

Reziduova veta

Chci spočítat reálný integrál (od minus-nekonečna do plus-nekonečna) z funkce $f = (2x^3 + 13x \sin(x)) / (x^4 + 13x^2 + 36)$. Spočtu tento integrál pomocí reziduové vety.

```
> funkce:=x->(2*x^3+13*x*sin(x))/(x^4+13*x^2+36);
```

$$\text{funkce} := x \rightarrow \frac{2x^3 + 13x \sin(x)}{x^4 + 13x^2 + 36}$$

```
> int((2*x^3+13*x*sin(x))/(x^4+13*x^2+36),x=-infinity..infinity);
```

undefined

```
> evalf(%);
```

Float(undefined)

Příkaz `int` v tomto případě nefunguje.

Zvolím integrační funkci $(2z^3 + 13ze^{iz}) / (z^4 + 13z^2 + 36)$. Budu integrovat přes pulkružnici. Přes oblouk pulkružnici se dá ukázat, že integrál se blíží nule, jestliže se poloměr pulkružnice bude blížit k nekonečnu. Integrál přes uzavřenou křivku (pulkružnici) je pak roven integrálu přes "úsečku pulkružnice" od minus-nekonečna do plus-nekonečna. Můj hledaný integrál vzhledem k integrační funkci bude imaginární část tohoto integrálu.

```
> Poly:=[solve(z^4+13*z^2+36=0,z)];
```

$$\text{Poly} := [2I, -2I, 3I, -3I]$$

Pomocí pravidel na výpočet reziduí zjistím, že reziduum se spočte dosazením polů do funkce $FR = (2z^3 + 13ze^{iz}) / (4z^3 + 26z)$.

```
> FR:=z->(2*z^3+13*z*exp(I*z))/(4*z^3+26*z);
```

$$\text{FR} := z \rightarrow \frac{2z^3 + 13ze^{(zI)}}{4z^3 + 26z}$$

```
> FR(2*I);
```

$$\frac{-1}{20} I (-16I + 26I e^{(-2)})$$

```
> Rezidum_prvni:=simplify(%);
```

$$\text{Rezidum_prvni} := -\frac{1}{10} (8e^2 - 13) e^{(-2)}$$

```
> FR(3*I);
```

$$\frac{1}{30} I(-54 I + 39 I e^{(-3)})$$

```
> Rezidum_druhy:=simplify(%);
```

$$\text{Rezidum_druhy} := \frac{1}{10} (18 e^3 - 13) e^{(-3)}$$

```
> soucet_rezidui:=Rezidum_prvni+Rezidum_druhy;
```

$$\text{soucet_rezidui} := -\frac{1}{10} (8 e^2 - 13) e^{(-2)} + \frac{1}{10} (18 e^3 - 13) e^{(-3)}$$

```
> Integral:=Im(2*Pi*I*(soucet_rezidui));
```

$$\text{Integral} := 2 \pi \left(\left(-\frac{4}{5} e^2 + \frac{13}{10} \right) e^{(-2)} + \left(\frac{9}{5} e^3 - \frac{13}{10} \right) e^{(-3)} \right)$$

```
> evalf(Integral);
```

6.981955178

```
>
```

```
>
```