Soustavy diferenciálních rovnic

Postup při získávání přesného nebo přibližného řešení soustav diferenciálních rovnic je stejný jako u jednotlivých rovnic. Následující příklad homogenní soustavy lineárních rovnic je z textu skript. *Mathematica* vyřeší i nehomogenní lineární soustavu (někdy se speciální funkcí nebo s integrálem v závislosti na pravé straně.

In[2]:=
```
DSolve[{y'[x] == -7 y[x] + z[x], z'[x] == -2 y[x] - 5 z[x]},
 {y[x], z[x]}, x]
```

Out[2]=

$$\left\{\left\{y(x)\to c_2\, e^{-6x}\sin(x)+c_1\, e^{-6x}(\cos(x)-\sin(x)),\ z(x)\to c_2\, e^{-6x}(\sin(x)+\cos(x))-2\,c_1\, e^{-6x}\sin(x)\right\}\right\}$$

In[3]:=
```
DSolve[{y'[x] == -7 y[x] + z[x], z'[x] == -2 y[x] - 5 z[x]},
 {y, z}, x]
```

Out[3]=

$$\left\{\left\{y\to\left(\{x\}\longmapsto c_2\, e^{-6x}\sin(x)+c_1\, e^{-6x}(\cos(x)-\sin(x))\right),\ z\to\left(\{x\}\longmapsto c_2\, e^{-6x}(\sin(x)+\cos(x))-2\,c_1\, e^{-6x}\sin(x)\right)\right\}\right\}$$

In[4]:=
```
DSolve[{y'[x] == -7 y[x] + z[x] + Sin[x],
  z'[x] == -2 y[x] - 5 z[x]}, {y[x], z[x]}, x]
```

Out[4]=

$$\left\{\left\{y(x)\to c_2\, e^{-6x}\sin(x)+c_1\, e^{-6x}(\cos(x)-\sin(x))+\frac{1}{60}(3\sin(2x)-6\cos(2x)+5)(\cos(x)-\sin(x))-\frac{1}{60}\sin(x)(3\sin(2x)+9\cos(2x)-10),\right.\right.$$
$$\left.\left. z(x)\to -2\,c_1\, e^{-6x}\sin(x)+c_2\, e^{-6x}(\sin(x)+\cos(x))-\frac{1}{30}\sin(x)(3\sin(2x)-6\cos(2x)+5)-\frac{1}{60}(\sin(x)+\cos(x))(3\sin(2x)+9\cos(2x)-10)\right\}\right\}$$

Jak bylo uvedeno v obecné části této kapitoly, v geometrickém přístupu (možná lépe řečeno, ve fyzikálním přístupu) se berou funkce y,z jako dvě funkce určující parametrické zadání křivky. Pak je lépe změnit označení a psát x[t],y[t] jako příslušné funkce a t jako parametr (čas). Je-li soustava homogenní (tj. autonomní), probíhá řešení daným bodem stejně (nemění se s časem).

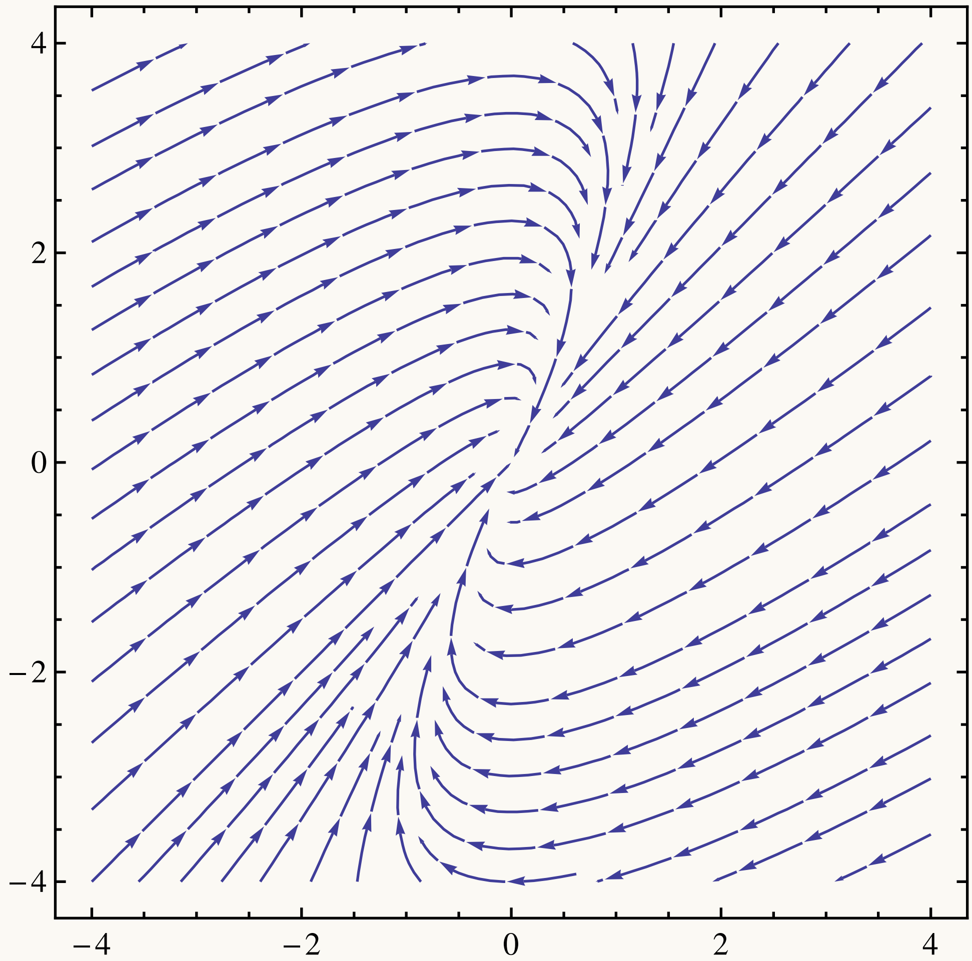
Nejdříve nakreslíme směrové pole, pak jedno řešení a vložíme ho do pole.

