Obyčejné diferenciální rovnice 2.řádu

Podíváme se na některé v textu probírané diferenciální rovnice. U některých jednoduchých rovnic, kde je potřeba diskuze (v postupu řešení je nutné dávat nějaké podmínky), může *Mathematica* nabídnout špatné řešení, jako tomu bylo u rovnice y'=$\sqrt{y}$. Lineární rovnice s konstantními koeficienty jsou řešeny dobře.

In[164]:=
```
DSolve[y''[x] == Sqrt[y[x]], y[x], x]
```
Out[164]=

$$\text{Solve}\left[\frac{y(x)^2\left(\frac{4\,y(x)^{3/2}}{3\,c_1}+1\right)\,{}_2F_1\!\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3};\frac{5}{3};-\frac{4\,y(x)^{3/2}}{3\,c_1}\right)^2}{c_1+\frac{4}{3}\,y(x)^{3/2}}=(c_2+x)^2,\ y(x)\right]$$

In[165]:=
```
DSolve[y''[x] == x Sqrt[y'[x]], y[x], x]
```
Out[165]=

$$\left\{\left\{y(x)\to\frac{c_1\,x^3}{12}+\frac{c_1^2\,x}{4}+c_2+\frac{x^5}{80}\right\}\right\}$$

In[166]:=
```
DSolve[y''[x] == y[x] y'[x], y[x], x]
```
Out[166]=

$$\left\{\left\{y(x)\to\sqrt{2}\,\sqrt{c_1}\,\tan\!\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,\sqrt{c_1}\,x+\sqrt{2}\,\sqrt{c_1}\,c_2\right)\right)\right\}\right\}$$

In[167]:=
```
DSolve[y''[x] + 4 y'[x] - 6 y[x] == Sin[x], y[x], x]
```
Out[167]=

$$\left\{\left\{y(x)\to c_1\,e^{\left(-2-\sqrt{10}\right)x}+c_2\,e^{\left(\sqrt{10}-2\right)x}+\frac{7\sin(x)+4\cos(x)}{\left(4\sqrt{10}-15\right)\left(15+4\sqrt{10}\right)}\right\}\right\}$$

In[168]:=
```
DSolve[y''[x] + y[x] == 1, y[x], x]
```
Out[168]=

$$\{\{y(x)\to c_2\sin(x)+c_1\cos(x)+1\}\}$$

In[169]:=
```
DSolve[y''[x] x^2 + x y'[x] - y[x] == x, y[x], x]
```
Out[169]=

$$\left\{\left\{y(x)\to \frac{c_1\left(x^2+1\right)}{2\,x}+\frac{i\,c_2\left(x^2-1\right)}{2\,x}+\frac{1}{4}\,x\,(2\log(x)-1)\right\}\right\}$$

U diferenciálních rovnic druhého a vyšších řádů je samozřejmě problém geometrické interpretace. Pro druhý řád je možné použít přechod na soustavy dvou diferenciálních rovnic a parametricky zadaných křivek. Rovnice u'''= f(t,u,u') je ekvivalentní soustavě x'=y, y'=f(t,x,y) a řešení lze brát jako křivku zadanou parametricky pomocí x=x(t). y=y(t). Je to však vhodnější jen pro homogenní rovnice.

Následující rovnici převedeme na soustavu a vybereme její partikulární řešení. Nakreslíme graf příslušné parametrické funkce a směrové pole soustavy.

In[170]:=
```
DSolve[u''[t] + u'[t] - 6 u[t] == 0, u[t], t]
```
Out[170]=

$$\left\{\left\{u(t)\to c_1\,e^{-3\,t}+c_2\,e^{2\,t}\right\}\right\}$$

In[171]:=
```
Clear[x, y];
sys = DSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == 6 x[t] - y[t]}, {x, y}, t]
```
Out[171]=

$$\left\{\left\{x\to\left(\{t\}\longmapsto \frac{1}{5}\,c_1\,e^{-3\,t}\left(3\,e^{5\,t}+2\right)+\frac{1}{5}\,c_2\,e^{-3\,t}\left(e^{5\,t}-1\right)\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.y\to\left(\{t\}\longmapsto \frac{6}{5}\,c_1\,e^{-3\,t}\left(e^{5\,t}-1\right)+\frac{1}{5}\,c_2\,e^{-3\,t}\left(2\,e^{5\,t}+3\right)\right)\right\}\right\}$$

