf{e}^{(-x)}\left(-\frac{1}{2}\int f(x)\,\mathbf{e}^x\,dx + \_c2\right)$$

Pro všechna $x \in (a,b)$

```
>
```

A Maple ?

```
> dsolve(  diff(diff((y(x)),x),x)-y(x) = f(x),y(x));
```

$$y(x) = \_C2\, \mathbf{e}^{(-x)} + \_C1\, \mathbf{e}^{x} - \frac{1}{2}\left(\left(\int f(x)\, \mathbf{e}^{x}\, dx - \int f(x)\, \mathbf{e}^{(-x)}\, dx\, \mathbf{e}^{(2\,x)}\right)\mathbf{e}^{(-x)}\right)$$

Výsledky se tedy shodují

Příklad druhý

Zadání

```
> D(y(x))-2*y(x)/x=2*x^3;
```

$$D(y(x)) - \frac{2\, y(x)}{x} = 2\, x^3$$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

```
> D(y(x))-2*y(x)/x=0;
```

$$D(y(x)) - \frac{2\, y(x)}{x} = 0$$

```
> dsolve(diff(y(x),x)-2*y(x)/x=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, x^2$$

Obdržené partikulární řešení opět upravíme tak, že _C1 chápeme jako funkci například c(x):

```
> y(x)=c(x)*x^2;
```

$$y(x) = c(x)\, x^2$$

```
> D(y(x))=diff(c(x)*x^2,x);
```

$$D(y(x)) = \left(\frac{d}{dx} c(x)\right) x^2 + 2\, c(x)\, x$$

Nyní dosadíme do původní rovnice

```
> diff(c(x)*x^2,x)-2*y(x)/x=2*x^3;
```

$$\left(\frac{d}{dx} c(x)\right) x^2 + 2\, c(x)\, x - \frac{2\, y(x)}{x} = 2\, x^3$$

```
> simplify(diff(c(x)*x^2,x)-2*y(x)/x=2*x^3,{y(x)=c(x)*x
  ^2});
```

$$\left(\frac{d}{dx} c(x)\right) x^2 = 2\, x^3$$

```
> dsolve(diff(c(x),x)*x^2 = 2*x^3,c(x));
>
```

$$c(x) = x^2 + \_C1$$

```
> y(x)=(x^2+_C1)*x^2;
```

$$y(x) = (x^2 + \_C1)\, x^2$$

```
> y(x)=x^4+c*x^2;
```

$$y(x) = x^4 + c\, x^2$$

```
>
```

A Maple ...

```
> dsolve(diff(y(x),x)-2*y(x)/x=2*x^3,y(x));
```

$$y(x) = (x^2 + \_C1)\, x^2$$

Poznámka k prvnímu příkladu

Zadání

```
> diff(y(x),x,x)-y(x)=f(x);
>
```

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right)-\mathrm{y}(x)=\mathrm{f}(x)$$

f(x) je spojitá v (a,b)

Nejprve spočteme Wronskián

```
> W[x[1],x[2]](x)=Det(array(1..2,1..2,[[exp(x),exp(-x)]
  ,[exp(x),-exp(-x)]]));
```

$$\mathrm{W}_{x_1,\,x_2}(x)=\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{e}^x & \mathbf{e}^{(-x)}\\ \mathbf{e}^x & -\mathbf{e}^{(-x)}\end{bmatrix}\right)$$

```
> with(linalg):
> W[x[1],x[2]](x)=det(array(1..2,1..2,[[exp(x),exp(-x)]
  ,[exp(x),-exp(-x)]]));
```

$$\mathrm{W}_{x_1,\,x_2}(x)=-2\,\mathbf{e}^x\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

Tím jsme mj. ověřili lineární nezávislost $\mathbf{e}^x$ a $\mathbf{e}^{(-x)}$. Z čehož vyplývá že tyto dvě funkce tvoří fundamentální systém této rovnice.