In[7]:=
```
ode = DSolve[{x'[t] == -3 x[t] + y[t], y'[t] == -2 x[t]},
  {x[t], y[t]}, t]
```

Out[7]= $\left\{\left\{x(t) \to c_2\, e^{-2t}\left(e^t-1\right)-c_1\, e^{-2t}\left(e^t-2\right),\ y(t)\to c_2\, e^{-2t}\left(2\, e^t-1\right)-2\, c_1\, e^{-2t}\left(e^t-1\right)\right\}\right\}$

In[28]:=
```
pole = StreamPlot[{-3 x + y, -2 x}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```

Out[28]=



In[13]:=
```
x1[t_] = x[t] /. ode[[1]]
y1[t_] = y[t] /. ode[[1]]
```

Out[13]= $c_2\, e^{-2t}\left(e^t-1\right)-c_1\, e^{-2t}\left(e^t-2\right)$

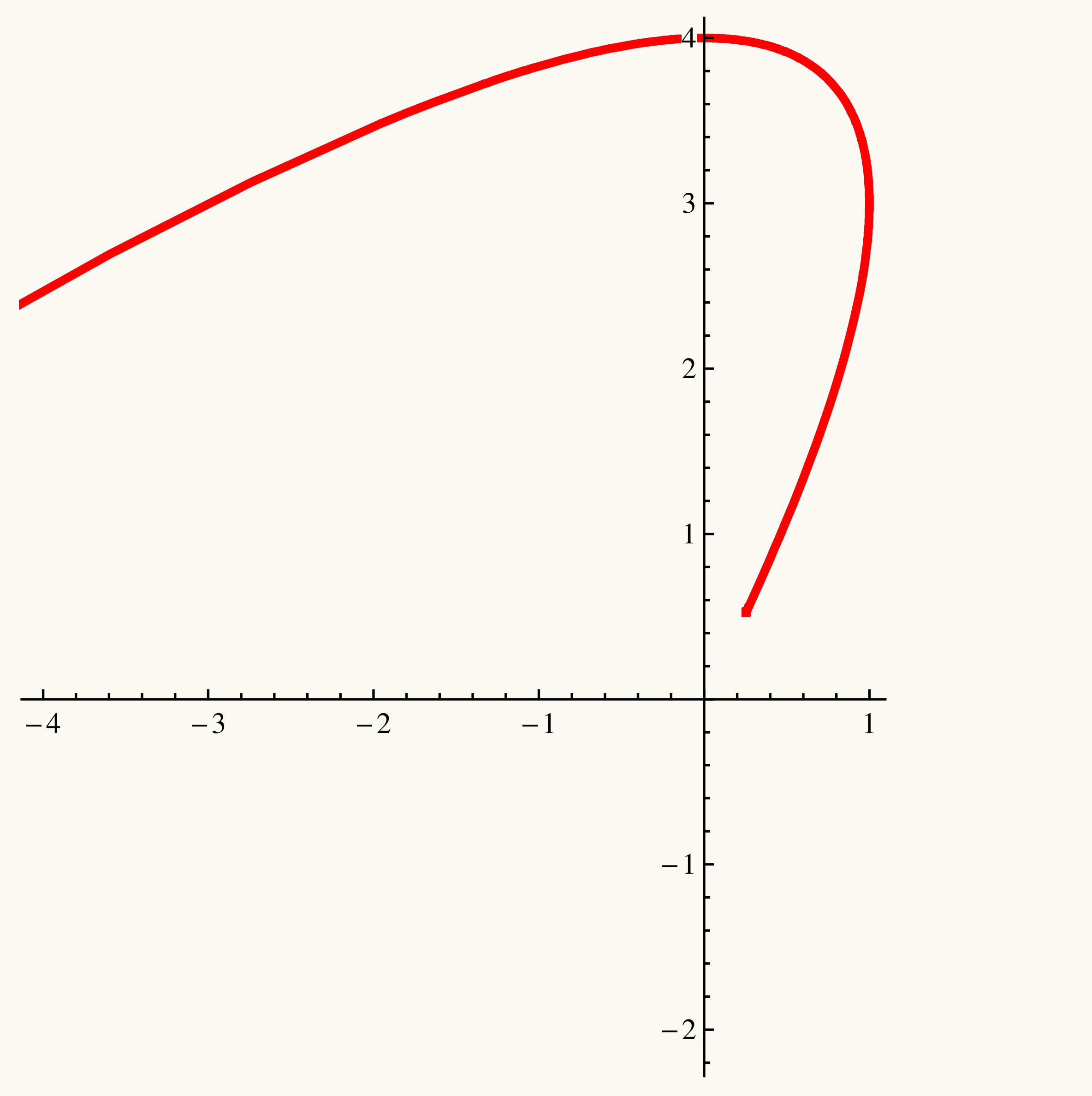
Out[14]= $c_2\, e^{-2t}\left(2\, e^t-1\right)-2\, c_1\, e^{-2t}\left(e^t-1\right)$

In[19]:=
```
x2[t_] = x1[t] /. {C[1] → 1, C[2] → 3}
y2[t_] = y1[t] /. {C[1] → 1, C[2] → 3}
```

Out[19]= $3\,e^{-2t}(e^t-1)-e^{-2t}(e^t-2)$

Out[20]= $3\,e^{-2t}(2\,e^t-1)-2\,e^{-2t}(e^t-1)$

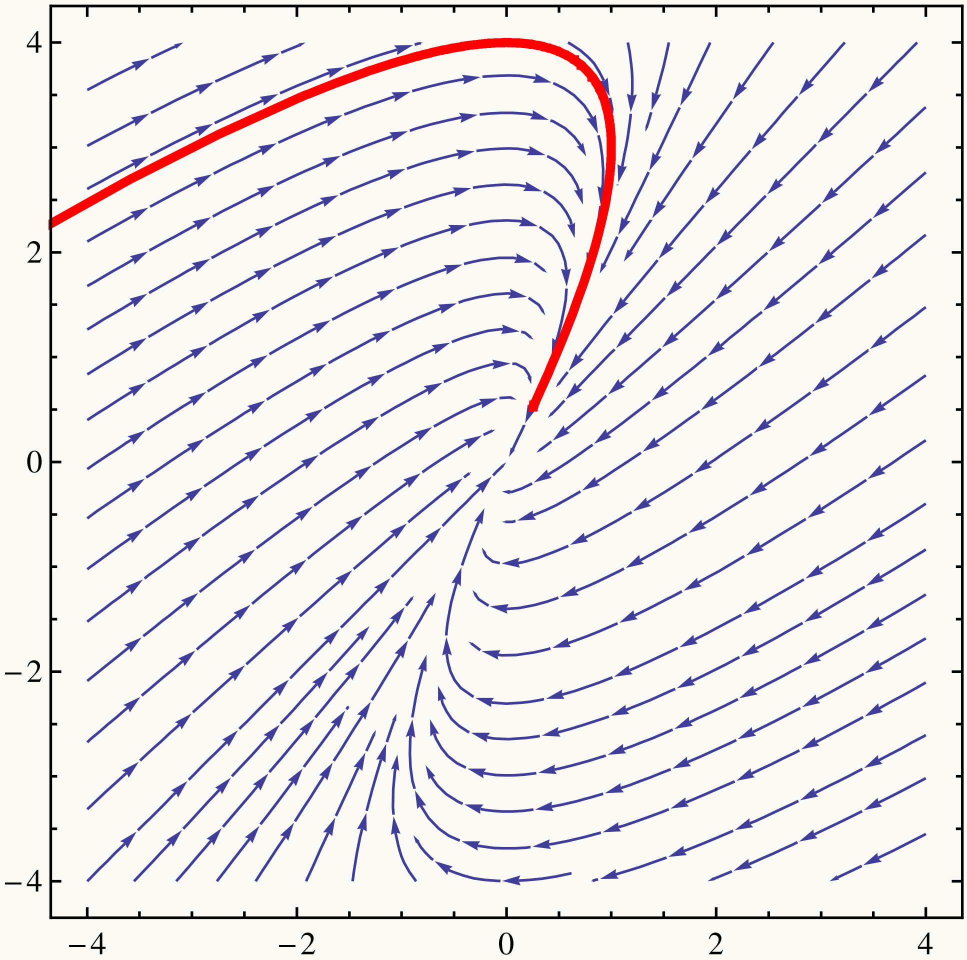
In[37]:=
```
traj = ParametricPlot[{x2[t], y2[t]}, {t, -1.5, 2},
  PlotStyle → {Red, Thickness[.01]}]
```

Out[37]=


In[32]:=