In[172]:=
```
x1[t_] = x[t] /. sys /. {C[2] → 0, C[1] → 1}
```
Out[172]=

$$\left\{\frac{1}{5}\,e^{-3\,t}\left(3\,e^{5\,t}+2\right)\right\}$$

In[173]:=

```
y1[t_] = y[t] /. sys /. {C[2] → 0, C[1] → 1}
```

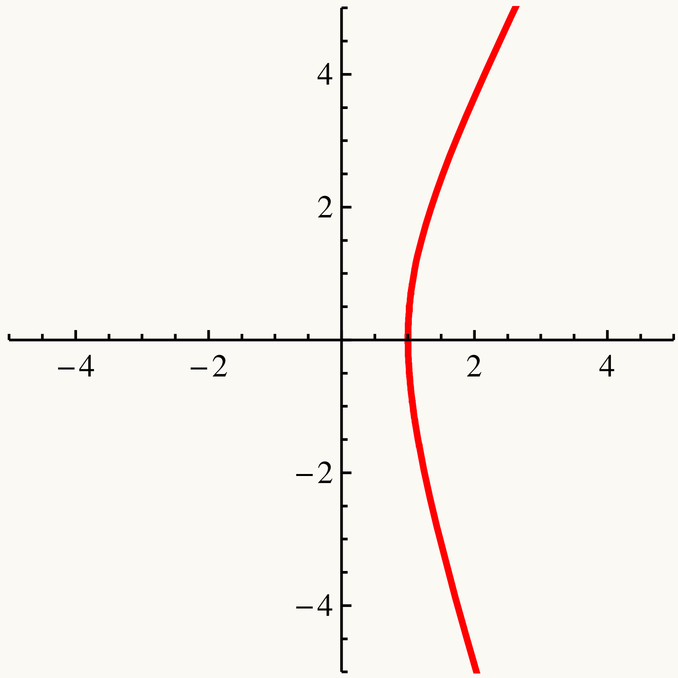
Out[173]=

$$\left\{\frac{6}{5} e^{-3t} \left(e^{5t} - 1\right)\right\}$$

In[174]:=

```
traj2 = ParametricPlot[{x1[t][[1]], y1[t][[1]]},
  {t, -1, 1}, PlotStyle → {Red, Thickness[.01]},
  PlotRange → 5, ImageSize → {250, 250}]
```

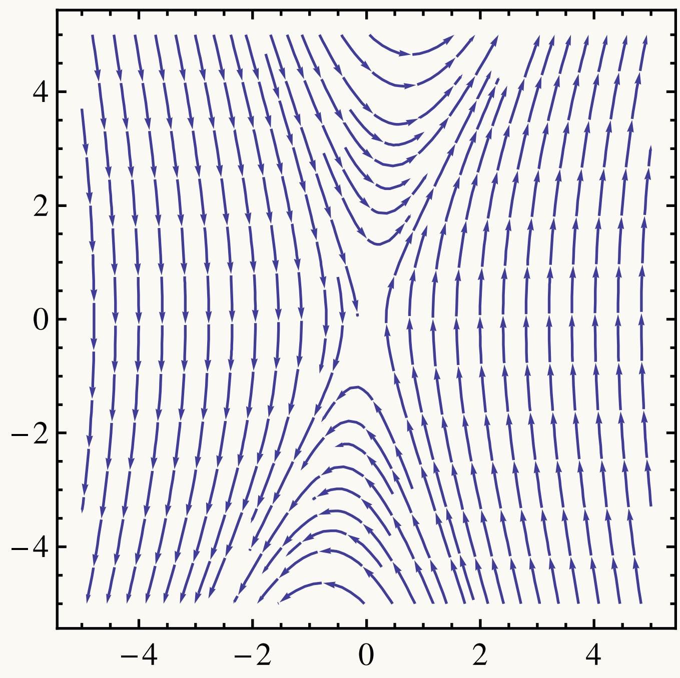
Out[174]=



In[175]:=

```
pol = StreamPlot[{y, 6 x - y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  ImageSize → {250, 250}]
```