```
Error, missing operator or `;`
```

Rovnice n-tého řádu, které lze upravit na rovnice s konstantními koeficienty

Eulerovy Rovnice

Příklad první

Zadání

```
> x^2*`@@`(D,2)(y(x))+3*D(y(x))*x+y(x)=0;
```

$$x^2\,(\mathrm{D}^{(2)})(\mathrm{y}(x))+3\,\mathrm{D}(\mathrm{y}(x))\,x+\mathrm{y}(x)=0$$

Nejprve vytvoříme chrakteristickou rovnici

```
> l*(l-1)+3*l+1=0;
```

$$l\,(l-1)+3\,l+1=0$$

Maple upraví za nás :-)

```
> simplify(l*(l-1)+3*l+1=0);
```

$$l^2+2\,l+1=0$$

A taky spočítá kořeny :-)))

```
> l[1,2]=solve(l*(l-1)+3*l+1=0);
```

$$l_{1,\,2}=(-1,\,-1)$$

Podle kořenů chrakteristické rovnice snadno sestavíme řešení y(x)

```
> y(x)=c1/x+c2/x*ln(x);
```

$$\mathrm{y}(x)=\frac{\mathrm{D}(x_0)-x_0}{x}+\frac{x_0\,\ln(x)}{x}$$

c1 , c2 $\in$ R

Poznámka:

Pokud by l = 1 byl k-násobný kořen, pak by y(x) vypadalo následovně

```
> y(x)=c1/x+c2/x*ln(x)..+cN*ln(x)^N/x;
```

$$y(x)=\frac{D(x_0)-x_0}{x}+\frac{x_0\ln(x)}{x}\,..\,\frac{cN\ln(x)^N}{x}$$

A Maple zcela sám ?

```
> dsolve(x^2*diff(diff(y(x),x),x)+3*diff(y(x),x)*x+y(x)=0,y(x));
```

$$y(x)=\frac{\_C1}{x}+\frac{\_C2\ln(x)}{x}$$

```
>
```

Příklad druhý

Zadání

```
> x^3*`@@`(D,3)(y(x))+3*x^2*`@@`(D,2)(y(x))+x*D(y(x))-y(x)=x+2;
```

$$x^3\,(D^{(3)})(y(x))+3\,x^2\,(D^{(2)})(y(x))+D(y(x))\,x-y(x)=x+2$$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

```
> x^3*`@@`(D,3)(y(x))+3*x^2*`@@`(D,2)(y(x))+x*D(y(x))-y(x)=0;
```

$$x^3\,(D^{(3)})(y(x))+3\,x^2\,(D^{(2)})(y(x))+D(y(x))\,x-y(x)=0$$

Charakteristická rovnice

```
> l*(l-1)*(l-2)+3*l*(l-1)+l-1=0;
```

$$l\,(l-1)\,(l-2)+3\,l\,(l-1)+l-1=0$$

```
> simplify(l*(l-1)*(l-2)+3*l*(l-1)+l-1=0);
```

$$l^3-1=0$$

```
> l[1,2,3]=solve(simplify(l*(l-1)*(l-2)+3*l*(l-1)+l-1=0));
```

$$l_{1,2,3}=\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3},-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)$$

Z toho relativně snadno sestavíme partikulární řešení yp(x)

```
> x^(-1/2+1/2*I*3^(1/2))=simplify(x^(-1/2+1/2*I*3^(1/2)),{x=exp(ln(abs(x)))});
```

$$x^{(-1/2+1/2\,I\sqrt{3})}=\frac{|x|^{(1/2\,I\sqrt{3})}}{\sqrt{|x|}}$$

```
> x^(2*I)=cos(2*ln(x))+I*sin(2*ln(x));
```

$$x^{(2\,I)}=\cos(2\ln(x))+\sin(2\ln(x))\,I$$

```
> yp(x)=c1*x+c2*1/(sqrt(abs(x)))*cos(sqrt(3)/2*ln(abs(x)))+c3*1/(sqrt(abs(x)))*sin(sqrt(3)/2*ln(abs(x)));
```

$$yp(x) = (D(x_0) - x_0)\, x + \frac{x_0 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\ln(|x|)\right)}{\sqrt{|x|}} + \frac{c3 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\ln(|x|)\right)}{\sqrt{|x|}}$$

\>

Celkové řešení

```
> y(x)=c1*x+c2*1/(sqrt(abs(x)))*cos(sqrt(3)/2*ln(abs(x)
))+c3*1/(sqrt(abs(x)))*sin(sqrt(3)/2*ln(abs(x)))-2+1/
3*x*ln(abs(x));
```

$$y(x) = (D(x_0) - x_0)\, x + \frac{x_0 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\ln(|x|)\right)}{\sqrt{|x|}} + \frac{c3 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\ln(|x|)\right)}{\sqrt{|x|}} - 2 + \frac{1}{3}\, x \ln(|x|)$$

\>

Maple ...