```
Show[pole, traj]
```

Out[32]=



V případě, že soustava není homogenní, průběh křivek se s časem mění.

In[52]:=
```
rov =
 DSolve[{x'[t] == -3 x[t] + y[t],
   y'[t] == -2 x[t] + 20 Sin[10 t]}, {x[t], y[t]}, t]
```

Out[52]=

$$\Big\{\Big\{x(t)\to c_1\left(-e^{-2t}\right)(e^t-2)+c_2\,e^{-2t}(e^t-1)-\frac{5\,e^{-t}(e^t-1)((101\,e^t-104)\sin(10\,t)+(1040-505\,e^t)\cos(10\,t))}{1313}+\frac{5\,e^{-t}(e^t-2)((101\,e^t-52)\sin(10\,t)+(520-505\,e^t)\cos(10\,t))}{1313},$$

$$y(t)\to -2\,c_1\,e^{-2t}(e^t-1)+c_2\,e^{-2t}(2\,e^t-1)-\frac{5\,e^{-t}(2\,e^t-1)((101\,e^t-104)\sin(10\,t)+(1040-505\,e^t)\cos(10\,t))}{1313}+\frac{10\,e^{-t}(e^t-1)((101\,e^t-52)\sin(10\,t)+(520-505\,e^t)\cos(10\,t))}{1313}\Big\}\Big\}$$

In[53]:=
```
FullSimplify[%]
```

