0. Úvodní poznámky

Předpokládám znalost běžných základních pojmů z teorie metrických prostorů, jako je pojem uzávěru, otevřené množiny, souvislého prostoru apod. Většinu z nich včetně jejich základních vlastností lze nalézt např. v VI. kapitole Jarníkova Diferenciálního počtu II, mnohem více je obsaženo v Aleksandrovově Úvodu do obecné theorie množin a funkcí ([6]). Zatímco na tyto definice a věty nebudu odkazovat, budou v textu obsaženy odkazy na některá tvrzení z teorie dimenze, potřebná v posledních kapitolách; lze je nalézt např. v Kuratowského monografiích Topologie I a II.

Jako „věty" jsou označena podstatnější tvrzení vč. tvrzení důležitých pro další text, „poznámky" obsahují zřejmá nebo snadno dokazatelná tvrzení, důsledky a ilustrující příklady.

Označení a terminologie. Užívám stejné základní termíny jako V. Jarník v [7], až na to, že spolu s krátkým názvem „separabilní prostor" často říkám „prostor se spočetnou bází", protože mnohdy se potřebuje báze, nikoli hustá část. [1]) **Spočetná množina** je přitom množina, kterou lze prostě zobrazit do množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel; mezi spočetné množiny patří tedy všechny konečné množiny. Je-li V výroková funkce definovaná na množině X, říkáme, že $V(x)$ platí **pro téměř všechna** $x \in X$, platí-li pro každé $x \in X - S$, kde S je nějaká spočetná množina; říkáme, že $V(x)$ platí **pro skoro všechna** (zkratka: pro s.v.) $x \in X$, platí-li pro všechna $x \in X - K$, kde K je nějaká konečná množina. Je-li např. ze souvislosti zřejmé, že $X = \mathbb{N}$, říkáme zpravidla jen „pro s.v. n". Množinu všech celých čísel, racionálních čísel a (konečných) reálných čísel značíme po řadě $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Symbol $:=$ znamená, že výraz před ním je výrazem za ním definován. V dekadických, triadických, dyadických (obecně v p-adických) zlomcích píši zásadně tečky, nikoli čárky. [2])

Písmeno P (bez dalšího určení) značí **neprázdný metrický prostor s metrikou** ρ (v němž právě pracujeme nebo hodláme pracovat). Je-li $p \in P$, $A \cup B \subset P$, znamená $\rho(p, A)$ (resp. $\rho(A, B)$) **vzdálenost bodu** p **od množiny** A (resp. **vzdálenost množin** A, B). Kromě běžných znaků pro množinové operace užívám znaky $\operatorname{Int} M$, $H(M)$ a $\operatorname{der} M$ pro **vnitřek**, **hranici** a **derivaci** množiny M. $U(x, \varepsilon) := \{x' \in P;\ \rho(x', x) < \varepsilon\}$ (kde $\varepsilon > 0$) je **kruhové** epsilonové okolí bodu $x \in P$ v P, $U(M, \varepsilon) := \bigcup_{x \in M} U(x, \varepsilon)$ je **kruhové** okolí o poloměru ε množiny $M \subset P$. $U(x)$ (resp. $U(M)$) znamená (obecné) **okolí bodu** x (resp. množiny M), tj. *jakoukoli otevřenou* množinu obsahující bod x (resp. množinu M). Je-li $Q \subset P$ podprostor prostoru P, odlišíme okolí v P od okolí v Q tím, že pro okolí v P zachováme symbol U, zatímco okolí v Q budeme značit U_Q. Je $U_Q(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \cap Q$ pro každé $x \in Q$ a $U_Q(M, \varepsilon) = U(M, \varepsilon) \cap Q$ pro každou množinu $M \subset Q$. Je-li G množina otevřená v P, je $G \cap Q$ množina otevřená v Q; obráceně: pro každou množinu H otevřenou v Q existuje množina G otevřená v P tak, že $H = G \cap Q$. Je-li množina otevřená i uzavřená, říkáme, že je **obojetná**.