```
> dsolve( diff(diff(diff(y(x),x),x),x) +
3*x^2*diff(diff(y(x),x),x) + x*diff(y(x),x) - y(x) =
x+0,y(x));
```

$$y(x) = \int 3\, x^{(7/2)} \left(- \int \frac{\mathrm{e}^{\left(-\frac{x^3}{2}\right)} \operatorname{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)}{x^{(5/2)}}\, dx\, \operatorname{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) + \int \frac{\mathrm{e}^{\left(-\frac{x^3}{2}\right)} \operatorname{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)}{x^{(5/2)}}\, dx\, \operatorname{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \right) \mathrm{e}^{\left(\frac{x^3}{2}\right)} \Big/ \Big(9 \operatorname{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \operatorname{WhittakerW}\left(\frac{17}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) + 7 \operatorname{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \operatorname{WhittakerM}\left(\frac{17}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \Big)\, dx\; x + \int 3\, x^{(7/2)} \operatorname{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{x^3}{2}\right)} \Big/ \Big(9 \operatorname{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \operatorname{WhittakerW}\left(\frac{17}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)$$

$$+ 7\,\mathrm{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \mathrm{WhittakerM}\left(\frac{17}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)\Bigg) \, dx$$

$$\int \frac{e^{\left(-\frac{x^3}{2}\right)} \mathrm{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)}{x^{(5/2)}} \, dx \; x - \int 3\, x^{(7/2)}\, \mathrm{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) e^{\left(\frac{x^3}{2}\right)}$$

$$\Bigg/ \Bigg(9\,\mathrm{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \mathrm{WhittakerW}\left(\frac{17}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)$$

$$+ 7\,\mathrm{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right) \mathrm{WhittakerM}\left(\frac{17}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)\Bigg) \, dx$$

$$\int \frac{e^{\left(-\frac{x^3}{2}\right)} \mathrm{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)}{x^{(5/2)}} \, dx \; x + \_C1\, x$$

$$+ \_C2 \int \frac{e^{\left(-\frac{x^3}{2}\right)} \mathrm{WhittakerM}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)}{x^{(5/2)}} \, dx \; x$$

$$+ \_C3 \int \frac{e^{\left(-\frac{x^3}{2}\right)} \mathrm{WhittakerW}\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}, x^3\right)}{x^{(5/2)}} \, dx \; x$$

Jiný případ

Jedinný příklad

Zadání

$n \in Z$

```
> (1-x^2)*`@@`(D,2)(y(x))-x*D(y(x))+n^2*y(x)=0;
```

$$(1 - x^2)\,(D^{(2)})(y(x)) - x\, D(y(x)) + n^2\, y(x) = 0$$

Provedeme substituci

```
> x=cos(phee);
```

$$x = \cos(phee)$$

```
> D(y(x))=diff(y(phee),phee)*D(phee(x));
```

$$D(y(x)) = \left(\frac{d}{dphee}\, y(phee)\right) D(phee(x))$$

```
> diff(y(phee),phee)*D(phee(x))=-(1/sin(phee))*diff(y(phee),phee);
```

$$\left(\frac{d}{dphee}\,y(phee)\right)D(phee(x)) = -\frac{\frac{d}{dphee}\,y(phee)}{\sin(phee)}$$

Obdržíme tedy

```
> D(y(x))=-(1/sin(phee))*diff(y(phee),phee);
```

$$D(y(x)) = -\frac{\frac{d}{dphee}\,y(phee)}{\sin(phee)}$$

A dále

```
> `@@`(D,2)(y(x))=(-1/sin(phee))*diff(-(1/sin(phee))*diff(y(phee),phee),phee);
```

$$(D^{(2)})(y(x)) = -\frac{\frac{\left(\frac{d}{dphee}\,y(phee)\right)\cos(phee)}{\sin(phee)^2} - \frac{\frac{d^2}{dphee^2}\,y(phee)}{\sin(phee)}}{\sin(phee)}$$

```
> simplify((-1/sin(phee))*diff(-(1/sin(phee))*diff(y(phee),phee),phee),{1-cos(phee)^2=sin(x)^2});
```

$$\frac{\frac{d^2}{dphee^2}\,y(phee)}{\sin(phee)^2} - \frac{\left(\frac{d}{dphee}\,y(phee)\right)\cos(phee)}{\sin(phee)^3}$$

Po zpětném dosazení do rovnice dostaneme překvapivě jednoduchý výsledek