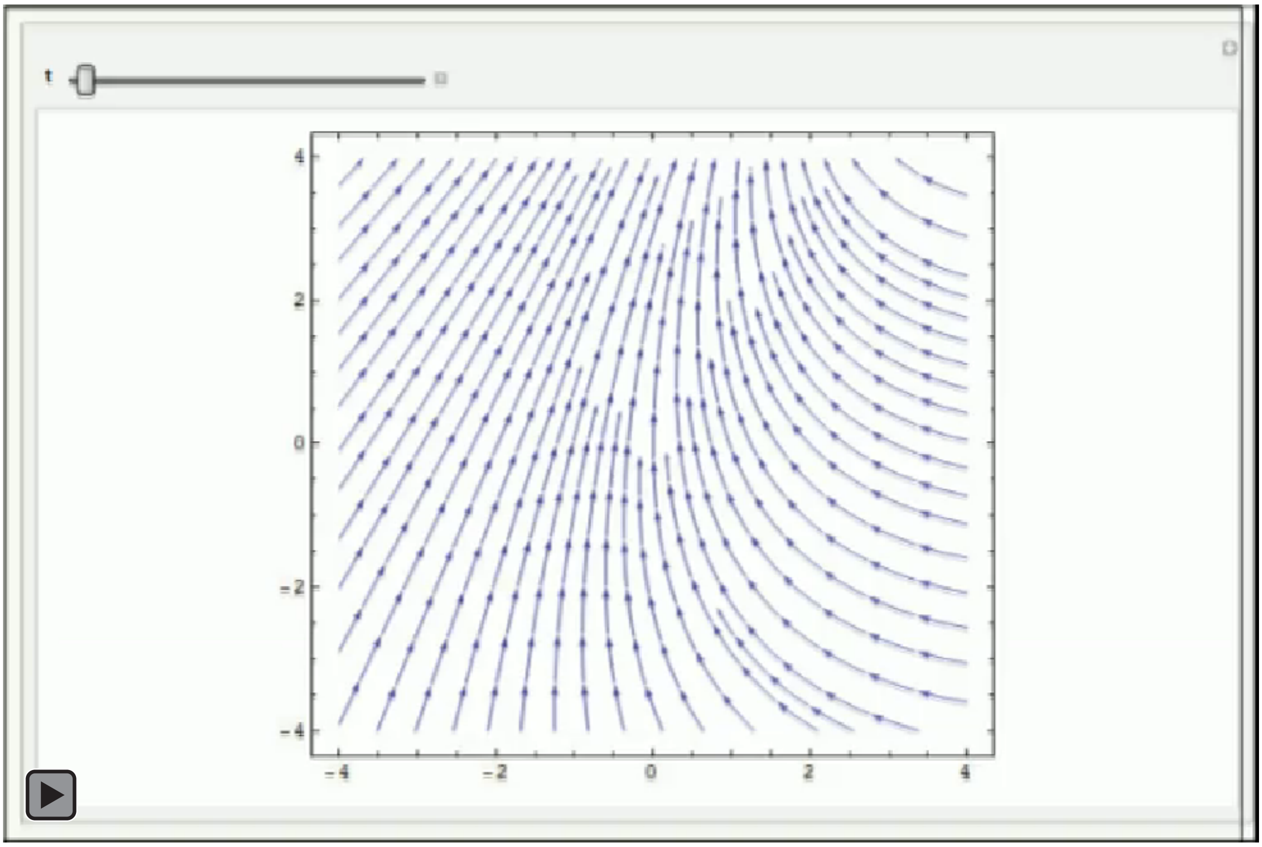
Out[53]=

$$\Big\{\Big\{x(t)\to e^{-2t}(c_2(e^t-1)-c_1(e^t-2))-\frac{245\sin(10\,t)}{1313}-\frac{75\cos(10\,t)}{1313},$$

$$y(t)\to e^{-2t}(c_2(2\,e^t-1)-2\,c_1(e^t-1))+\frac{15\sin(10\,t)}{1313}-\frac{2675\cos(10\,t)}{1313}\Big\}\Big\}$$

In[55]:=

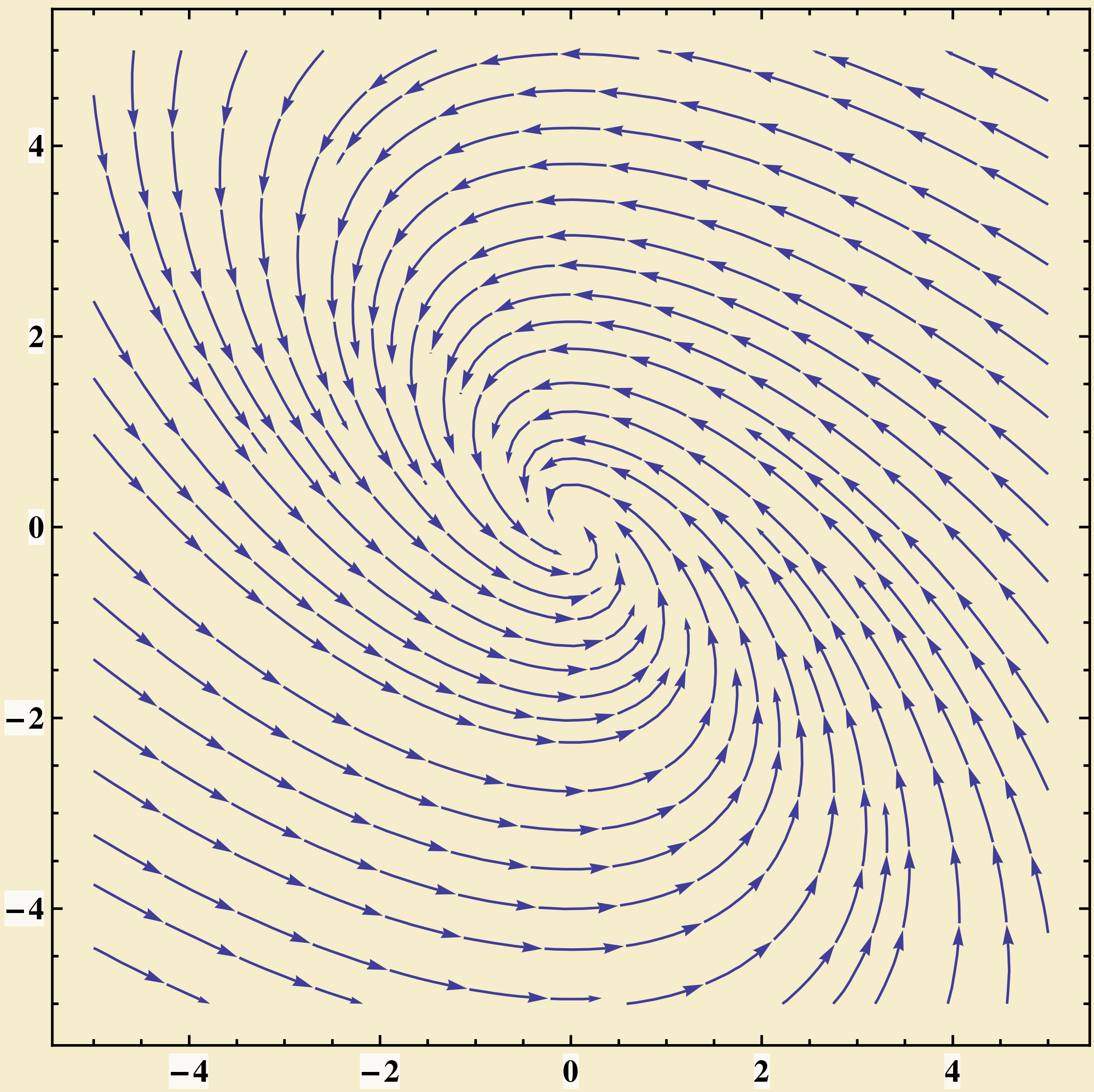
```
Manipulate[VectorPlot[{-3 x + y, -2 x + 20 Sin[10 t]},
   {x, -4, 4}, {y, -4, 4}], {t, -1, 1}]
```



Ukážeme nyní směrová pole homogenních soustav s různými stabilitami řešení okolo stacionárního bodu 0. Soustava x'=ax+by, y'=cx+dy má při různých volbách koeficientů a,b,c,d různou stabilitu.

In[2]:=

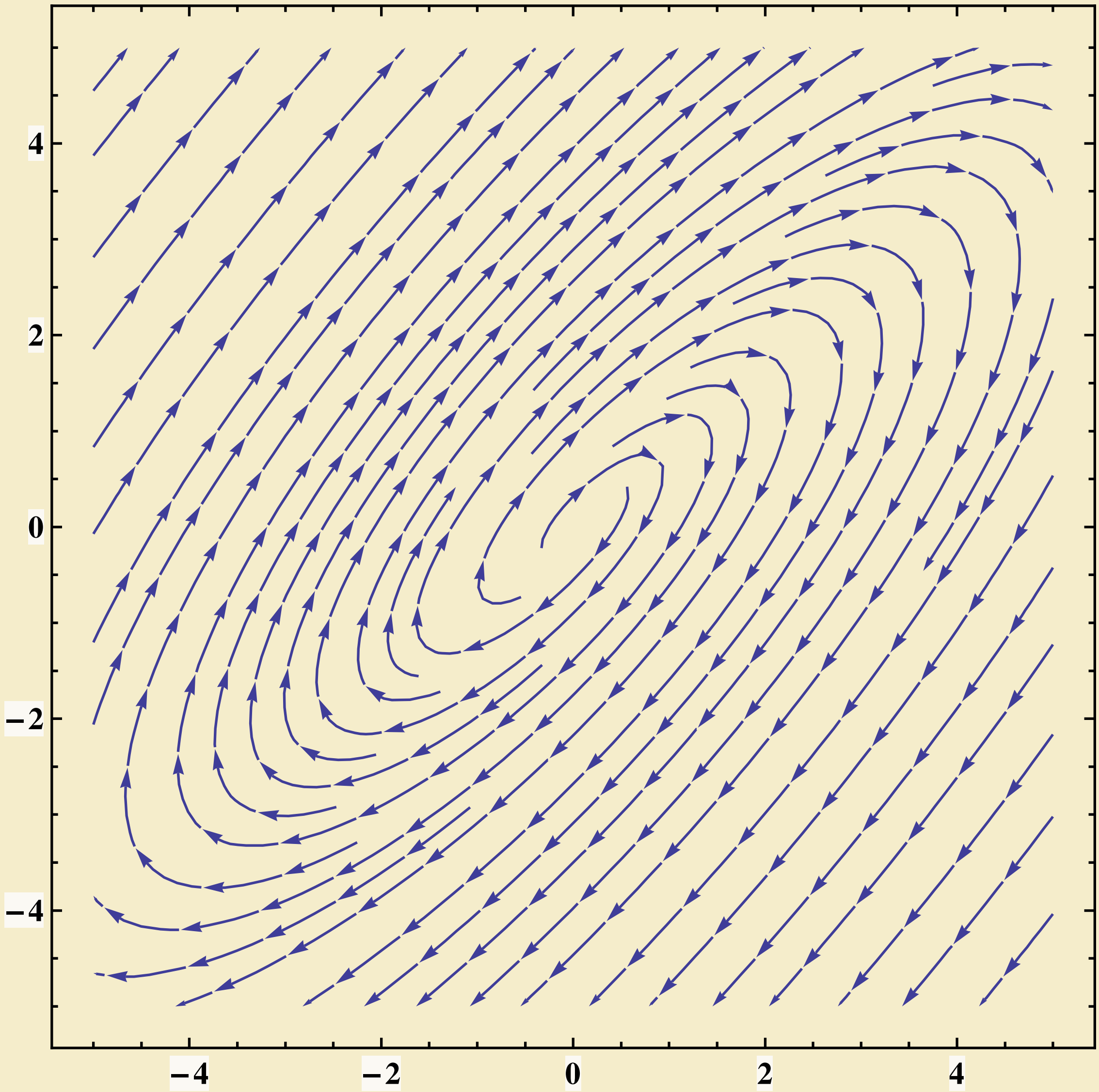
```
StreamPlot[{-x - y, x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



