Použití derivace

Některá použití derivace pomocí programu *Mathematica* byla probrána v předchozí části (extrémy, monotónnost, asynptoty, grafy funkcí). Další významné použití je při sestavování diferenciálních rovnic, které bude probráno v příslušné časti o diferenciálních rovnicích. Mezi použití derivace patří i počítání limit funkce pomocí L'Hospitalova pravidla - to však pro použití programu *Mathematica* nemá velký význam. Z látky probírané v přednášce tedy zbývá Newtonova metoda řešení rovnic a aproximace funkce polynomy.

Newtonova metoda řešení rovnic

V programu *Mathematica* není příkaz na použití této metody, je však velmi jednoduché příkaz naprogramovat.V následující úloze je vhodné volit počáteční bod mezi 0,23 a 0.95. Ozkoušejte jiné volby.

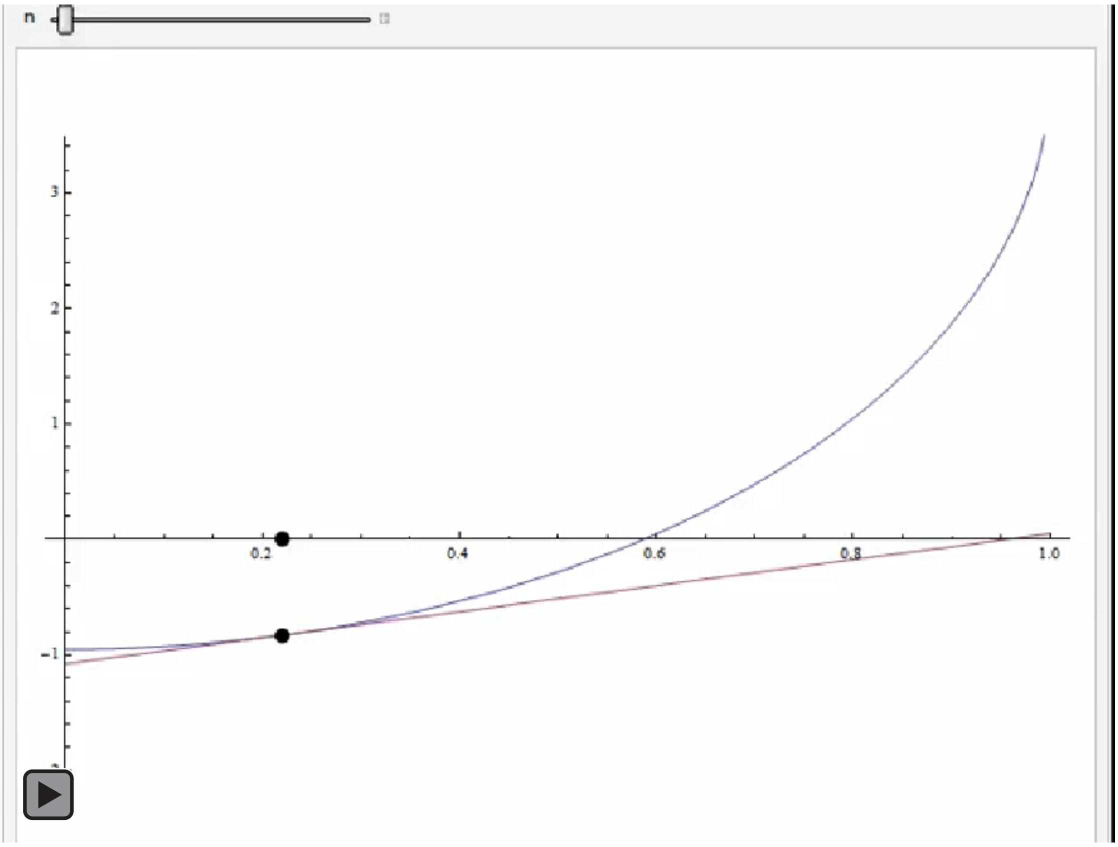
```
Clear[f, h]; f[x_] := 5 * (-Sqrt[1 - x^2] + 0.81); h[1] = 1000;
h[2] = Input["Zadejte výchoxí bod aproximací"]; n = 3;
While[Abs[h[n - 1] - h[n - 2]] > 10^(-3),
  {n++, h[n_] := h[n] = h[n - 1] - f[h[n - 1]] / f'[h[n - 1]]}];
n0 = n; Print[" Kořen je roven ",   h[n] // N]
Print["Hodnota funkce v kořenu je rovna ", f[h[n]] // N]
```