Množina $M \subset P$ je **hustá** (v P), je-li $M \cap G \neq \emptyset$ pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$. Množina $M \subset P$ je **řídká** (v P), je-li vnitřek jejího uzávěru prázdný. *Uzavřená množina je tedy řídká, právě když nemá žádné vnitřní body. Otevřená množina $N \subset P$ je hustá v P, právě když je její doplněk $P - N$ řídký v P.*

Řetězem množin budeme rozumět každou konečnou posloupnost $M_0, M_1, \ldots, M_s$, kde $M_{i-1} \cap M_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, 2, \ldots, s$; říkáme, že tento **řetěz spojuje body** a, b (**v** P), je-li $a \in M_0$, $b \in M_s$ a $M_i \subset P$ pro $i = 0, 1, \ldots, s$.

Znak $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (kde $n \in \mathbb{N}$) znamená **konečnou množinu** složenou z bodů $a_1, \ldots, a_n$. Podobně jako Whyburn v knize [5], Kuratowski v monografiích [1], [2] a Uryson v [4] většinou *nerozlišuji* (pokud se týká označení) bod p od jednobodové množiny $\{p\}$ a v obou případech píši zpravidla jen p; k nedorozumění nemůže dojít, protože aktuální význam písmene je vždy patrný ze souvislosti.

Symbol $X_1 \times \ldots \times X_n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) znamená kartézský součin množin $X_1, \ldots, X_n$; je-li $X_i = X$ pro $i = 1, \ldots, n$, značím tento kartézský součin X^n. Symbol $\mathbb{A}$ (podrobněji $\mathbb{A}^1$) bude značit množinu všech (konečných) reálných čísel s obvyklými aritmetickými operacemi a uspořádáním; $\mathbb{A}^n$ je **aritmetický**

[1]) Budeme pracovat jen v metrických prostorech, v nichž je existence husté spočetné části ekvivalentní s existencí spočetné báze.

[2]) Počítačové programy jako je Mathematica, Maple apod. k nám přicházejí ze Západu a dokud nebudeme tak silní, abychom na světovém fóru vytlačili jejich tečky a prosadili naše čárky, měli bychom se přizpůsobit a ušetřit si řadu potíží. V naší dávnější historii jsme ostatně tečky psali – do doby, kdy nám nějaká geniální normalizační komise naordinovala čárky.

n-**rozměrný prostor.** [3]) $\mathbb{R}^n$ je n-**rozměrný eukleidovský prostor**, tj. prostor $\mathbb{A}^n$ s **kartézskou normou** a **metrikou**: Je-li $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{A}^n$, je

$$(1) \qquad ||a|| := \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\,, \quad \rho(a,b) := ||a-b|| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \ldots + (b_n-a_n)^2}\,;$$

místo $\mathbb{R}^1$ se zpravidla píše jen $\mathbb{R}$.

Slovo „**úsečka**“ bude znamenat „uzavřenou úsečku“, nebude-li výslovně řečeno něco jiného; jsou-li a, b její krajní body, budeme ji značit $\langle a\,;b\rangle$; $(a\,;b)$ je příslušná **otevřená úsečka**, $\langle a\,;b)$, $(a\,;b\rangle$ příslušné **úsečky polouzavřené**.

Lomenou čarou v $\mathbb{R}^n$ budeme rozumět každou množinu tvaru

$$(2) \qquad L := \langle a_0\,; a_1\,; \ldots\,; a_p\rangle := \bigcup_{k=1}^{p} \langle a_{k-1}\,; a_k\rangle,$$

kde $p \in \mathbb{N}$ a kde body $a = a_0, a_1, \ldots, a_p = b$ leží v $\mathbb{R}^n$ a splňují podmínku $a_{k-1} \neq a_k$ pro $k = 1, \ldots, p$; budeme říkat, že **lomená čára** (2) **spojuje body** a, b. Budeme říkat, že lomená čára (2) je **prostá**, platí-li implikace

$$(3) \qquad 0 < k < p \;\Rightarrow\; \langle a_{k-1}\,; a_k\rangle \cap \langle a_k\,; a_{k+1}\rangle = a_k \quad \text{a} \quad 0 < i < j < p \;\Rightarrow\; \langle a_{i-1}\,; a_i\rangle \cap \langle a_j\,; a_{j+1}\rangle = \emptyset\,.$$