spirála (as.stabilní)

In[5]:=

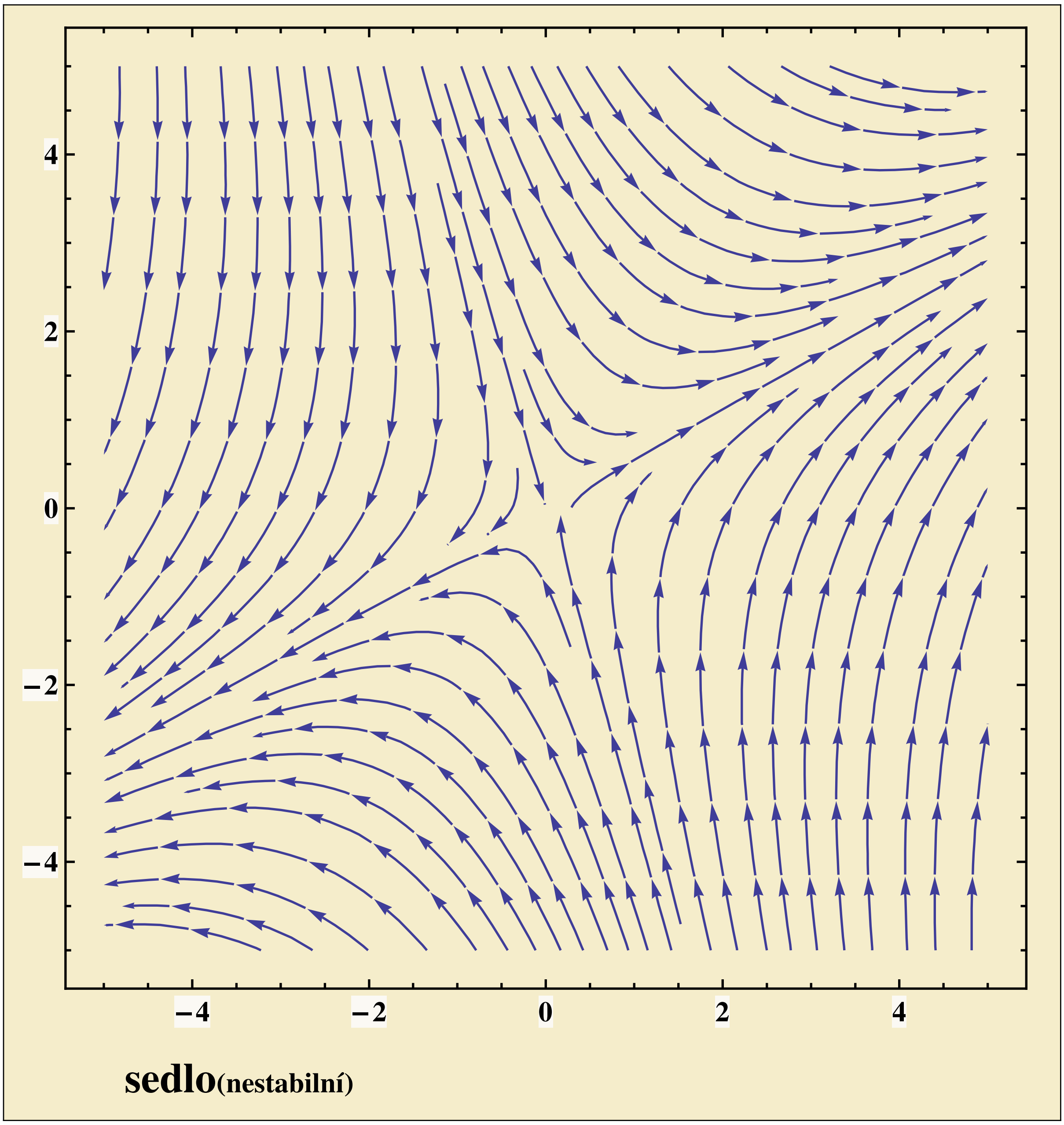
```
StreamPlot[{-3 x + 5 y, -5 x + 5 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



spirála (nestabilní)

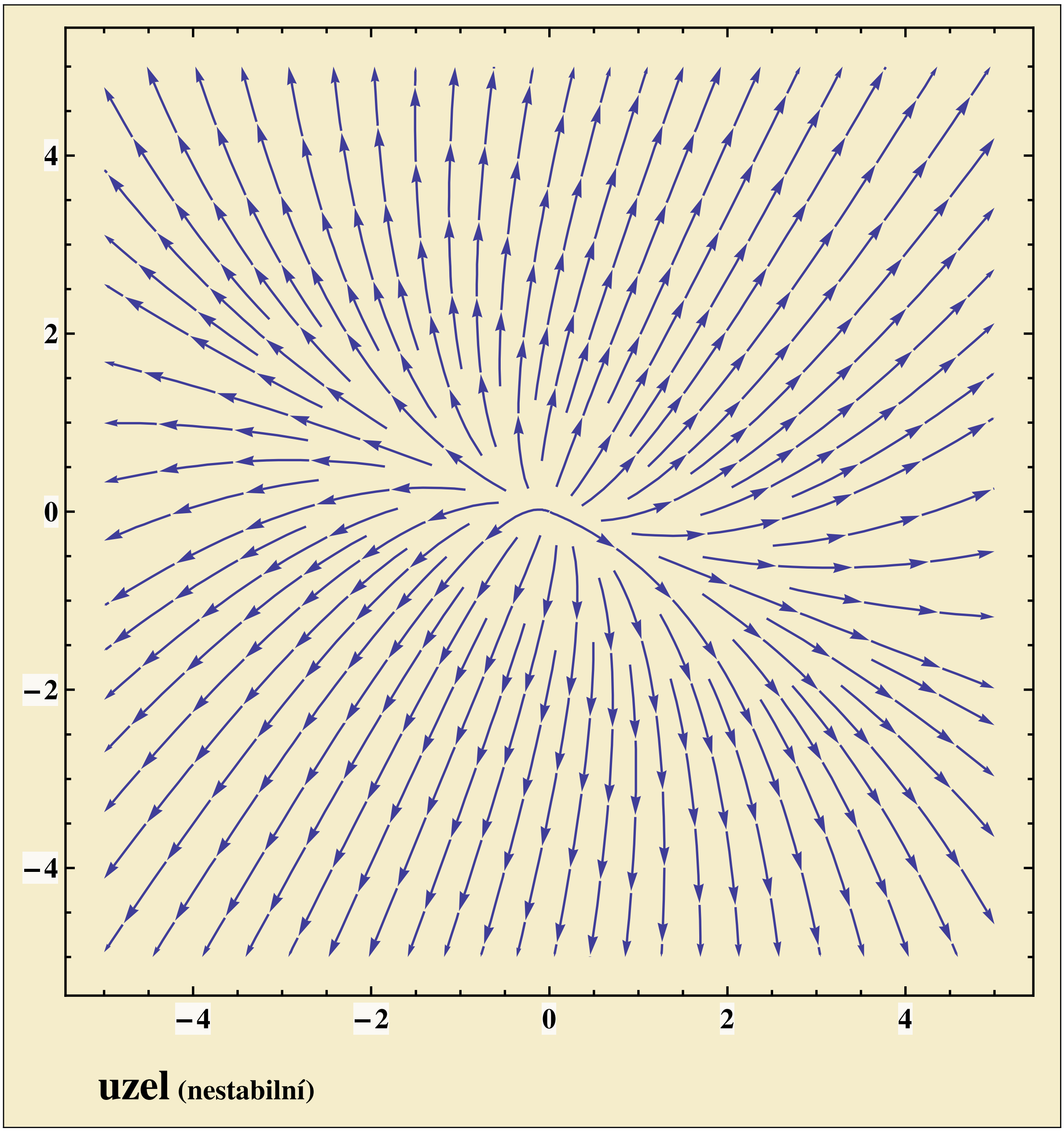
In[3]:=

