Anuloid

Anuloid můžeme dostat například jako rotační plochu a to rotací kružnice ležící spolu s osou rotace v jedné rovině. Mohou nastat tři případy

I. Kružnice osu neprotíná => anuloid
II. Kružnice se osy dotýká => axoid
III. Osa se je sečnou => melanoid

V dalším se budeme zabývat pouze anuloidem ve smyslu bodu I.

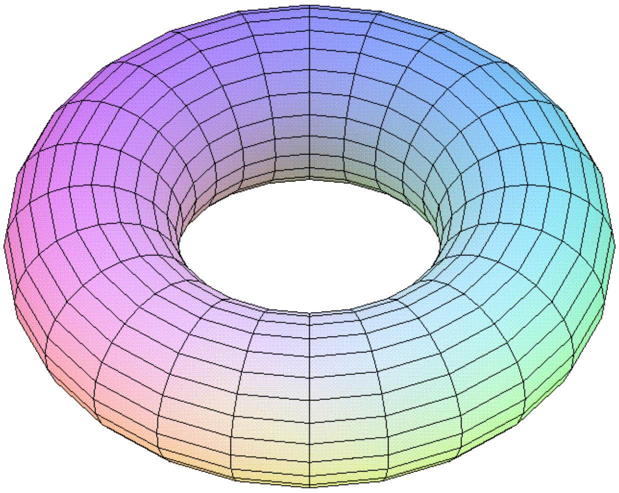
Vezmene si tedy kružnici $p(t) = [R + r\cos(t), 0, r\sin(t)]$ a tu necháme rotovat podél osy z, čímž dostaneme parametrické vyjádření

anuloidu $q(t, v) = [(R + r\cos(t))\cos(v), (R + r\cos(t))\sin(v), r\sin(t)]$, kde t i v jsou z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Nyní si anuloid nakreslíme

{ spuštění .... EDIT - WORKSHEET - EXECUTE)

```
> restart;
> R:=10:
> r:=4:
> plot3d([(R+r*cos(t))*cos(v),(R+r*cos(t))*sin(v),r*sin(t)],t=0..2
*Pi,v=0..2*Pi,scaling=constrained);
```



Pro názornost si ještě ukážeme jeho vznik pomocí animace.

\>

\>

```
> animate3d([(R+r*cos(t))*cos(v*tt),(R+r*cos(t))*sin(v*tt),r*sin(t
)],t=0..2*Pi,tt=0..1,v=0..2*Pi,scaling=constrained,frames=20);
```

$$\mathrm{animate3d}([(10+4\cos(t))\cos(v\,tt), (10+4\cos(t))\sin(v\,tt), 4\sin(t)], t=0\,..\,2\pi, tt=0\,..\,1, v=0\,..\,2\pi, scaling=constrained, frames=20)$$

Animaci lze spustit kliknutím na obrázek a poté na ikonku PLAY na horní liště

Nyní si spočteme povrch této plochy a to pomocí diferenciální geometrie. Za tímto účelem najdeme první formu anuloidu.

Parciálním derivováním jeho rovnice dostaneme:

```
> restart:
```

```
> Diff(q,t)=(-r*sin(t)*cos(v),-r*sin(t)*sin(v),r*cos(t));
```

$$\frac{\partial}{\partial t} q = (-r \sin(t) \cos(v), -r \sin(t) \sin(v), r \cos(t))$$

```
> Diff(q,v)=(-(R+r*cos(t))*sin(v),(R+r*cos(t))*cos(v),0);
```

$$\frac{\partial}{\partial v} q = (-(R + r \cos(t)) \sin(v), (R + r \cos(t)) \cos(v), 0)$$

První forma plochy má tvar $E = \left(\frac{\partial}{\partial t} q\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} q\right) \quad F = \left(\frac{\partial}{\partial t} q\right)\left(\frac{\partial}{\partial v} q\right) \quad G = \left(\frac{\partial}{\partial v} q\right)\left(\frac{\partial}{\partial v} q\right).$

Pro anuloid tedy $E = r^2 \quad F = 0 \quad G = (R + r \cos(t))^2.$

Vzoreček pro povrch plochy je

```
> S=Int(Int(sqrt(E*G-F^2),t=a..b),v=c..d);
```

$$S = \int_c^d \int_a^b \sqrt{E\,G - F^2}\, dt\, dv$$

Dosadíme-li, máme za úkol spočítat integrál

```
> S=Int(Int(r*(R+r*cos(t)),t=0..2*Pi),v=0..2*Pi);
```

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r\,(R + r \cos(t))\, dt\, dv$$

Integrand na v nezávisí, takže snadno vypočteme

```
> 2*Pi*r*Int(R+r*cos(t),t=0..2*Pi)=2*Pi*r*int(R+r*cos(t),t=0..2*Pi
);
```

$$2\,\pi\, r \int_0^{2\pi} R + r \cos(t)\, dt = 4\,\pi^2\, r\, R$$

```
>
```

Povrch anuloidu je tedy $S = 4\,\pi^2\, r\, R.$ (jako obsah obdelníka se stranami $2\,\pi\, r$ a $2\,\pi\, R$???)