1. Topologické limity

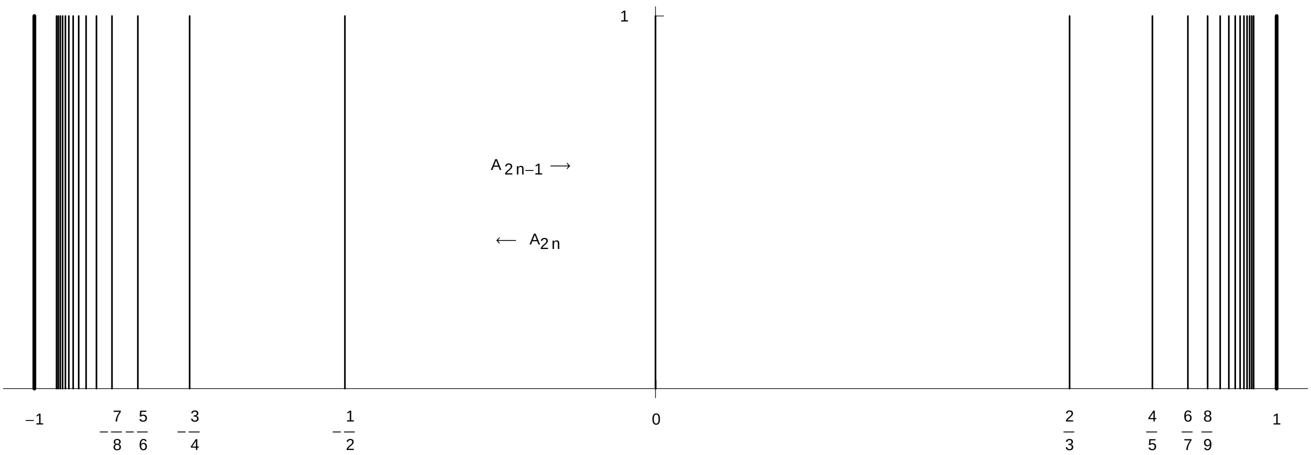
Definice 1.1. Je-li $A_n \subset P$ pro s.v. n, definujeme $\mathrm{Li}\, A_n$ jako množinu všech bodů $x \in P$, jejichž každé okolí $U(x)$ má neprázdný průnik se *skoro všemi* A_n, a $\mathrm{Ls}\, A_n$ jako množinu všech bodů $x \in P$, jejichž každé okolí $U(x)$ má neprázdný průnik s *nekonečně mnoha* A_n; první z těchto množin se nazývá **topologický limes inferior**, druhá je **topologický limes superior** posloupnosti $\{A_n\}$. Je-li $\mathrm{Li}\, A_n = \mathrm{Ls}\, A_n$, značíme tuto množinu $\mathrm{Lim}\, A_n$, nazýváme ji **topologická limita** posloupnosti $\{A_n\}$ a říkáme, že posloupnost $\{A_n\}$ k ní (**topologicky**) **konverguje**. (Říkáme, že posloupnost množin $A_n \subset P$ (**topologicky**) **konverguje** nebo **je** (**topologicky**) **konvergentní** (v prostoru P), existuje-li její topologická limita.)

Příklad 1.1. Je-li

$$A_{2n-1} := \langle(1 - \tfrac{1}{2n-1}, 0); (1 - \tfrac{1}{2n-1}, 1)\rangle, \quad A_{2n} := \langle(-1 + \tfrac{1}{2n}, 0); (-1 + \tfrac{1}{2n}, 1)\rangle \tag{1}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, je

$$\begin{gathered} \mathrm{Ls}\, A_n = \langle(1,0); (1,1)\rangle \cup \langle(-1,0); (-1,1)\rangle, \ \mathrm{Li}\, A_n = \emptyset, \\ \mathrm{Lim}\, A_{2n-1} = \langle(1,0); (1,1)\rangle, \ \mathrm{Lim}\, A_{2n} = \langle(-1,0); (-1,1)\rangle. \end{gathered} \tag{2}$$



Obr. 2. K příkladu 1.1

Poznámka 1.1. $\mathrm{Li}\, A_n$, $\mathrm{Ls}\, A_n$, $\mathrm{Lim}\, A_n$ jsou topologické pojmy [1]).

