Extrémy funkcí na otevřené množině

Kritické body

Zjistit kritické body znamená vyřešit soustavu rovnic (parciální derivace 1.řádu se rovnají 0) a zjistit, kde parciální derivace 1.řádu neexistují. U funkcí, kde parciální derivace existuje všude v definičním oboru tato druhá a složitěkší část odpadá. Ale i při řešení soustavy rovnic je nutné dávat pozor, protože *Mathematica* nemusí uvést všechna řešení soustavy.

```
f[x_, y_] := x^3 - 6 x - 6 x y + 6 y + 3 y^2
```

```
fx = D[f[x, y], x] // Simplify;
fy = D[f[x, y], y] // Simplify;
kritnul =
 Solve[{fx == 0, fy == 0, 1 < x < 3, -2 < y < 2}, {x, y}] // N
```

$\{\{x \to 2.,\ y \to 1.\}\}$

V kritických bodech zjistíme, jak se chová příslušná kvadratická forma. Zobrazíme v tabulce vlevo kritické body, v prostředním sloupci hodnotu druhé derivace f_{xx} podle x a ve třetím hodnotu $f_{xx}\, f_{yy}$- f_{xy}^2.

```
diskriminant =
  D[f[x, y], {x, 2}] * D[f[x, y], {y, 2}] -
    (D[f[x, y], x, y])^2 // Simplify;
```

$36\,(x-1)$

```
tab = Table[{{x, y}, D[f[x, y], {x, 2}], diskriminant} /.
   kritnul[[i]], {i, 1, Length[kritnul]}]
```

$$\begin{pmatrix} \{0.,\ -1.\} & 0. & -36. \\ \{2.,\ 1.\} & 12. & 36. \end{pmatrix}$$

Vidíme, že ve všech kritických bodech je kvadratická forma indefinitní a v těchto bodech je sedlo.

Předchozí postup se dá sepsat do procedury. Napíšeme ji jen pro hledání extrémů na obdélníku. Za meze a,b,c,d lze vzít funkce, ale je pak nutné ošetřit meze kreslených grafů. Pro použití se musí zadefinovat finkce a omezený obor (a,b)×(c,d), na kterém hledáme extrémy. Postup je určen pro finkce, které na daném oboru mají všude parciální derivace prvního řádu a nejsou problémy s vyřešením příslušných rovnic.

```
extrem[f_, a_, b_, c_, d_] :=
 (Clear[fx, fy, kritnul, kvadr1, kvadr2, body, xmin,
   xmax, ymin, ymax, decision, min, max];
  min = FindMinValue[{f[x, y], a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d}, {x, y}];
  max = FindMaxValue[{f[x, y], a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d}, {x, y}];
  fx = D[f[x, y], x] // Simplify;
  fy = D[f[x, y], y] // Simplify;
  kritnul =
   NSolve[{fx == 0, fy == 0, a < x < b, c < y < d}, {x, y}, Reals] //
    N;
  del = Length[kritnul];
  graf = Plot3D[f[x, y], {x, a, b}, {y, c, d},
    ImageSize → 400, PlotStyle → LightBlue];
  If[del == 0, Print["Žádné kritické body"] &&
    Print[graf] && Goto[end], Goto[next]];

  Label[next];
  kvadr1 = Table[D[f[x, y], {x, 2}] /. kritnul[[i]],
    {i, 1, del}];
  kvadr2 =
   Table[D[f[x, y], {x, 2}] * D[f[x, y], {y, 2}] -
      (D[f[x, y], x, y])^2 /. kritnul[[i]], {i, 1, del}];
  body = Table[{x, y, f[x, y]} /. kritnul[[i]], {i, 1, del}];
  s = Graphics3D[
    {Red, Table[Sphere[body[[i]], .15], {i, 1, del}]}] ;
  decision[u_, v_] := If[v > 0 && u > 0, "lokální minimum",
    If[v > 0 && u < 0, "lokální maximum",
     If[v < 0, "sedlo", "nerozhodnuto"]]];
  xmin = Min[Table[body[[i]][[1]], {i, 1, del}]] - 1;
  xmax = Max[Table[body[[i]][[1]], {i, 1, del}]] + 1;
  ymin = Min[Table[body[[i]][[2]], {i, 1, del}]] - 1;
  ymax = Max[Table[body[[i]][[2]], {i, 1, del}]] + 1;
  min2 = Min[Table[f[body[[i]][[1]], body[[i]][[2]]],
     {i, 1, del}]];
  max2 = Max[Table[f[body[[i]][[1]], body[[i]][[2]]],
     {i, 1, del}]];
```