```
> (1-x^2)*`@@`(D,2)(y(x))-x*D(y(x))+n^2*y(x)=0;
```

$$(1 - x^2)\,(D^{(2)})(y(x)) - x\,D(y(x)) + n^2\,y(x) = 0$$

```
> simplify((1-cos(phee)^2)*(-diff(y(phee),phee)*cos(phee)+diff(diff(y(phee),phee),phee)*sin(phee))/sin(phee)^3 -
cos(phee)*(-1/sin(phee))*diff(y(phee),phee)+n^2*y(phee),{1-cos(phee)^2=sin(phee)^2,cos(phee)^2+sin(phee)^2=1});
```

$$\left(\left(\left(\frac{d^2}{dphee^2}\,y(phee)\right) + n^2\,y(phee)\right)\sin(phee) + \left(-\left(\frac{d^2}{dphee^2}\,y(phee)\right) - n^2\,y(phee)\right)\sin(phee)\cos(phee)^2\right) \Big/ \left(\sin(phee) - \sin(phee)\cos(phee)^2\right)$$

```
> (diff(diff(y(phee),phee),phee)+n^2*y(phee))*sin(phee)+(-diff(diff(y(phee),phee),phee)-n^2*y(phee))*sin(phee)*cos(phee)^2=sin(phee)^3*(diff(diff(y(phee),phee),phee))+sin(phee)^3*n^2*y(phee);
```

$$\left(\left(\frac{d^2}{dphee^2}\mathrm{y}(phee)\right)+n^2\,\mathrm{y}(phee)\right)\sin(phee)+\left(-\left(\frac{d^2}{dphee^2}\mathrm{y}(phee)\right)-n^2\,\mathrm{y}(phee)\right)\sin(phee)\cos(phee)^2=\sin(phee)^3\left(\frac{d^2}{dphee^2}\mathrm{y}(phee)\right)+n^2\,\mathrm{y}(phee)\sin(phee)^3$$

```
> sin(phee)-sin(phee)*cos(phee)^2=sin(phee)^3;
```

$$\sin(phee)-\sin(phee)\cos(phee)^2=\sin(phee)^3$$

Rovnice, která nám vyjde dosazením vypadá takto

```
> (diff(diff(y(phee),phee),phee))+n^2*y(phee)=0;
```

$$\left(\frac{d^2}{dphee^2}\mathrm{y}(phee)\right)+n^2\,\mathrm{y}(phee)=0$$

Jedná se o poměrně jednoduchou rovnici druhého řádu

```
> dsolve((diff(diff(y(phee),phee),phee))+n^2*y(phee)=0,
  y(phee));
```

$$\mathrm{y}(phee)=\_C1\,\sin(n\,phee)+\_C2\,\cos(n\,phee)$$

Fundamentální systém této rovnice tvoří funkce $\cos(n\,phee)$ a $\sin(n\,phee)$

```
Error, missing operator or `;`
```

Nyní upravíme výsledek pro původní proměnnou x

```
> y(x)=c1*cos(n*arccos(x))+c2*sin(n*arccos(x));
```

$$\mathrm{y}(x)=(\mathrm{D}(x_0)-x_0)\cos(n\arccos(x))+x_0\sin(n\arccos(x))$$

Pomocí Moivrovy věty lze výsledek ještě upravit

```
> with(combinat,numbcomb):
> cos(n*arccos(x))=Sum((-1)^k*t^(n-2)*Numbcomb(n,2*k),k
  =0..n/2);
```

$$\cos(n\arccos(x))=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k\,t^{(n-2)}\,\mathrm{Numbcomb}(n,2\,k)$$

```
> y(x)=c1*Sum((-1)^k*t^(n-2)*Numbcomb(n,2*k),k = 0 ..
  1/2*n)+c2*sin(n*arccos(x));
```

$$\mathrm{y}(x)=(\mathrm{D}(x_0)-x_0)\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k\,t^{(n-2)}\,\mathrm{Numbcomb}(n,2\,k)\right)+x_0\sin(n\arccos(x))$$

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

Řešení metodou variace konstatnt

Příklad prvni

Zadání

Najděte řešení následující rovnice, znáte-li fundamentální systém