Kořen je roven 0.58643

Hodnota funkce v kořenu je rovna 7.59948×10^{-13}

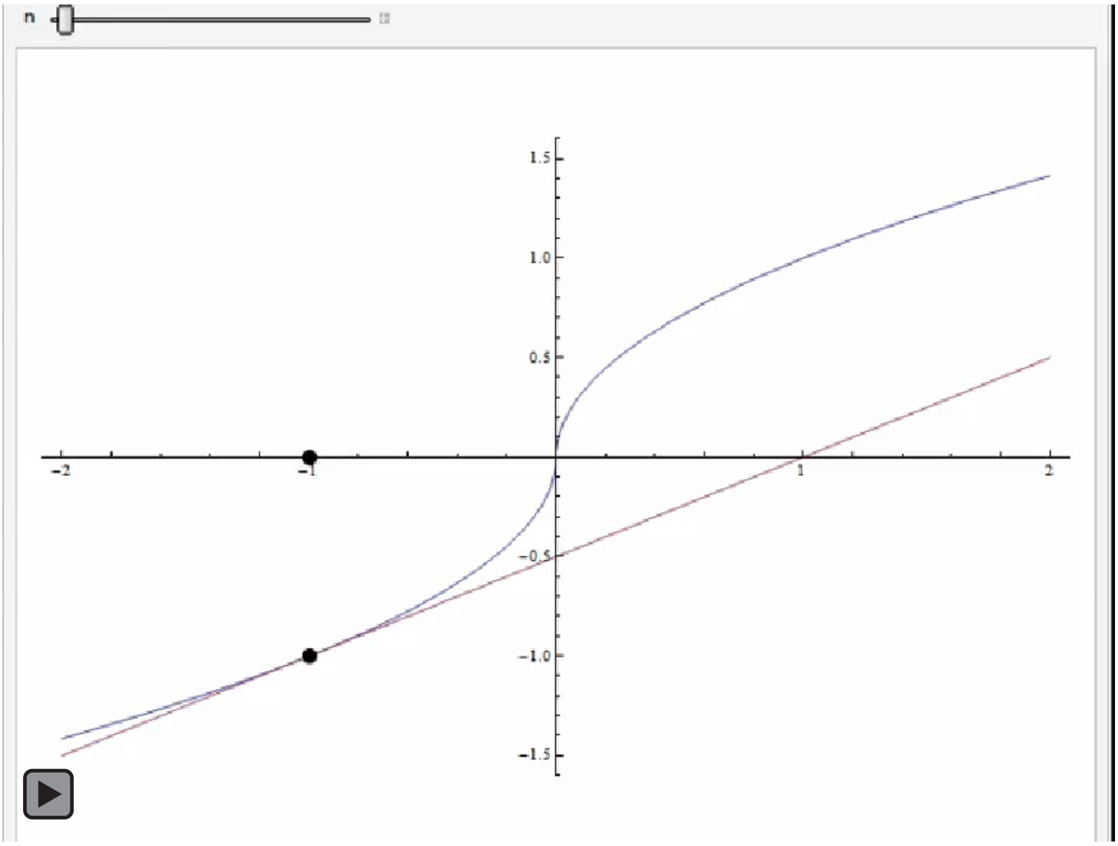
Následující animace ukazuje, jak se řešení aproximuje a jak jednotlivé kroky vznikají.

