Paraboloidy

Paraboloidy, jakožto kvadriky, jsou z hlediska afinní klasifikace dva. Eliptický a hyperbolický.

I. Eliptický paraboloid

V kanonické bázi má vyjádření $z = x^2 + y^2$. Tato rovnice odpovídá speciálnímu a to kruhovému neboli rotačnímu paraboloidu a eliptický z něho snadno dostaneme afinitou.

Plocha je to neomezená a proto si ji pro naše účely omezíme podmínkou $x^2 + y^2 \leq r^2$. tj. budeme uvažovat pouze jeho část od vrcholu až po rovnoběžkovou kružnici s poloměrem r.

Jeho parametrické vyjádření je např. takovéto $\mathrm{p}(u, v) = [u, v, u^2 + v^2]$.

Nyní si spočteme povrch námi uvažovné části (obsah "horního" kruhu do povrchu nepočítáme). K tomu spočteme parciální derivace jeho porametrizace a následovně první formu plochy.

$\frac{\partial}{\partial u} p = (1, 0, 2\,u)$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial v} p = (0, 1, 2\,v)$ $\quad$ a tedy $\quad$ $E = 4\,u^2 + 1$ $\quad$ $F = 4\,u\,v$ $\quad$ $G = 4\,v^2 + 1$

Povrch plochy spočteme takto: (EDIT -EXECUTE - WORKSHEET)

```
> S=Int(Int(sqrt(E*G-F^2),u=a..b),v=c..d);
```

$$S = \int_c^d \int_a^b \sqrt{E\,G - F^2}\, du\, dv$$

Po dosazení tedy máme spočíst dvojný integrál z integrandu $\sqrt{1 + 4\,v^2 + 4\,u^2}$ s podmínkou $x^2 + y^2 \leq r^2$.

Výpočet si usnadníme substitucí do polárních souřadnic $u = s\cos(f)$ $\quad$ f je z intervalu $\langle 0, 2\,\pi \rangle$

$v = s\sin(f)$ $\quad$ s je z intervalu $\langle 0, r \rangle$.

Jakobián je roven s.

Dostáváme tedy:

```
> S=Int(Int(s*sqrt(1+4*s^2),s=0..r),f=0..2*Pi);
```

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} s \sqrt{1 + 4 s^2}\, ds\, df$$

což snadno dopočteme pomocí substituce $\sqrt{1 + 4 s^2} = t$.

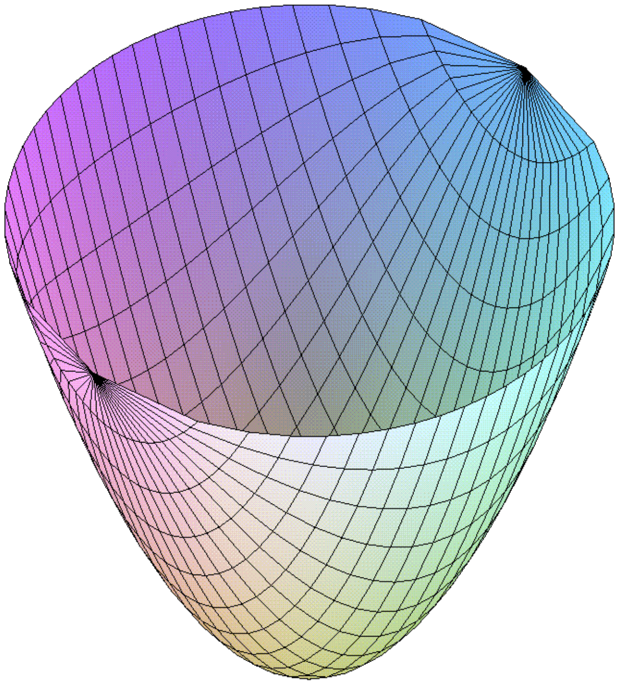
```
> 1/4*2*Pi*Int(t^2,t=1..sqrt(1+4*r^2))=Pi/6*((1+4*r^2)*sqrt(1+4*r^
  2)-1);
```

$$\frac{1}{2}\pi \int_1^{\sqrt{1+4r^2}} t^2\, dt = \frac{\pi\left(\left(1 + 4 r^2\right)^{(3/2)} - 1\right)}{6}$$

Máme tedy povrch časti rotačního paraboloidu $S = \dfrac{1\,\pi\left(\left(1 + 4 r^2\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} - 1\right)}{6}$.

Ještě si tuto plochu nakreslíme:

```
> r:=1:
> plot3d(x^2+y^2,x=-r..r,y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2));
```



II. Hyperbolický paraboloid

V kanonické bázi má rovnici $z = x^2 - y^2$. Pro tuto plochu spočteme to, co jsme udělali pro paraboloid eliptický.

Parametrické vyjadření je : $\mathrm{p}(u, v) = [u, v, u^2 - v^2]$.

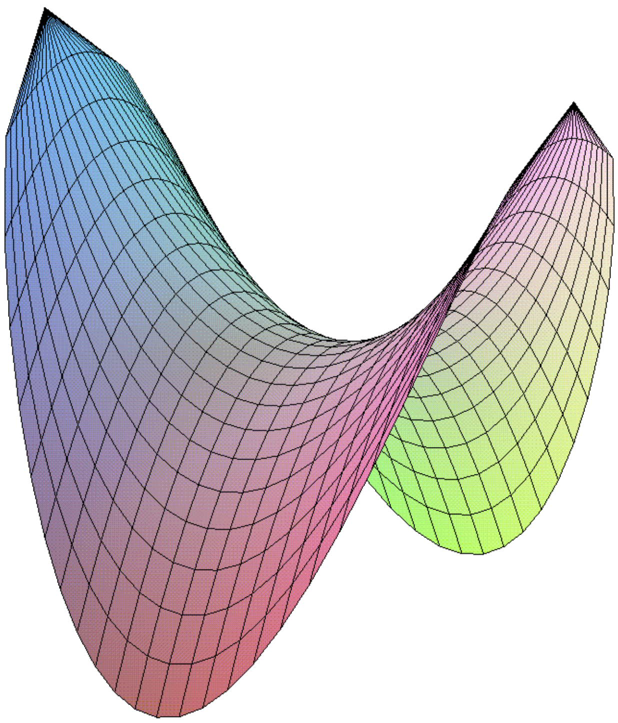
Dále $\frac{\partial}{\partial u} p = (1, 0, 2u)$ $\frac{\partial}{\partial v} p = (0, 1, -2v)$ a tedy $E = 4u^2 + 1$ $F = -4uv$ $G = 4v^2 + 1$.

První forma se u obou ploch sice liší o znamení u složky *F*, ale výraz $E\,G - F^2$ zůstává stejný. Proto při výpočtu povrchu plochy, kterou bychom

omezili jako v předchozím případě, dostáváme stejný výsledek.
Na obou plochách se tedy "měří" stejně.

Ještě zbývá obrázek: (plocha je opět zobrazena nad kruhovým půdorysem)

```
> plot3d(x^2-y^2,x=-r..r,y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2),orientati
  on=[-60,72]);
```



```
>
```