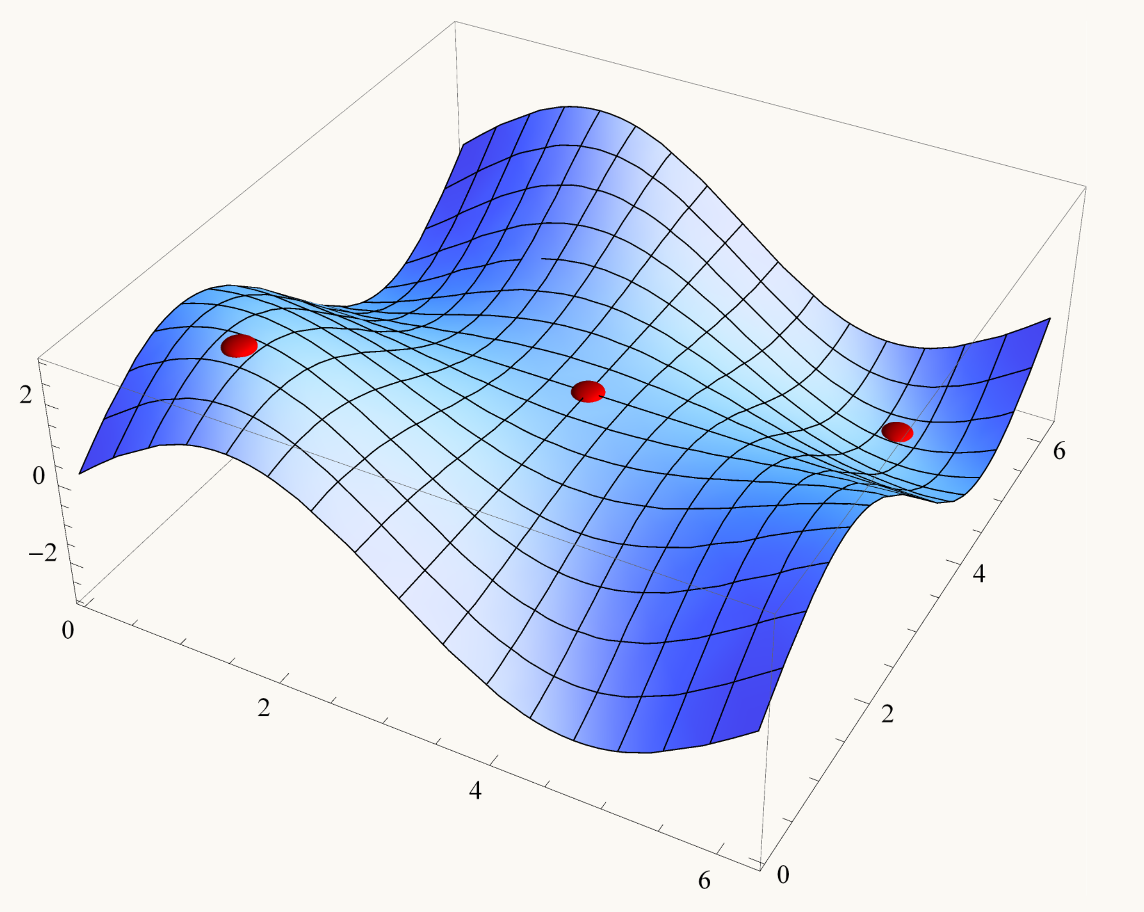
```
  pp =
   Show[{Plot3D[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},
      ImageSize → 400, PlotStyle → LightBlue,
      PlotRange → {min2 - .5, max2 + .5}], s}] ;
  Print[pp]
   Do[Print["V bodě (" , body[[i]][[1]], " , ",
     body[[i]][[2]], ") je ",
     decision[kvadr1[[i]], kvadr2[[i]]]], {i, 1, del}] ;

  Label[end];
 )
```

Zvolme nejdříve funkci, která má několik kritických bodů.

```
Clear[f, a, b, c, d];
f[x_, y_] := Sin[x] + Sin[y] + Sin[x + y];
a = 0; b = 2 Pi; c = 0;
d = 2 Pi;
```

```
extrem[f, a, b, c, d]
```