In[30]:=
```
For[n = 3, n < n0, n++, h[n] = h[n - 1] - f[h[n - 1]] / f'[h[n - 1]]];
Manipulate[Plot[{f[x], f[h[n]] + f'[h[n]] * (x - h[n])},
  {x, 0, 1},
  Epilog → {{PointSize[0.015], Point[{h[n], 0}]},
    {PointSize[0.015], Point[{h[n], f[h[n]]}]}},
  PlotRange → {-2, 3.5}], {n, 2, n0, 1}]
```



Následující animace ukazuje případ, kdy posloupnost aproximací nekonverguje. Ukažte případ, kdy absolutní hodnota aproximací bude konvergovat k nevlastnímu bodu.

```
Clear[g, k];
g[x_] := Piecewise[{{-Sqrt[-x], x < 0}, {Sqrt[x], x > +0}}];
k[2] = 1; For[n = 3, n < 7, n++,
 k[n] = k[n - 1] - g[k[n - 1]] / g'[k[n - 1]]];
Manipulate[Plot[{g[x], g[k[n]] + g'[k[n]] * (x - k[n])},
  {x, -2, 2}, PlotRange → {-1.6, 1.6},
  Epilog → {{PointSize[0.015], Point[{k[n], 0}]},
    {PointSize[0.015], Point[{k[n], g[k[n]]}]}}],
 {n, 2, 6, 1}]
```



Taylorovy polynomy

Taylorovy polynomy funkcí se pomocí programu *Mathematica* získají snadno, ale většinou se z nich těžko dá poznat zákonitost pro obecné vyjádření. Také zbytek je uveden ve tvaru, který lze těžko použít pro konvergenci.

```
Series[Sin[x], {x, 0, 10}]
```

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362\,880}+O\left(x^{11}\right)$$

```
Normal[%]
```

$$\frac{x^9}{362\,880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$$

```
Series[{Exp[x], Tan[x]}, {x, 0, 8}]
```

$$\left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40\,320} + O(x^9),\; x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + \frac{17\,x^7}{315} + O(x^9)\right\}$$

```
Series[Cos[4 x^3], {x, 0, 30}]
```

$$1 - 8\,x^6 + \frac{32\,x^{12}}{3} - \frac{256\,x^{18}}{45} + \frac{512\,x^{24}}{315} - \frac{4096\,x^{30}}{14\,175} + O(x^{31})$$

Chceme-li jen vypsat koeficienty Taylorovy řady, hodí se následující postup.

```
CoefficientList[Series[Cos[4 x^3], {x, 0, 30}], x]
```

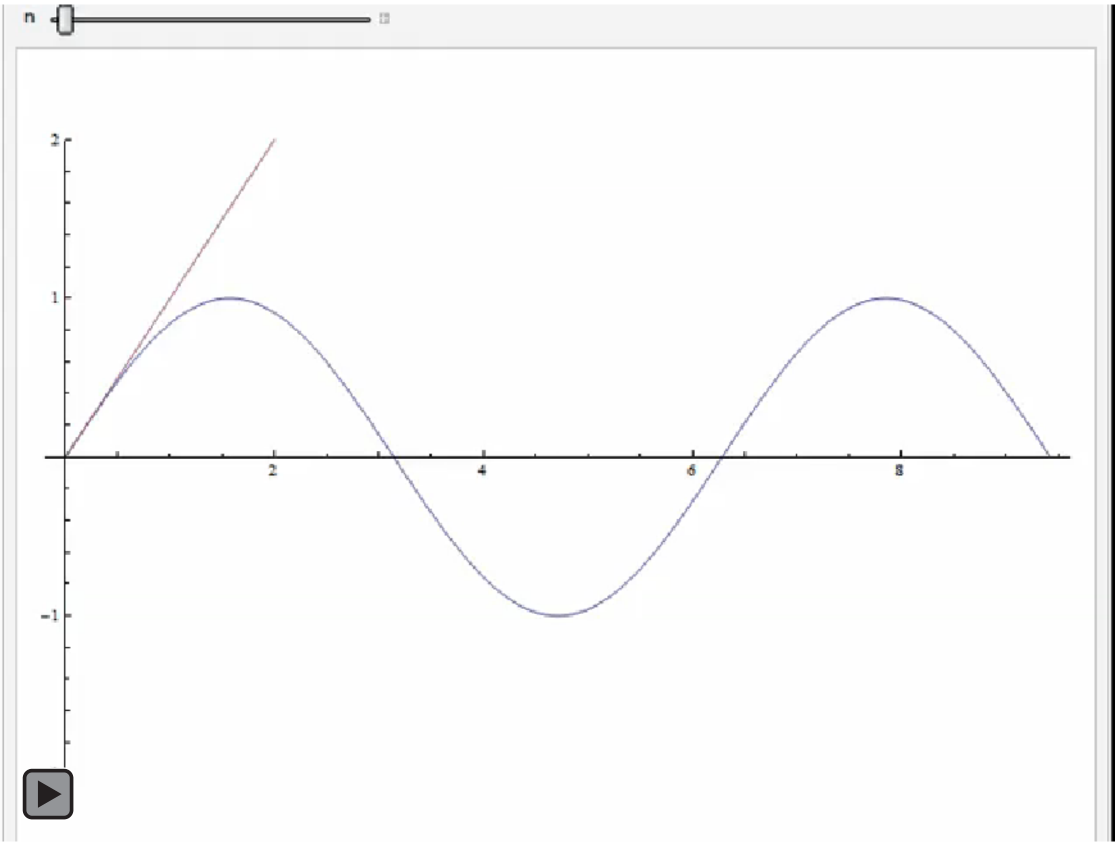
$$\left\{1, 0, 0, 0, 0, 0, -8, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{32}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{256}{45}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{512}{315}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{4096}{14\,175}\right\}$$

```
SeriesCoefficient[Series[Cos[4 x^3], {x, 0, 30}], 12]
```