Snadno nahlédneme, že *prostota lomené čáry* (2) *je ekvivalentní s existencí prosté po částech lineární funkce* $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to_{\text{na}} L$.

* * *

I když předpokládáme, že čtenář **Cantorovo diskontinuum** a jeho vlastnosti zná, zopakujeme příslušnou konstrukci, abychom v dalším mohli užívat označení, která při této příležitosti zavedeme.

„Aritmetická“ definice Cantorova diskontinua je velmi jednoduchá: Je to množina všech čísel

$$(4) \qquad x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}\,, \quad \text{kde } i_n \in \{0,1\} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Jinými slovy: Cantorovo diskontinuum se skládá právě ze všech čísel z intervalu $\langle 0,1\rangle$, která mají triadický rozvoj $0\,.i_1 i_2 \ldots i_n \ldots$, kde $i_n \neq 1$ pro každé n. Ještě jinak: Cantorovo diskontinuum je rovno $\langle 0,1\rangle - M$, kde M je množina všech čísel, v jejichž triadickém zlomku *musí být* aspoň na jednom místě cifra 1. Připomeňme, že triadicky racionální čísla z intervalu $(0,1)$ lze napsat dvojím způsobem, protože

$$(5_1) \qquad 0\,.i_1 i_2 \ldots i_n = 0\,.i_1 i_2 \ldots (i_n - 1)222\ldots\,, \quad \text{je-li } i_n \in \{1,2\}.$$

Čísla

$$(5_2) \qquad 0 = 0\,.000\ldots\,, \; \tfrac{1}{3} = 0\,.1000\ldots = 0\,.0222\ldots\,, \; \tfrac{2}{3} = 0\,.1222\ldots = 0\,.2000\ldots\,, \; 1 = 0\,.222\ldots$$

tedy patří do Cantorova diskontinua stejně jako čísla

$$(5_3) \qquad 0\,.020202\ldots = \tfrac{1}{4} \quad \text{a} \quad 0\,.202020\ldots = \tfrac{3}{4}\,.$$

Popišme nyní Cantorovo diskontinuum „geometricky“: Interval $\Delta := \langle 0,1\rangle$ rozdělme na tři stejně dlouhé intervaly a označme

$$(6) \qquad \Delta(0) := \langle 0, \tfrac{1}{3}\rangle\,, \; J := (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})\,, \; \Delta(1) := \langle \tfrac{2}{3}, 1\rangle.$$

Z nerovností

$$(7) \qquad 0\,.0 i_2 \ldots i_k \ldots \le 0\,.0222\ldots = \tfrac{1}{3}, \quad 0\,.2 i_2 \ldots i_k \ldots \ge 0\,.2000\ldots = \tfrac{2}{3}$$

ihned plyne, že první cifra (za triadickou tečkou) čísel z intervalu J *musí být* 1, takže Cantorovo diskontinuum neobsahuje žádný bod z tohoto intervalu. Je tedy obsaženo v množině $\Delta(0) \cup \Delta(1)$.

[3]) Aritmetický prostor považujeme mlčky za prostor lineární s obvyklou definicí součtu dvou bodů (vektorů) a součinu bodu (vektoru) a čísla.

