Extrémy funkce

Kritické body funkce pro hledání extrémů funkce jsou podle definice krajní body definičního oboru, body, kde derivace funkce neexistuje a body, kde se anuluje první derivace funkce. Prvně uvedené body *Mathematica* někdy určí - viz funkce-def. Druhý typ kritických bodů se zjišťuje podobně pomocí definičního oboru derivace - viz funkce-def.Třetí typ kritických bodů se zjistí pomocí příkazu Solve.
Budeme tedy hledat body, kde derivace dané funkce má hodnotu nula.

V následujícím příkladě máme najít všechny lokální extrémy dané funkce na intervalu [-0,5 ,1, 5]

In[1]:=
```
Clear[f, der1]; f[x_] := -(x-1)^3 * (x^2)^(1/3); okraj = {-0.5, 1.5};
```

In[2]:=
```
der1[x_] = Simplify[D[f[x], x]]
```

Out[2]= $-\frac{(-1+x)^2\, x\, (-2+11\, x)}{3\, \left(x^2\right)^{2/3}}$

In[3]:=
```
Reduce[der1[x] == y, y, Reals]
```

Out[3]= $(x<0 \,||\, x>0)\ \&\&\ y == \frac{2\, x-15\, x^2+24\, x^3-11\, x^4}{3\, \left(x^2\right)^{2/3}}$

In[4]:=
```
notder = {0}
```

Out[4]= {0}

In[5]:=
```
Solve[der1[x] == 0, x]
```

Out[5]= $\left\{\left\{x\to\frac{2}{11}\right\}, \{x\to 1\}, \{x\to 1\}\right\}$

In[6]:=
```
nulder = x /. Solve[der1[x] == 0, x]
```

Out[6]= $\left\{\frac{2}{11}, 1, 1\right\}$

In[7]:=
```
krit = Union[Sort[Join[okraj, notder, nulder]]]
```

Out[7]= $\left\{-0.5, 0, \frac{2}{11}, 1, 1.5\right\}$

In[8]:=
```
Map[f, krit] // N
```

Out[8]= {2.12612, 0., 0.175782, 0., -0.163796}

Vidíme, že v levém krajním bodě je maximum funkce, v 0 je lokální minimum, ve $2/11$ není lokální extrém *a v* pravém krajním bodě je minimum funkce. Maximum a minimu funkce si můžeme ověřit pomocí Maximize a Minimize (příkazy MaxValue a MinValue nedají body, ve kterých se extrém nachází).

In[9]:=
```
Maximize[{f[x], -0.5 ≤ x ≤ 1.5}, x]
```

Out[9]= {2.12612, {x → -0.5}}

In[10]:=
```
Minimize[{f[x], -0.5 ≤ x ≤ 1.5}, x]
```

Out[10]= {-0.163796, {x → 1.5}}

Asymptoty

Asymptoty budeme hledat jen v nevlastních bodech. V následující ukázce není ošetřen případ, kdy asymptota neexistuje (nicméně, podle výsledku se to pozná).

```
In[11]:= Clear[f]; f[x_] := x^2 * (x - 2) / (x + 1) ^2 + 2 * Abs[x]
```

```
In[12]:= Clear[a]; a = Limit[f[x] / x, x → Infinity];
         asymptplus = a * x + Limit[f[x] - a * x, x → Infinity]
```

Out[12]= $-4 + 3\,x$

```
In[13]:= Clear[a]; a = Limit[f[x] / x, x → -Infinity];
         asymptplus = a * x + Limit[f[x] - a * x, x → -Infinity]
```

Out[13]= $-4 - x$

Monotónnost a konvexita

Je jednoduché pro zjištění monotónnosti funkce použít derivaci.

```
In[14]:= Clear[f, derf]; f[x_] := x^2 * (x - 2) / (x + 1) ^2
```

```
In[15]:= derf[x_] = D[f[x], x]
```

Out[15]= $$-\frac{2\,(-2+x)\,x^2}{(1+x)^3}+\frac{2\,(-2+x)\,x}{(1+x)^2}+\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

```
In[16]:= Reduce[derf[x] > 0, y, Reals]
```

Out[16]= $x < -4 \;||\; -1 < x < 0 \;||\; x > 1$

```
In[17]:= Reduce[derf[x] < 0, y, Reals]
```

Out[17]= $-4 < x < -1 \;||\; 0 < x < 1$

Pro zjišťování konvexuty a konkavity je opět vhodné použít druhou derivaci.

```
In[18]:= der2f[x_] = D[f[x], x, x]
```

Out[18]= $$\frac{6\,(-2+x)\,x^2}{(1+x)^4}-\frac{8\,(-2+x)\,x}{(1+x)^3}-\frac{4\,x^2}{(1+x)^3}+\frac{2\,(-2+x)}{(1+x)^2}+\frac{4\,x}{(1+x)^2}$$

```
In[19]:= Reduce[der2f[x] > 0, y, Reals]
```