```
> diff(y(x),x,x,x)+(3/x)*diff(y(x),x,x)-(2/x^2)*diff(y(x),x)+(2/t^3)*y(x)=2*x^2;
>
```

$$\left(\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)\right)+\frac{3\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right)}{x}-\frac{2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right)}{x^2}+\frac{2\,\mathrm{y}(x)}{t^3}=2\,x^2$$

```
> FS = [x,1/x^2,x*ln(x)];
```

$$FS=\left[x,\frac{1}{x^2},x\ln(x)\right]$$

Naším úkolem je za pomoci variace konstant nalézt funkce c1(x), c2(x) a c3(x)

```
> c[k](x)=int( 2*x^2 * ( (W[k,x[1],x[2]..x[n]](x)) / (W[x[1],x[2]..x[n] ]( x)) ) , x);
```

$$c_k(x)=\int\frac{2\,x^2\,\mathrm{W}_{k,x_1,x_2\,..\,x_n}(x)}{\mathrm{W}_{x_1,x_2\,..\,x_n}(x)}\,dx$$

k = 1,2,3

```
> W[x[1],x[2]..x[n]](x)=det(linalg[matrix](3,3,[x,1/x^2,x*ln(x), 1,(-2/x^3),1+ln(x), 0,(6/x^4),1/x]));
```

$$\mathrm{W}_{x_1,x_2\,..\,x_n}(x)=-\frac{9}{x^3}$$

```
> W[1,x[1],x[2]..x[n]](x)=det(linalg[matrix](3,3,[0,1/x^2,x*ln(x), 0,(-2/x^3),1+ln(x), 2*x^2,(6/x^4),1/x]));
```

$$\mathrm{W}_{1,x_1,x_2\,..\,x_n}(x)=2+6\ln(x)$$

```
> W[2,x[1],x[2]..x[n]](x)=det(linalg[matrix](3,3,[x,0,x*ln(x), 1,0,1+ln(x), 0,2*x^2,1/x]));
```

$$\mathrm{W}_{2,x_1,x_2\,..\,x_n}(x)=-2\,x^3$$

```
> W[3,x[1],x[2]..x[n]](x)=det(linalg[matrix](3,3,[x,1/x^2,0, 1,(-2/x^3),0, 0,(6/x^4),2*x^2]));
```

$$\mathrm{W}_{3,x_1,x_2\,..\,x_n}(x)=-6$$

Podle teoretického vzorce poté obdržíme

```
> c[k](x)=K[k]+   int( 2*x^2* ( (W[k,x[1],x[2]..x[n]](x)) / (W[x[1],x[2]..x[n] ]( x)) ) , x);
```

$$c_k(x)=K_k+\int\frac{2\,x^2\,\mathrm{W}_{k,x_1,x_2\,..\,x_n}(x)}{\mathrm{W}_{x_1,x_2\,..\,x_n}(x)}\,dx$$

Dosadíme:

```
> c[1](x)=K[1]+int((2+6*ln(x))/(-9/x^3),x);
```

$$c_1(x) = K_1 - \frac{x^4}{72} - \frac{1}{6} x^4 \ln(x)$$

```
> c[2](x)=K[2]+int((-2*x^3)/(-9/x^3),x);
```

$$c_2(x) = K_2 + \frac{2\, x^7}{63}$$

```
> c[3](x)=K[3]+int(-6/(-9/x^3),x);
```

$$c_3(x) = K_3 + \frac{x^4}{6}$$

Výsledné řešení y(x) dostaneme dosazením

```
> y(x)=c1*x+c2*(1/x^2)+c3*x*ln(x);
```

$$\mathrm{y}(x) = (\mathrm{D}(x_0) - x_0)\, x + \frac{x_0}{x^2} + c3\, x \ln(x)$$

```
> y(x)=K[1]*x+K[2]*(1/x^2)+K[3]*x*ln(x)+(-1/72*x^5-1/6*
  x^5*ln(x)+2/63*x^5+1/6*x^5*ln(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = K_1\, x + \frac{K_2}{x^2} + K_3\, x \ln(x) + \frac{x^5}{56}$$

Což je konečný výsledek

```
>
```

A Maple ...

```
> dsolve(diff(y(x),x,x,x) + (3/x)*diff(y(x),x,x) -
  (2/x^2)*diff(y(x),x) + (2/t^3)*y(x)=2*x^2 , y(x)):
```

Poznámka

Metoda variace konstant se dále užívá u nehomogenních rovnic různých druhů.