Každý z intervalů $\Delta(i_1)$ rozdělme opět na tři stejně dlouhé intervaly, první resp. třetí uzavřený interval označme $\Delta(i_1, 0)$ resp. $\Delta(i_1, 1)$, zatímco $J(i_1)$ je prostřední otevřený interval. Je tedy

$$\begin{aligned} &\Delta(0,0) := \langle 0, \tfrac{1}{9} \rangle\,, \ J(0) := (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9})\,, \ \Delta(0,1) := \langle \tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3} \rangle\,, \\ &\Delta(1,0) := \langle \tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9} \rangle\,, \ J(1) := (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9})\,, \ \Delta(1,1) := \langle \tfrac{8}{9}, 1 \rangle\,; \end{aligned} \tag{8}$$

snadno zjistíme, že zatímco při triadickém zápisu čísel z intervalů $\Delta(i_1, i_2)$ nepotřebujeme cifru 1 na prvních dvou místech, cifra 1 *musí být* na druhém triadickém místě čísel z intervalů $J(0), J(1)$.

V n-tém kroku budeme mít uzavřené intervaly

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \langle 0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n), 0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n) + 3^{-n} \rangle\,, \tag{9}$$

kde $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$, a otevřené intervaly

$$J\,,\ J(i_1)\,,\ J(i_1, i_2)\,,\ \ldots\,,\ J(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})\,; \tag{10}$$

intervaly uvedené v řádcích (9) a (10) jsou disjunktní a jejich sjednocením je $\langle 0, 1 \rangle$. V dalším kroku rozdělíme každý z intervalů (9) na tři stejně dlouhé intervaly; první a třetí jsou

$$\begin{aligned} &\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n, 0) = \langle 0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n), 0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n) + 3^{-n-1} \rangle\,, \\ &\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n, 1) = \langle 0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n) + 2 \cdot 3^{-n-1}, 0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n) + 3^{-n} \rangle\,, \end{aligned} \tag{11}$$

druhý je roven

$$J(i_1, i_1, \ldots, i_n) = (0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n) + 3^{-n-1}, 0.(2i_1)(2i_2)\ldots(2i_n) + 2 \cdot 3^{-n-1})\,. \tag{12}$$

Zatímco každý bod z prvního (resp. z druhého) intervalu v (11) lze napsat jako triadický zlomek, jehož $(n+1)$-ní cifra je 0 (resp. 2), body z intervalu (12) musí mít $(n+1)$-ní cifru rovnou 1.

Je zřejmé, že pro každou posloupnost $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $i_n \in \{0, 1\}$ pro každé n, je bod (4) jediným bodem průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(i_1, \ldots, i_n)\,, \tag{13}$$

takže Cantorovo diskontinuum Δ lze napsat ve tvaru

$$\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n\,, \quad \text{kde} \quad \Delta_n := \bigcup_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n} \Delta(i_1, \ldots, i_n)\,. \tag{14}$$

Čtenář, který zná definici a základní vlastnosti (jednorozměrné) Lebesgueovy míry μ, ihned vidí, že pro $\mu(\Delta_n)$, tj. pro součet délek všech intervalů, jejichž sjednocením je Δ_n, platí relace

$$\mu(\Delta_n) = (\tfrac{2}{3})^n \to 0 \ \text{ pro } \ n \to \infty\,, \tag{15}$$

z níž plyne, že

$$\mu(\Delta) = 0\,. \tag{16}$$

Cantorovo diskontinuum je přitom nespočetná množina, protože oborem hodnot funkce f, jejíž hodnotou v bodě (4) je číslo

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}\,, \tag{17}$$

je zřejmě celý interval $\langle 0, 1 \rangle$. Ukažme, že funkce f je (v Δ) neklesající, tj. že (pro každou dvojici bodů x', x'' z Δ) platí implikace

$$f(x') > f(x'') \Rightarrow x' > x''. \tag{18}$$

Nechť

$$x' = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i'_n}{3^n}\,, \quad x'' = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i''_n}{3^n}\,, \tag{19}$$

kde každé z čísel i'_n, i''_n je rovno buď 0 nebo 1. Z předpokladu, že

$$f(x') - f(x'') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i'_n - i''_n}{3^n} > 0\,, \tag{20}$$

zřejmě plyne, že pro vhodné $N \in \mathbb{N}$ je $i'_n = i''_n$ pro $n = 1, \ldots, N-1$ a $i'_N - i''_N = 1$. Podle (20) pak je

$$x' - x'' = \frac{1}{3^N}\Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i'_m - i''_m}{3^m}\Big) \geq \frac{1}{3^N}\Big(1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m}\Big) = \frac{1}{3^N} \cdot \frac{1}{2} > 0\,, \tag{21}$$

což jsme měli dokázat.