V bodě (1.0472 , 1.0472) je lokální maximum

V bodě (3.14159 , 3.14159) je sedlo

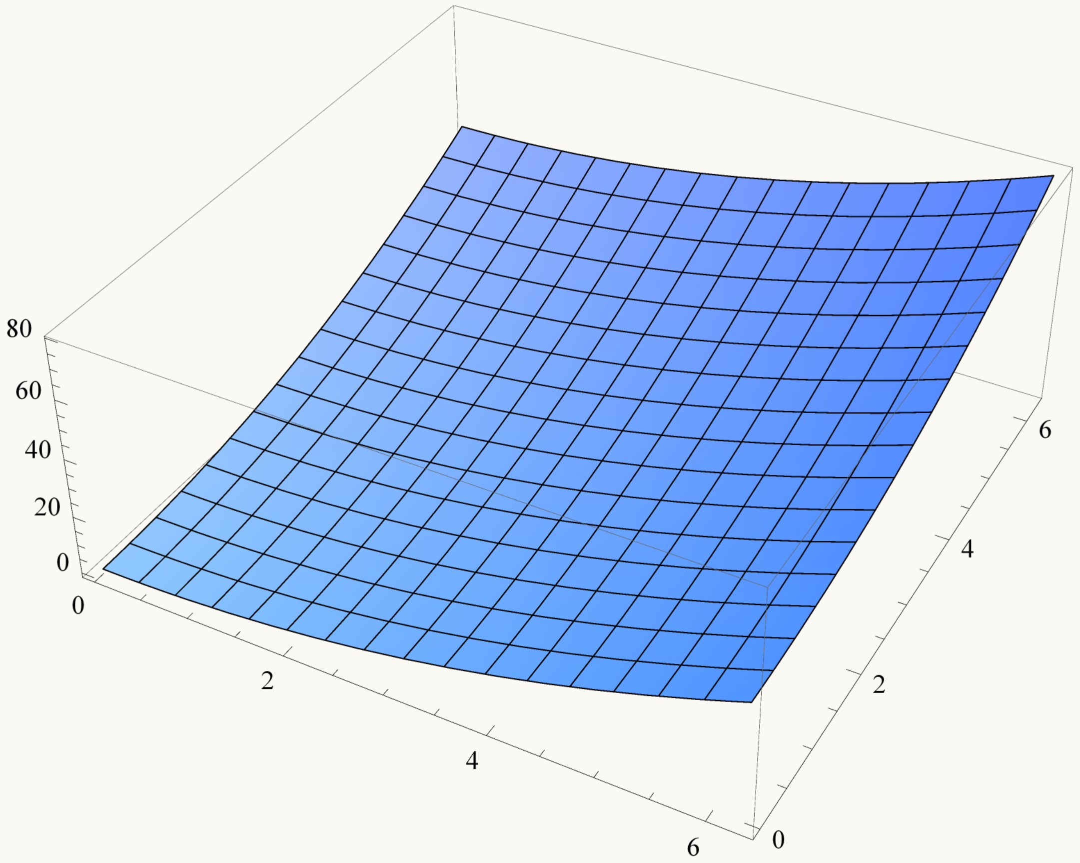
V bodě (5.23599 , 5.23599) je lokální minimum

Nyní zvolíme funkci bez kritických bodů.

```
Clear[f, a, b, c, d];
f[x_, y_] := x^2 + y^2;
a = 0; b = 2 Pi; c = 0;
d = 2 Pi;
```

```
extrem[f, a, b, c, d]
```

Žádné kritické body



Pokud v daném oboru existují body, ve kterých funkce nemá některou z parciálních derivací, musí se tyto body přidat do množiny kritických bodů. Pro funkce dvou a více proměnných bývá v matematických programech problém tyto body zjistit. Pomůže funkce Reduce, která aspoň napíše, kde jsou derivace definované. Pak je vhodné zjištěné body ručně přidat do množiny bodů s nulovými parciálními derivacemi. Pro tyto nové body ale nelze použít test kvadratické formy. Je možné nakreslit graf v okolí těchto nových bodů a odhadnout z grafu chování funkce.

```
Clear[f]; f[x_, y_] := Abs[x] + Abs[y];
```

```
D[f[x, y], x]
D[f[x, y], y]
```