Metoda snížení řádu diferenciální rovnice n-tého řádu

Stabilizovaný pád

Mějme rovnici tvaru: m- hmotnost, rho - odopr prostředí, g - gravitační konstanta

```
> m*diff(x(t),t,t)=m*g-rho*diff(x(t),t);
```

$$m \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathrm{x}(t) \right) = m\, g - \rho \left(\frac{d}{dt} \mathrm{x}(t) \right)$$

Čeln m*g je zcela nezávislý na funkci x(t), díky tomu je možné rovnici mírně upravit a tím jí zjednodušit

```
> m*diff(x1(t),t)=m*g-rho*x1(t);
```

$$m \left(\frac{d}{dt} \mathrm{x1}(t) \right) = m\, g - \rho\, \mathrm{x1}(t)$$

Nyní již potřebujeme vyřešit pouze rovnici prvního řádu

```
> dsolve(m*diff(x1(t),t)=m*g-rho*x1(t),x1(t));
```

$$\mathrm{x1}(t) = \frac{m\, g}{\rho} + \mathbf{e}^{\left(-\frac{\rho\, t}{m} \right)} \_C1$$

```
> x(t)=int((m*g+exp(-1/m*rho*t)*_C1*rho)/rho,t)+c2;
```

$$x(t) = \frac{m\,g\,t - \_C1\,m\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\rho\,t}{m}\right)}}{\rho} + c2$$

```
>
```

Maple:

```
> dsolve(m*diff(x(t),t,t)=m*g-rho*diff(x(t),t),x(t));
```

$$x(t) = -\frac{m\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\rho\,t}{m}\right)}\_C1}{\rho} + \frac{m\,g\,t}{\rho} + \_C2$$

Příklad

Zadání

```
> diff(y(x),x,x,x)+p[3](x)*diff(y(x),x,x)+p[2](x)*diff(
  y(x),x)+p[1](x)*y(x)=0;
```

$$\left(\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right) + p_3(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) + p_2(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + p_1(x)\,y(x) = 0$$

Dále známe dvě lineárně nezávislá řešení

```
> y[1](x)>0;y[2](x)>0;
```

$$0 < y_1(x)$$

$$0 < y_2(x)$$

Zavedeme substituci:

```
> y(x)=y[1](x)*g(x);
```

$$y(x) = y_1(x)\,g(x)$$

```
> D(y(x))=diff(y[1](x)*g(x),x);
```

$$D(y(x)) = \left(\frac{d}{dx}\,y_1(x)\right)g(x) + y_1(x)\left(\frac{d}{dx}\,g(x)\right)$$

```
> `@@`(D,2)(y(x))=diff(y[1](x)*g(x),x,x);
```

$$(D^{(2)})(y(x)) = \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y_1(x)\right)g(x) + 2\left(\frac{d}{dx}\,y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}\,g(x)\right) + y_1(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,g(x)\right)$$

```
> `@@`(D,3)(y(x))=diff(y[1](x)*g(x),x,x,x);
```

$$(D^{(3)})(y(x)) = \left(\frac{d^3}{dx^3}\,y_1(x)\right)g(x) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}\,g(x)\right) + 3\left(\frac{d}{dx}\,y_1(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,g(x)\right) + y_1(x)\left(\frac{d^3}{dx^3}\,g(x)\right)$$

Vznikne nám rovnice, kterou následně zjednodušíme díky faktu, že y[1] je také řešení rovnice

```
> diff(y[1](x)*g(x),x,x,x) +
  p[3](x)*diff(y[1](x)*g(x),x,x) +
  p[2](x)*diff(y[1](x)*g(x),x) +
  p[1](x)*y[1](x)*g(x)=0;
```

$$\left(\frac{d^3}{dx^3}y_1(x)\right)g(x)+3\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)+3\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}g(x)\right)+y_1(x)\left(\frac{d^3}{dx^3}g(x)\right)+p_3(x)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x)\right)g(x)+2\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)+y_1(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}g(x)\right)\right)+p_2(x)\left(\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)g(x)+y_1(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)\right)+p_1(x)\,y_1(x)\,g(x)=0$$

```
> simplify(diff(y[1](x)*g(x),x,x,x) +
  p[3](x)*diff(y[1](x)*g(x),x,x) +
  p[2](x)*diff(y[1](x)*g(x),x) + p[1](x)*y[1](x)*g(x)=0
  ,{
  diff(y[1](x),x,x,x)+p[3](x)*diff(y[1](x),x,x)+p[2](x)
  *diff(y[1](x),x)+p[1](x)*y[1](x)=0 }  );
```