Intervaly

$$(-\infty, 0)\,,\ J\,,\ J(i_1)\,,\ \ldots\,,\ J(i_1, \ldots, i_n)\,,\ \ldots\,,\ (1, +\infty) \tag{22}$$

se nazývají **styčné** k Δ. Krajní body všech omezených styčných intervalů patří do Cantorova diskontinua a nazývají se **body 1. druhu**. Protože jich je jen spočetně mnoho a protože Δ je nespočetná množina, obsahuje Δ nespočetně mnoho bodů, které krajními body žádného omezeného styčného intervalu nejsou; to jsou tzv. **body 2. druhu** Cantorova diskontinua. [4])

Styčné intervaly jsou nejen disjunktní, ale žádné dva (různé) z nich nemají ani krajní bod společný; z toho snadno plyne, že Cantorovo diskontinuum nemá žádné izolované body. Protože sjednocení všech intervalů (18) je (otevřená) množina hustá v $\mathbb{R}$, je Cantorovo diskontinuum množina řídká (a uzavřená).

Poznamenejme ještě, že rovnost $\mu(\Delta) = 0$ lze dokázat i takto: Protože $\mu(J) = \frac{1}{3}$, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ má každý interval $J(i_1, \ldots, i_n)$ délku 3^{-n-1} a protože těchto intervalů je 2^n, je jejich celková délka rovna

$$\tfrac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = 1\,; \tag{23}$$

míra Cantorova diskontinua je rovna rozdílu míry (délky) intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a součtu (23) měr všech intervalů J, tedy rovna 0.

Ještě několik slov k funkci f: Protože krajní body intervalu J lze napsat bez užití cifry 1 ve tvaru

$$\tfrac{1}{3} = 0.0222\ldots \quad \text{a} \quad \tfrac{2}{3} = 0.2000\ldots\,, \tag{24}$$

je

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \tfrac{1}{2} = f\left(\tfrac{2}{3}\right). \tag{25}$$

Obecně: Krajními body styčného intervalu $J(i_1, \ldots, i_{n-1})$ jsou body tvaru

$$a := 0.(2i_1)\ldots(2i_{n-1})0222\ldots \quad \text{a} \quad b := 0.(2i_1)\ldots(2i_{n-1})2000\ldots\,; \tag{26}$$