$\mathrm{Abs}'(x)$

$\mathrm{Abs}'(y)$

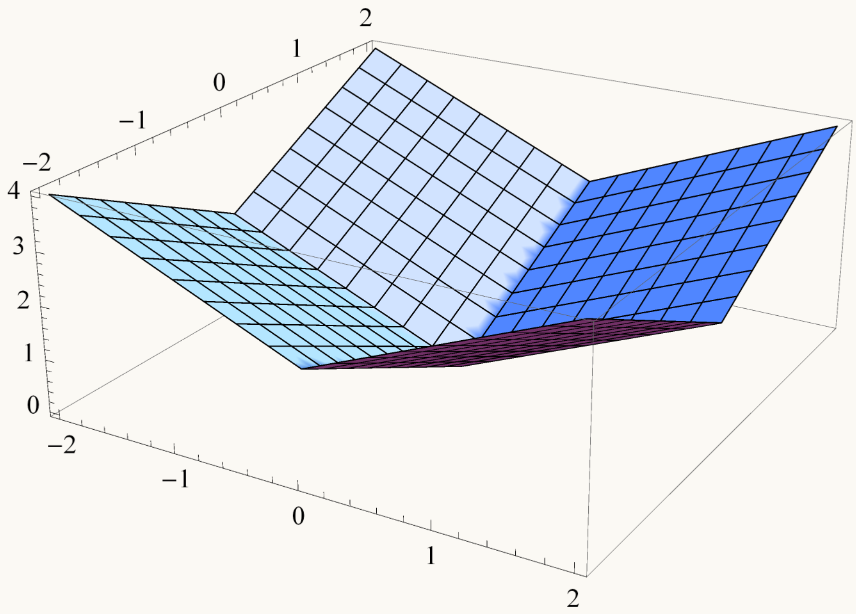
Derivaci absolutní hodnoty musíme počítat jinak.

```
D[Sqrt[x^2] + Sqrt[y^2], x]
D[Sqrt[y^2] + Sqrt[y^2], y]
```

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2}}$$

```
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Vidíme, že v bodě (0,0) je lokální (a snadno se nahlédne, že i globální) minimum.

Může se stát,, že program nevyřeší příslušnou soustavu rovnic, což je případ následující funkce.

Z grafu funkce ale extrémy rozeznáme a můžeme je zkusit lokalizovat.

```
f[x_, y_] := 1 / Sqrt[1 + x^2 + y^2] -
    4 x^2 y Exp[- (x^2 + y^2) / 2];
a = c = -3;
b = d = 3;
```

```
extrem[f, a, b, c, d]
```

— *NSolve::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to NSolve.* ≫

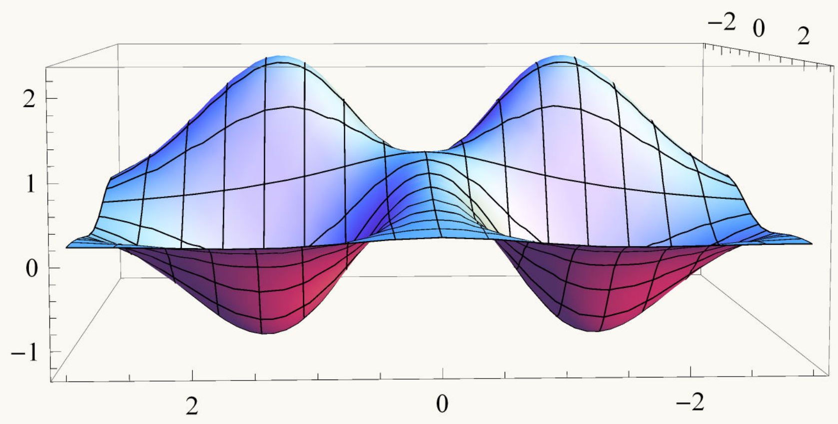
— *NSolve::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to NSolve.* ≫

— *NSolve::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to NSolve.* ≫

— *General::stop :*

Further output of NSolve::nsmet will be suppressed during this calculation. ≫

```
Plot3D[f[x, y], {x, a, b}, {y, c, d}]
```




```
FindMinimum[f[x, y], {x, 1}, {y, 2}]
```

$\{-1.29141, \{x \to 1.46263, \ y \to 1.03423\}\}$

```
FindMinimum[f[x, y], {x, 1.46}, {y, -1}]
```

— *FindMinimum::cvmit :*

Failed to converge to the requested accuracy or precision within 100 iterations. ≫

$\{2.23544 \times 10^{-13}, \{x \to 4.01636 \times 10^{12}, \ y \to -1.96978 \times 10^{12}\}\}$

```
FindMaximum[f[x, y], {x, -1}, {y, 1}]
```

$\{2.29184, \{x \to 1.36316, \ y \to -0.963899\}\}$

```
FindMaximum[f[x, y], {x, -1}, {y, -1}]
```

$\{2.29184, \{x \to -1.36316, \ y \to -0.963899\}\}$