$$2\,p_3(x)\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)+p_3(x)\,y_1(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}g(x)\right)+p_2(x)\,y_1(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)+y_1(x)\left(\frac{d^3}{dx^3}g(x)\right)+3\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}g(x)\right)+3\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)=0$$

```
> z(x)=diff(g(x),x);
```

$$z(x)=\frac{d}{dx}g(x)$$

Obdržíme tak rovnici ve tvaru

```
>
  p[3](x)*y[1](x)*diff(z(x),x)+y[1](x)*diff(diff(z(x),x
  ),x)+p[2](x)*y[1](x)*z(x)+2*p[3](x)*diff(y[1](x),x)*z
  (x)+3*diff(y[1](x),x)*diff(z(x),x)+3*diff(diff(y[1](x
  ),x),x)*z(x) = 0;
```

$$p_3(x)\,y_1(x)\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)+y_1(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}z(x)\right)+p_2(x)\,y_1(x)\,z(x)+2\,p_3(x)\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)z(x)+3\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)+3\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x)\right)z(x)=0$$

Kterou dále upravíme

```
> collect(p[3](x)*y[1](x)*diff(z(x),x)+y[1](x)*diff(dif
  f(z(x),x),x)+p[2](x)*y[1](x)*z(x)+2*p[3](x)*diff(y[1]
  (x),x)*z(x)+3*diff(y[1](x),x)*diff(z(x),x)+3*diff(dif
  f(y[1](x),x),x)*z(x) = 0,z(x));
```

$$\left(p_2(x)\,y_1(x)+2\,p_3(x)\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)+3\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x)\right)\right)z(x)$$

$$+p_3(x)\,y_1(x)\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)+y_1(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}z(x)\right)+3\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)=0$$

```
> collect(
p[3](x)*y[1](x)*diff(z(x),x)+diff(diff(z(x),x),x) +
p[2](x)*z(x) + 2*p[3](x)*diff(y[1](x),x)*z(x)/y[1](x)
+ 3*diff(y[1](x),x)*diff(z(x),x)/y[1](x) +
3*diff(diff(y[1](x),x),x)*z(x)/y[1](x) = 0,z(x));
```

$$\left(p_2(x)+\frac{2\,p_3(x)\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)}{y_1(x)}+\frac{3\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x)\right)}{y_1(x)}\right)z(x)+p_3(x)\,y_1(x)\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)$$
$$+\left(\frac{d^2}{dx^2}z(x)\right)+\frac{3\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)}{y_1(x)}=0$$

Jedno řešení této rovnice

```
> w(x)=Diff((y[2](x)/y[1](x)),x);
```

$$w(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)$$

Nyní provedeme substituci

```
> z(x)=w(x)*u(x);
```

$$z(x)=w(x)\,u(x)$$

```
> Diff(z(x),x)=diff(w(x)*u(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}z(x)=\left(\frac{d}{dx}w(x)\right)u(x)+w(x)\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)$$

```
> Diff(z(x),x,x)=diff(w(x)*u(x),x,x);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}z(x)=\left(\frac{d^2}{dx^2}w(x)\right)u(x)+2\left(\frac{d}{dx}w(x)\right)\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)+w(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}u(x)\right)$$

Po úpravě pak dostaneme

```
> diff(diff(u(x),x),x) + ( 2*diff(w(x),x)/w(x) + 3* (
p[3](x)*y[1](x) + (diff(y[1](x),x))) /y[1](x)
)*(diff(u(x),x)) = 0    ;
```

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}u(x)\right)+\left(\frac{2\left(\frac{d}{dx}w(x)\right)}{w(x)}+\frac{3\left(p_3(x)\,y_1(x)+\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\right)}{y_1(x)}\right)\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)=0$$