protože

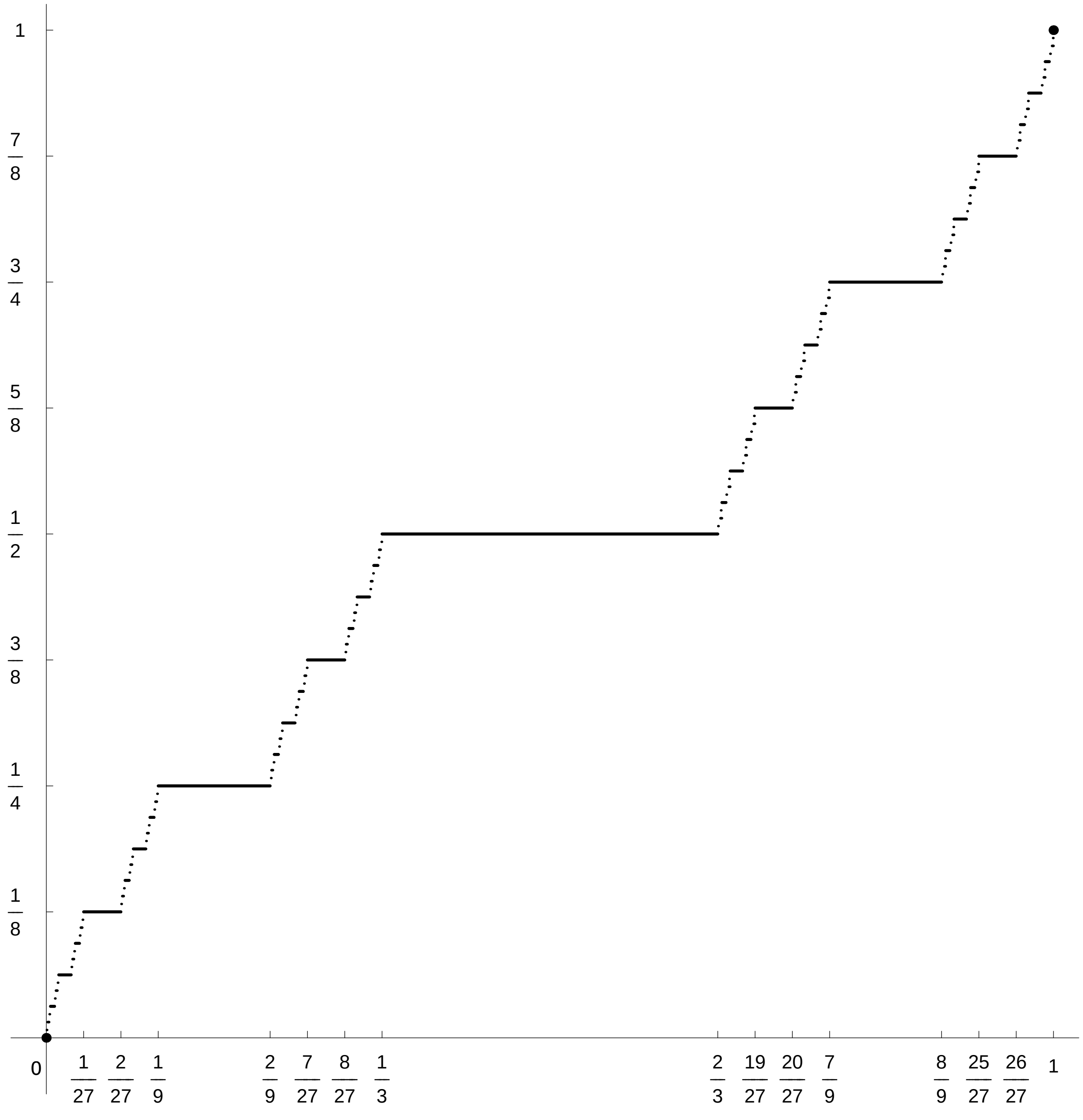
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\,,$$

je zřejmě $f(a) = f(b)$. V krajních bodech každého omezeného styčného intervalu nabývá tedy funkce f stejné hodnoty; rozšíříme-li její definiční obor na celý interval $\langle 0, 1 \rangle$ tím, že ji v každém omezeném styčném

[4]) Pro nás bude (zatím) výhodnější počítat body 0 a 1 mezi body 2. druhu; literatura není v tomto ohledu jednotná. Čtenář snadno dokáže, že mezi body 2. druhu patří např. $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$.

intervalu položíme rovnu hodnotě v krajních bodech tohoto intervalu, bude f neklesající v $\langle 0,1\rangle$. Protože oborem hodnot (původní i rozšířené) funkce f je interval $\langle 0,1\rangle$, je tato funkce spojitá v $\langle 0,1\rangle$. [5])

Rozšířená funkce $f : \langle 0,1\rangle \to_{\mathrm{na}} \langle 0,1\rangle$ se nazývá **Cantorova stupňovitá funkce**; schéma jejího grafu je vyobrazeno na obr. 1. [6]) Funkce f v $\langle 0,1\rangle$ neklesá; je pozoruhodná tím, že roste jen v bodech Cantorova diskontinua: V levých (resp. pravých) krajních bodech omezených styčných intervalů zleva (resp. zprava), v bodě 0 zprava, v bodě 1 zleva a v ostatních bodech 2. druhu zleva i zprava. I když je $\mu(\Delta) = 0$, funkce f celého svého přírůstku $f(1) - f(0) = 1$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nabývá právě jen na Cantorově diskontinuu.