```
StreamPlot[{x + y, 2 x - 2 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



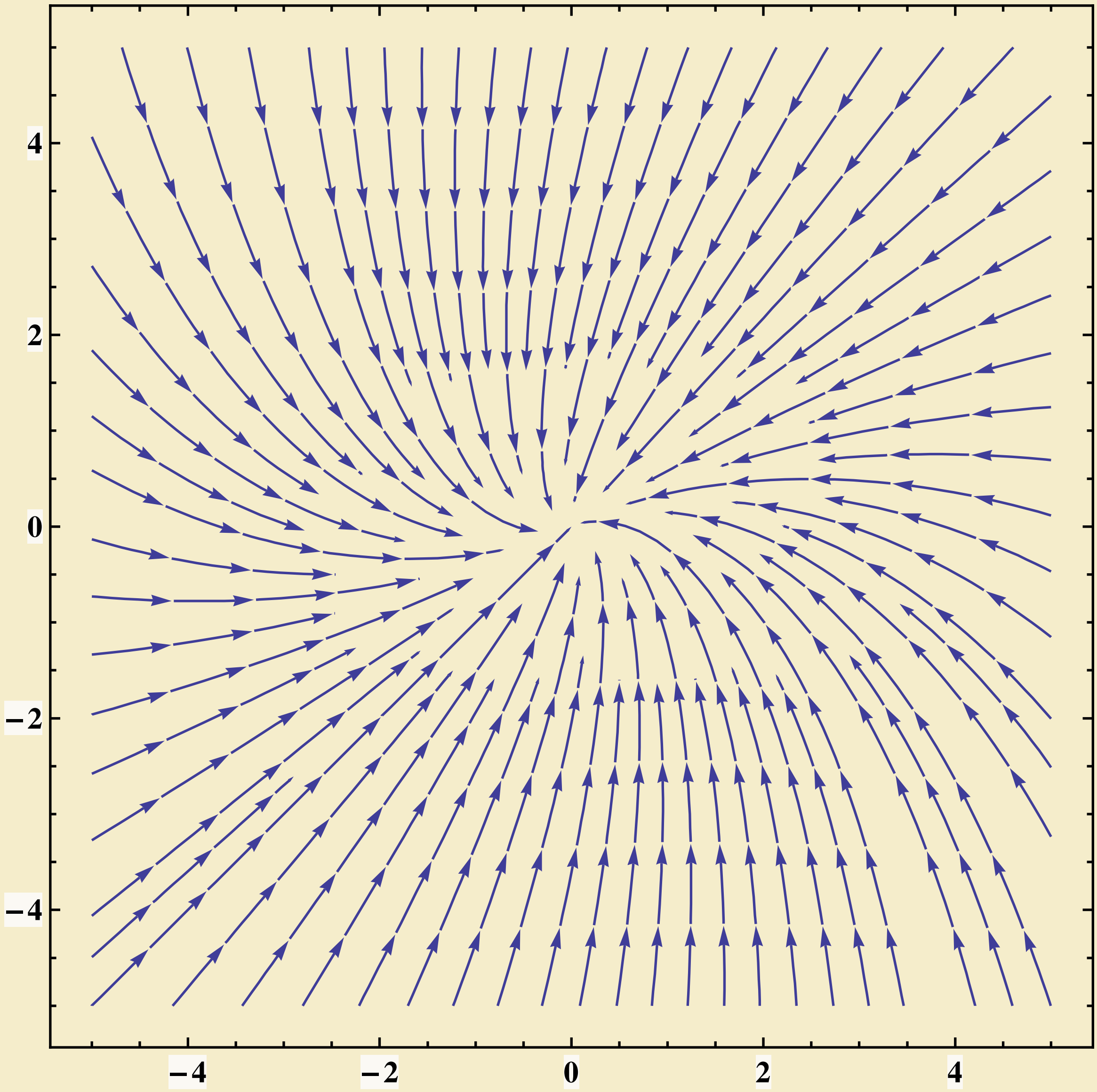
In[6]:=

```
StreamPlot[{3 x + y, x + 5 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



In[7]:=

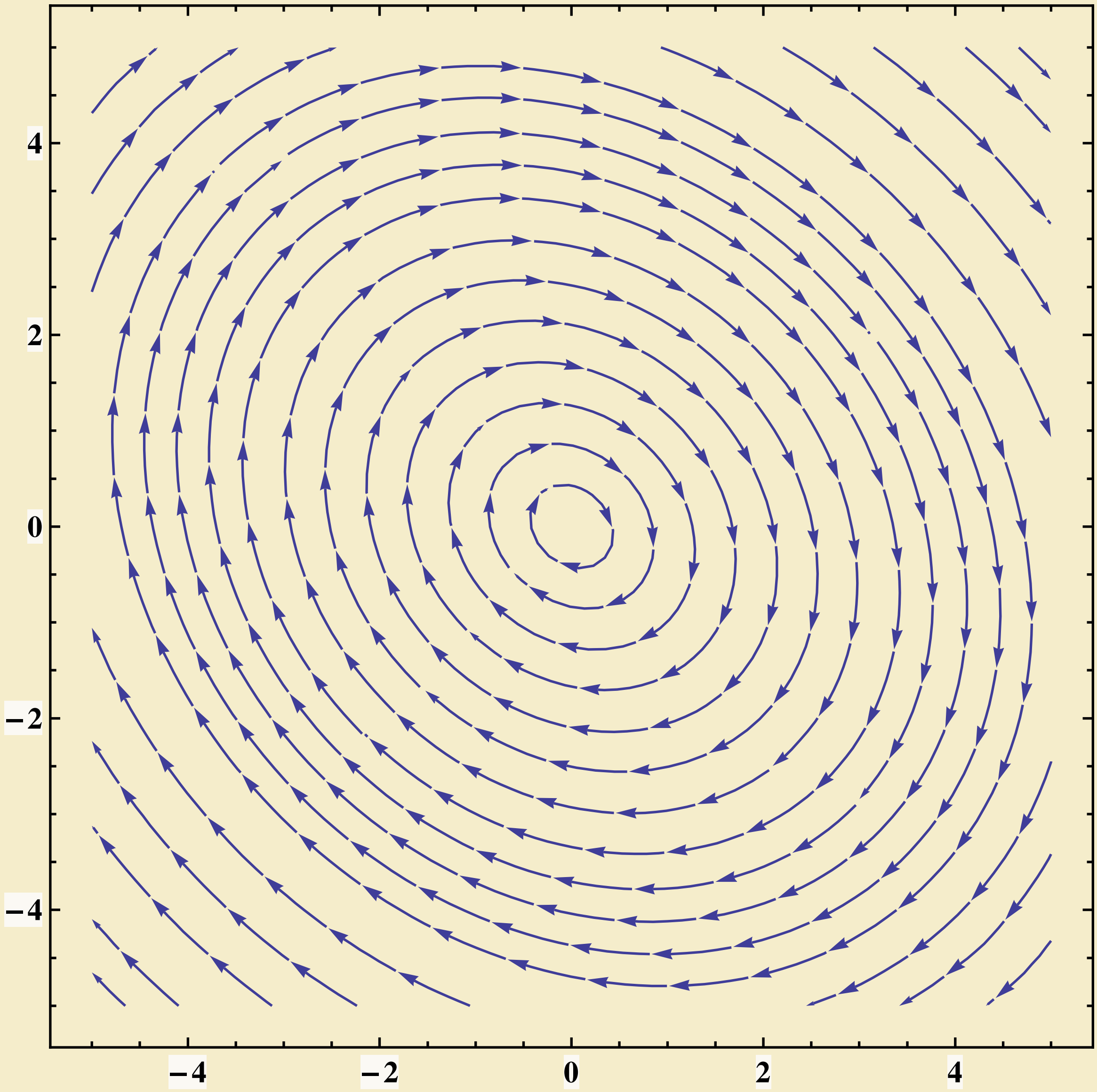
```
StreamPlot[{-3 x - y, x - 5 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



uzel (stabilní)

In[8]:=

```
StreamPlot[{ x + 5 y, -5 x - 1 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



střed (nestabilní)

Můžeme všechny uvedené případy shrnout do animace.

In[10]:=
```
Manipulate[
 m = {{a, b}, {c, d}};
 Show[StreamPlot[{a x + b y, c x + d y}, {x, -5, 5},
   {y, -5, 5}, ImageSize → {400, 400}]],
 {{a, 1, "a"}, -5, 5, Appearance → "Labeled"},
 {{b, 1, "b"}, -5, 5, Appearance → "Labeled"},
 {{c, 2, "c"}, -5, 5, Appearance → "Labeled"},
 {{d, -2, "d"}, -5, 5, Appearance → "Labeled"}]
```