Opět budeme substituovat

```
> q(x)=(diff(u(x),x));
```

$$q(x)=\frac{d}{dx}u(x)$$

```
> diff(q(x),x) + ( 2*diff(w(x),x)/w(x) + 3* (
p[3](x)*y[1](x) + (diff(y[1](x),x))) /y[1](x) )*q(x)
= 0    ;
```

$$\left(\frac{d}{dx}\mathrm{q}(x)\right)+\left(\frac{2\left(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)\right)}{\mathrm{w}(x)}+\frac{3\left(p_3(x)\,y_1(x)+\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)\right)}{y_1(x)}\right)\mathrm{q}(x)=0$$

```
> dsolve(diff(q(x),x) + ( 2*diff(w(x),x)/w(x) + 3* ( p[3](x)*y[1](x) + (diff(y[1](x),x))) /y[1](x) )*q(x) = 0  ,q(x));
```

$$\mathrm{q}(x)=\_C1\,\mathbf{e}^{\left(\int -\frac{2\left(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)\right)}{\mathrm{w}(x)}-3\,p_3(x)-\frac{3\left(\frac{d}{dx}y_1(x)\right)}{y_1(x)}\,dx\right)}$$

```
> u(x)=int(q(x),x);
```

$$\mathrm{u}(x)=\int \mathrm{q}(x)\,dx$$

```
> z(x)=Diff((y[2](x)/y[1](x)),x)*int(q(x),x);
```

$$\mathrm{z}(x)=\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right)\int \mathrm{q}(x)\,dx$$

```
> g(x)=int(z(x),x);
```

$$\mathrm{g}(x)=\int \mathrm{z}(x)\,dx$$

```
> g(x)=int(Diff((y[2](x)/y[1](x)),x)*int(q(x),x),x);
```

$$\mathrm{g}(x)=\int\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right)\int \mathrm{q}(x)\,dx\,dx$$

```
> g(x) = int(Diff((y[2](x)/y[1](x)),x)*q(x),x)+ (y[2](x)/y[1](x))*int(q(x),x);
```

$$\mathrm{g}(x)=\int\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right)\mathrm{q}(x)\,dx+\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\int \mathrm{q}(x)\,dx$$

Abychom mohli určit řešení celé rovnice hledáme třetí funkci fundamentální rovnice "y[3](x)"

```
> y[3](x)=g(x)*y[1](x);
```

$$y_3(x)=y_1(x)\,\mathrm{g}(x)$$

```
> g(x)*y[1](x)=y[1](x)*(int(Diff((y[2](x)/y[1](x)),x)*q(x),x) + (y[2](x)/y[1](x))*int(q(x),x));
```

$$y_1(x)\,\mathrm{g}(x)=y_1(x)\left(\int\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right)\mathrm{q}(x)\,dx+\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\int \mathrm{q}(x)\,dx\right)$$

```
> collect( g(x)*y[1](x)=y[1](x)*(int(Diff((y[2](x)/y[1](x)),x)*q(x),x) + (y[2](x)/y[1](x))*int(q(x),x)) , y[1](x));
```

$$y_1(x)\,g(x) = \int \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right) q(x)\,dx\,y_1(x) + y_2(x)\int q(x)\,dx$$

```
> collect( y[3](x) =
  y[1](x)*(int(Diff((y[2](x)/y[1](x)),x)*q(x),x) +
  (y[2](x)/y[1](x))*int(q(x),x)) , y[1](x));
```

$$y_3(x) = \int \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right) q(x)\,dx\,y_1(x) + y_2(x)\int q(x)\,dx$$

```
>
```

Ještě si všimněme lineární nezávislosti: y1 a y2 jsou dvě LN řešení.
Zajímá nás za jakých okolností je c1*y1+c2*y2+c3*y3=0
c1*y1+c2*y2=0 právě když c1 a c2 =0,
Podmínky LN všech tří funkcí budou patrně splňeny, pokud $q(x) \neq 0$, tedy $q(x) = \frac{d}{dx}u(x)$, $u(x) = \frac{z(x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)}$. Tedy pokud z(x) bude různé od $k\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right)$, kde k je nějaké celé číslo. To však platí a proto tvoří y1,y2,y3 fundamentální systém rovnice.

```
Error, missing operator or `;`
```

```
>
```

Maple ...

```
> dsolve(diff(y(x),x,x,x)+p[3](x)*diff(y(x),x,x)+p[2](x
  )*diff(y(x),x)+p[1](x)*y(x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \mathrm{DESol}\left(\left\{p_1(x)\,\_Y(x) + p_2(x)\left(\frac{d}{dx}\_Y(x)\right) + p_3(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\_Y(x)\right) + \left(\frac{d^3}{dx^3}\_Y(x)\right)\right\}, \{\_Y(x)\}\right)$$

```
>
```