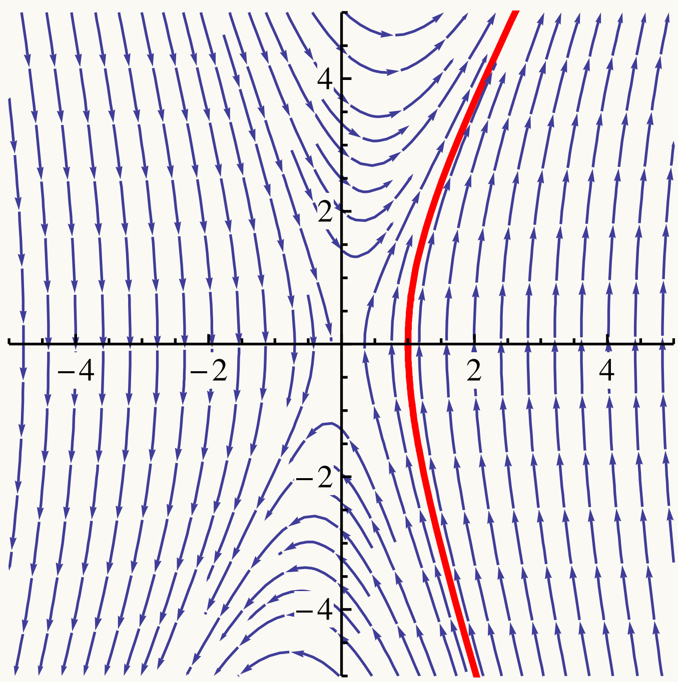
Out[175]=



In[176]:=

```
Show[{traj2, pol}]
```

Out[176]=

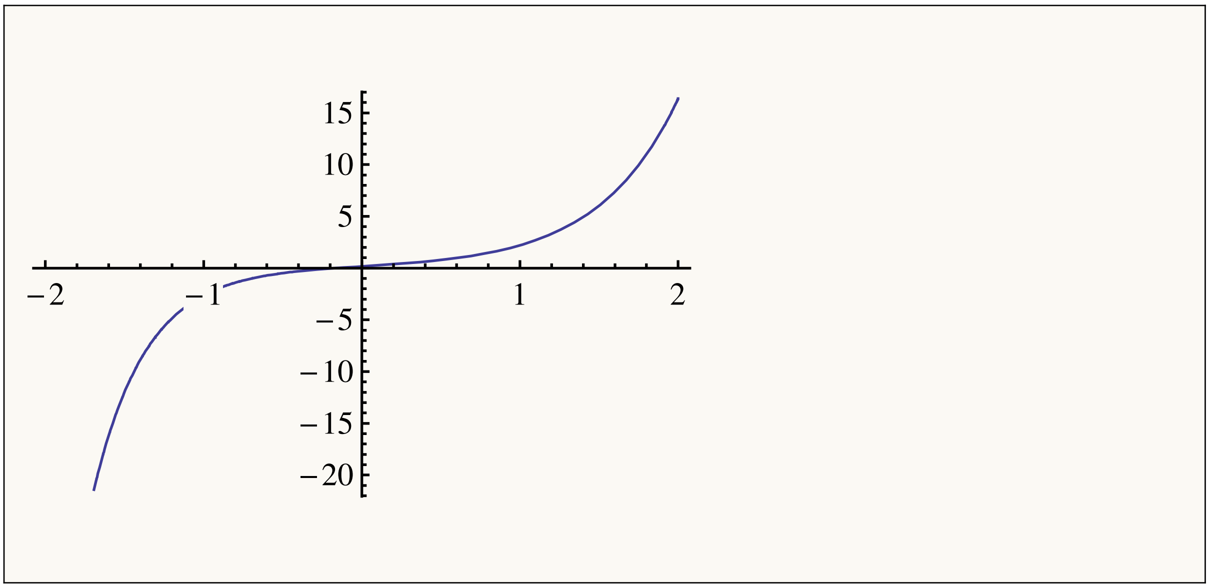


V jakém je vztahu uvedený postup k řešení původní rovnice? Vezměme jedno partikulární řešení (z výše uvedeného obecného řešení) a nakreslíme jeho graf.

In[177]:=
```
u[t_] := 3 Exp[2 t] / 10 - 2 Exp[-3 t] / 15
```

In[184]:=
```
Plot[u[t], {t, -2, 2}, ImageSize → {250, 200}]
```

Out[184]=



Sestavení soustavy rovnic z původní rovnice 2.řádu ukazuje, že výše uvedená parametrická křivka je totéž jako (u’(t),u’’(t)).

In[179]:=
```
ParametricPlot[{u'[t], u''[t]}, {t, -2, 2}, PlotRange → 5,
 ImageSize → {250, 250}]
```

Out[179]=