Obr. 1. Schéma Cantorovy stupňovité funkce

Délka grafu funkce $F : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ se definuje jako supremum délek aproximujících lomených čar: Každému dělení $D : a = x_0 < x_1 < \ldots, x_n = b$ odpovídá lomená čára, která je sjednocením úseček

[5]) Kdyby nebyla spojitá v bodě x, bylo by buď $f(x) - f(x-) > 0$, nebo $f(x+) - f(x) > 0$; funkce f by v prvním případě nenabývala žádné hodnoty z intervalu $(f(x-), f(x))$, ve druhém případě žádné hodnoty z intervalu $(f(x), f(x+))$.

[6]) Celý graf nelze z pochopitelných důvodů nakreslit; „střídají“ se v něm (podobně jako se v $\mathbb{R}$ „střídají“ racionální a iracionální čísla) stále kratší vodorovné úsečky s místy, kde f velmi rychle roste.

s krajními body $(x_{k-1}, F(x_{k-1})$ a $(x_k, F(x_k))$, $k = 1, \ldots, n$. Číslo

$$L(D) := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (F(x_k) - F(x_{k-1}))^2} \tag{27}$$

je součtem délek všech těchto úseček a **délka** L_F **grafu funkce** F je definována jako supremum čísel (27), kde D probíhá množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li F neklesající funkce, jsou její přírůstky nezáporná čísla a v důsledku toho je

$$L(D) \leq \sum_{k=1}^{n} ((x_k - x_{k-1}) + (F(x_k) - F(x_{k-1}))) = (b - a) + (F(b) - F(a)) \tag{28}$$

pro každé D, takže i $L_F \leq (b-a)+(F(b)-F(a))$. Pro Cantorovu funkci f dostáváme tedy odhad $L_f \leq 2$.

Dělení

$$D_n : 0 = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,2^{n+2}} = 1 \tag{29}$$

nechť se skládá z bodů 0 a 1 a krajních bodů styčných intervalů $J, J(i_1), \ldots, J(i_1, \ldots, i_n)$,

$$I_{n,k} := \langle x_{k-1}, x_k\rangle,\ k = 1, \ldots, 2^{n+2}, \tag{30}$$

nechť jsou intervaly dělení D_n. Lomená čára příslušná k dělení D_n je složena z 2^{n+1} šikmých úseček (odpovídajících intervalům $I_{n,k}$ s lichým k) a z $2^{n+1} - 1$ vodorovných úseček (odpovídajících intervalům $I_{n,k}$ se sudým k). Délka šikmé úsečky je

$$\sqrt{(x_{n,2k+1} - x_{n,2k})^2 + (F(x_{n,2k+1}) - F(x_{n,2k}))^2} \geq F(x_{n,2k+1}) - F(x_{n,2k}) = 2^{-n-1}, \tag{31}$$

a protože těchto úseček je 2^{n+1}, je součet délek všech šikmých úseček ≥ 1. Protože součet délek všech vodorovných úseček je roven

$$\tfrac{1}{3}(1 + (\tfrac{2}{3})^1 + (\tfrac{2}{3})^2 + \ldots (\tfrac{2}{3})^{n+1} = 1 - (\tfrac{2}{3})^{n+1}, \tag{32}$$

je délka lomené čáry větší nebo rovna $1 + (1 - (2/3)^{n+1})$, což je výraz, který má pro $n \to \infty$ limitu 2.

Graf funkce f má tedy maximální možnou délku (rovnou 2).