$$\frac{32}{3}$$

Následující animace ukazuje, jak sice Taylorovy polynomy stále lépe aproximují danou funkci (v našem případě sinus), ale od jistého bodu se od funkce hodně vzdalují.

```
Manipulate[Plot[Evaluate[Normal[Series[Sin[x], {x, 0, n}]]],
  {x, 0, 3 Pi}, PlotRange → {-2, 2}], {n, 1, 15, 2}]
```



Polynomy můžeme vyjádřit pomocí mocnin v jiných bodech než v 0. Program automaticky píše stále stejný zbytek, i když je v tomto případě jasně nulový. Lze najít i Taylorovy polynomy se středem v nekonečnu.

```
Series[x^5 + 4 x - 1, {x, 2, 6}]
```

$$39 + 84\,(x-2) + 80\,(x-2)^2 + 40\,(x-2)^3 + 10\,(x-2)^4 + (x-2)^5 + O\big((x-2)^7\big)$$

```
Series[Exp[x], {x, 1, 8}]
```

$$e + e\,(x-1) + \frac{1}{2}\,e\,(x-1)^2 + \frac{1}{6}\,e\,(x-1)^3 + \frac{1}{24}\,e\,(x-1)^4 + \frac{1}{120}\,e\,(x-1)^5 + \frac{1}{720}\,e\,(x-1)^6 + \frac{e\,(x-1)^7}{5040} + \frac{e\,(x-1)^8}{40\,320} + O\big((x-1)^9\big)$$

```
Series[1 / (x - 1), {x, Infinity, 6}]
```

$$\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \left(\frac{1}{x}\right)^6 + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^7\right)$$

Taylorovy polynomy lze skládat, násobit, derivovat, použít na ně inverzní funkce, atd.

```
ComposeSeries[Series[Exp[x], {x, 0, 10}],
 Series[Sin[x], {x, 0, 10}]]
```

$$1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{15}-\frac{x^6}{240}+\frac{x^7}{90}+\frac{31\,x^8}{5760}+\frac{x^9}{5670}-\frac{2951\,x^{10}}{3\,628\,800}+O\left(x^{11}\right)$$

```
Series[Exp[Sin[x]], {x, 0, 10}]
```

$$1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{15}-\frac{x^6}{240}+\frac{x^7}{90}+\frac{31\,x^8}{5760}+\frac{x^9}{5670}-\frac{2951\,x^{10}}{3\,628\,800}+O\left(x^{11}\right)$$

```
Series[Tan[x], {x, 0, 10}]
```

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2\,x^5}{15}+\frac{17\,x^7}{315}+\frac{62\,x^9}{2835}+O\left(x^{11}\right)$$

```
InverseSeries[%, x]
```

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+O\left(x^{11}\right)$$

```
Series[ArcTan[x], {x, 0, 10}]
```

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+O\left(x^{11}\right)$$

```
D[Series[Sin[x], {x, 0, 10}], {x, 2}]
```

$$-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}+O\left(x^{9}\right)$$