Out[19]= $x > \frac{2}{7}$

```
In[20]:= Reduce[der2f[x] < 0, y, Reals]
```

Out[20]= $x < -1 \;||\; -1 < x < \frac{2}{7}$

Průběh funkce

Jedná se o vhodné seřazení předchozích postupů. Lze napsat i prográmek, který po zadání funkce (ale jen "hezké" funkce) vypíše vše potřebné a nakreslí graf.
Projděme postup pro následující funkci.

```
In[21]:= Clear[f, der1, der2]; f[x_] := x^2 * (x - 2) / (x + 1) ^2
```

In[22]:=
```
Reduce[f[x] == y, x, y, Reals]
```
Out[22]=
```
x < -1 || x > -1
```

Definičním oborem jsou tedy všechna reálná čísla kromě -1. Můžeme definovat okrajové body a zjistíme údaje o derivaci. V bodě -1 budeme brát limitu zleva i zprava, a proto tento bod uvedeme dvakrít.

In[23]:=
```
okraj = {-1 * Infinity, -1, -1, +Infinity}
```
Out[23]=
```
{-∞, -1, -1, ∞}
```

In[24]:=
```
der1[x_] := Simplify[D[f[x], x]]
```

In[25]:=
```
Reduce[der1[x] == y, x, y, Reals]
```
Out[25]=
```
x < -1 || x > -1
```

Derivace je tedy definována na celém definičním oboru funkce f, která je tudíž spojitá.

In[26]:=
```
notder = {}
```
Out[26]=
```
{}
```

In[27]:=
```
nulder = x /. Solve[der1[x] == 0, x]
```
Out[27]=
```
{-4, 0, 1}
```

In[28]:=
```
krit = Sort[Join[okraj, notder, nulder]]
```
Out[28]=
```
{-4, -1, -1, 0, 1, -∞, ∞}
```

Musíme opravit pořadí.

In[29]:=
```
krit = Sort[krit, Less]
```
Out[29]=
```
{-∞, -4, -1, -1, 0, 1, ∞}
```

In[30]:=
```
hodnoty = Map[f, krit] // N
```

∞::indet : Indeterminate expression $0\,(-\infty)$ encountered. ≫

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

∞::indet : Indeterminate expression $0\,\infty$ encountered. ≫

Out[30]=
```
{Indeterminate, -10.6667, ComplexInfinity, ComplexInfinity, 0., -0.25, Indeterminate}
```

Ačkoliv *Mathematica* dovede v jednoduchých případech za hodnotu v nekonečnu dát limitu fiunkce v tomto bodě, pro naši funkci to nedovede a musíme dosadit hodnoty ručně.

In[31]:=
```
hodnoty1 = {Limit[f[x], x → -Infinity], hodnoty[[2]],
   Limit[f[x], x → -1, Direction → 1], Limit[f[x], x → -1, Direction → -1],
   hodnoty[[5]], hodnoty[[6]], Limit[f[x], x → Infinity]}
```
Out[31]=
```
{-∞, -10.6667, -∞, -∞, 0., -0.25, ∞}
```

Nyní sestavíme tabulku a učiníme první závěr.

In[32]:=
```
tab = Table[{krit[[i]], hodnoty1[[i]]}, {i, 1, 7}]
```
Out[32]=
```
{{-∞, -∞}, {-4, -10.6667}, {-1, -∞}, {-1, -∞}, {0, 0.}, {1, -0.25}, {∞, ∞}}
```

In[33]:=
```
Grid[tab, Frame → All]
```

Out[33]=

- ∞	- ∞
- 4	- 10.6667
- 1	- ∞
- 1	- ∞
0	0.
1	- 0.25
∞	∞

Z uvedených hodnot ihned poznáme, že funkce roste až do bodu -4, pak klesá do bodu-1, kde je kolmá asymptota, poté roste do bodu 0, klesá do bodu 1 a pak roste na zbytky definičního oboru. Mazima a minima nenabývá, lokální maxima jsou v bodech -4 a 0, lokální minimum v bodě 0.
Můžeme se podívat na konvexitu a na asymptoty.

In[34]:=
```
der2f[x_] = Simplify[D[f[x], x, x]]
```

Out[34]= $\frac{2\,(-2+7\,x)}{(1+x)^4}$

In[35]:=
```
Reduce[der2f[x] > 0, y, Reals]
```

Out[35]= $x > \frac{2}{7}$

In[36]:=
```
Reduce[der2f[x] < 0, y, Reals]
```

Out[36]= $x < -1 \,||\, -1 < x < \frac{2}{7}$

In[37]:=
```
a = Limit[f[x] / x, x → Infinity]; asymptplus = a * x + Limit[f[x] - a * x, x → Infinity]
```

Out[37]= $-4 + x$

In[38]:=
```
a = Limit[f[x] / x, x → -Infinity]; asymptminus = a * x + Limit[f[x] - a * x, x → -Infinity]
```

Out[38]= $-4 + x$

Funkce je tedy konkávní na intervalech (-∞,-1) a (-1,2/7). konvexní na (2/7,∞).
V obou nevlsatních bodech má stejnou asymptotu x-4.
Nakreslíme graf.

In[39]:=
```
Plot[{f[x], x - 4}, {x, -7, 8}, PlotRange → {-15, 5}]
```

Out[39]=