Zobrazení sféry

V tomto příkladě se pokusíme najít nějaká "vhodná" zaobrazení sféry na rozvinutelnou plochu.

Sféra má např. parametrizaci $\mathrm{p}(u, v) = [\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)]$

Spočteme parciální derivace $\frac{\partial}{\partial u} p = (-\sin(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), 0)$

$\frac{\partial}{\partial v} p = (-\cos(u)\sin(v), -\sin(u)\sin(v), \cos(v))$.

a také první formu plochy $E = \cos^2 v \quad F = 0 \quad G = 1$.

Gaussova křivost sféry je rovna $K = \frac{1}{r^2}$ a tak izometrické zobrazení do roviny neexistuje. Budeme tedy hledat zobrazení jiná.

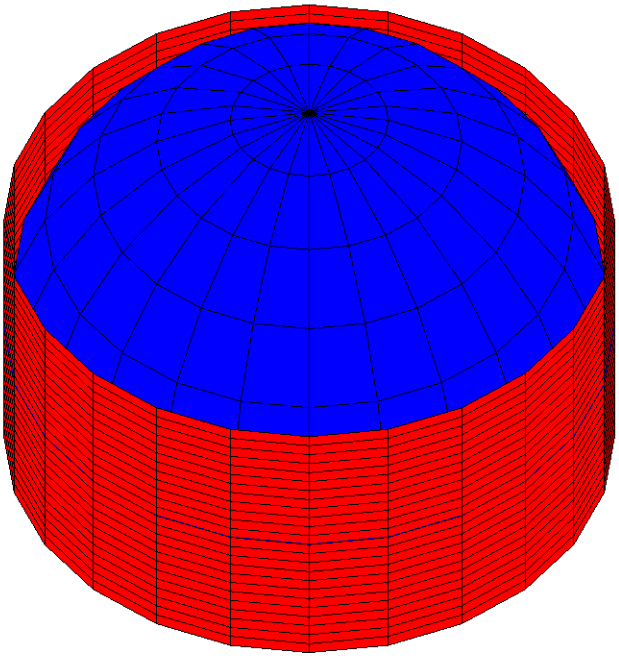
I. Konformní zobrazení

Sféře opíšeme válcovou plochu aby se jí dotýkala podél rovníkové kružnice. Ta má paramtrizaci $[\cos(u), \sin(u), v]$.

Jelikož ale hledáme zobrazení ne tuto plochu, místo paramatru v můžeme uvažovat funkci $\mathrm{f}(v)$. a tedy budeme hledat zobrazení

na plochu o parametrizaci $\mathrm{q}(u, v) = [\cos(u), \sin(u), \mathrm{f}(v)]$.

```
> with(plots):
> B:=plot3d([cos(u),sin(u),v],u=0..2*Pi,v=-0.5..0.5,color=red):
> A:=plot3d([cos(u)*cos(v), sin(u)*cos(v),
  sin(v)],u=0..2*Pi,v=-Pi..Pi,color=blue):
> display({A,B}, scaling=constrained);
```



Snadno spočteme její první formu : $E = 1 \quad F = 0 \quad G = \left(\frac{d}{dv}\mathrm{f}(v)\right)^2$.

Hledáme konformní zobrazení, tedy první forma jedné plochy musí být násobkem první formy plochy druhé.

Tak dostáváme rovnice: $1 = \lambda \cos^2 v$

$$\left(\frac{d}{dv}\mathrm{f}(v)\right)^2 = \lambda$$

ze kterých dostáváme $\left(\frac{d}{dv}\mathrm{f}(v)\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 v}$ Při odmocňování nemusíme uvažovat znamení. Pouze mění orientaci osy *z*.

Funkci $f(v)$ spočteme takto:

```
> f(v)=Int(1/cos(v),v);
```

$$f(v) = \int \frac{1}{\cos(v)}\, dv$$

Použijeme úpravu

```
> 1/cos(v)=cos(v)/(1-(sin(v))^2);
```

$$\frac{1}{\cos(v)} = \frac{\cos(v)}{1 - \sin(v)^2}$$

a snadno integrujeme

```
> Int(cos(v)/(1-(sin(v))^2),v)=1/2*ln((1+sin(v))/(1-sin(v)))+ln(C)
;
```

$$\int \frac{\cos(v)}{1 - \sin(v)^2}\, dv = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin(v)}{1 - \sin(v)}\right) + \ln(C)$$

```
>
>
```

Máme tedy výsledek $f(v) = \ln\left(C \sqrt{\frac{1 + \sin(v)}{1 - \sin(v)}}\right)$.

Můžeme položit $C = 1$, protože potom je $f(0) = 0$. Toto zobrazení se nazývá Mecatorova projekce.

I. Plochojevné zobrazení

Hledáme tedy funkci $f(v)$ tak, aby zobrazení zachovávalo plochu, tj. aby byl výraz $E\,G - F^2$ u obou ploch roven.

Máme tak vztah: $\cos^2 v = \left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)^2$ ze kterho získáme funkci f : $f(v) = \sin(v) + C$, kde opět můžeme položit $C = 0$.

Toto zobrazení potom není nic jiného než válcová projekce.

Výsledné zobrazení v obou případech dostaneme tak, že bodu sféry odpovídajícímu parametrům u, v přiřadíme bod válcové plochy
o souřadnicích $q(u, v) = [\cos(u), \sin(u), f(v)]$.