Poznámka 1.2. Vždy je $\mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Ls}\, A_n$. Je-li $\{A_{n_k}\}$ posloupnost vybraná z $\{A_n\}$, je $\mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Li}\, A_{n_k} \subset \mathrm{Ls}\, A_{n_k} \subset \mathrm{Ls}\, A_n$. Konverguje-li tedy $\{A_n\}$ k A, konverguje k A každá její vybraná posloupnost $\{A_{n_k}\}$.

Poznámka 1.3. Je-li $x_n \in P$ (pro s.v. n), je $\mathrm{Ls}\, x_n$ množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{x_n\}$. Posloupnost $\{x_n\}$ má topologickou limitu právě tehdy, je-li buď konvergentní v obvyklém smyslu (načež $\mathrm{Lim}\, x_n = \lim x_n$), nebo nemá-li žádný hromadný bod (načež $\mathrm{Lim}\, x_n = \emptyset$).

Rovnost $\mathrm{Li}\, x_n = \emptyset$ platí právě v těchto dvou situacích: 1) posloupnost $\{x_n\}$ nemá žádný hromadný bod (tj. $\mathrm{Ls}\, x_n = \emptyset$), 2) posloupnost $\{x_n\}$ má aspoň dva různé hromadné body.

Poznámka 1.4. Nechť $A_n \neq \emptyset$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. K tomu, aby bylo $x \in \mathrm{Ls}\, A_n$, je nutné a stačí, aby existovaly body $x_n \in A_n$ tak, že x je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (tj. aby existovaly body $x_{n_k} \in A_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < \dots)$ tak, že $x_{n_k} \to x$); k tomu, aby $x \in \mathrm{Li}\, A_n$, je nutné a stačí, aby existovaly body $x_n \in A_n$ tak, že $x_n \to x$.

Věta 1.1. $\mathrm{Li}\, A_n$ *a* $\mathrm{Ls}\, A_n$ *jsou uzavřené množiny.*

D ů k a z . Je-li $A := \mathrm{Li}\, A_n$, $x \in \overline{A}$, existuje ke každému okolí $U(x)$ bod $y \in A \cap U(x)$. Množina $U(x)$ je pak i okolím bodu $y \in A = \mathrm{Li}\, A_n$, takže $A_n \cap U(x) \neq \emptyset$ pro skoro všechna n, tj. $x \in A$.

[1]) tj. invarianty homeomorfních zobrazení

Podobně pro Ls A_n.

Poznámka 1.5. Je-li $A_n \subset B_n$, je Li $A_n \subset$ Li B_n, Ls $A_n \subset$ Ls B_n.

Poznámka 1.6. Li $\overline{A_n}$ = Li A_n, Ls $\overline{A_n}$ = Ls A_n.

Poznámka 1.7. Li $A_n \cup$ Li $B_n \subset$ Li$(A_n \cup B_n) \subset$ Ls$(A_n \cup B_n)$ = Ls $A_n \cup$ Ls B_n. Důsledek: Existují-li Lim A_n a Lim B_n, existuje i Lim$(A_n \cup B_n)$ = Lim $A_n \cup$ Lim B_n.

Příklad 1.2. Jsou-li $a \neq b$ dva body z P a položíme-li $A_{2n} = B_{2n-1} = \{a\}$, $A_{2n-1} = B_{2n} = \{b\}$, je Li $A_n \cup$ Li $B_n = \emptyset$, kdežto Li$(A_n \cup B_n) = \{a, b\}$; *rovnost* Li $A_n \cup$ Li B_n = Li$(A_n \cup B_n)$ tedy *obecně neplatí.*

Poznámka 1.8. Je-li $A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, je Lim $A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Je-li $A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, je Lim $A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Poznámka 1.9. Je-li $A_n \subset M$, kde $M \subset P$ je uzavřená množina, je též Ls $A_n \subset M$ (a v důsledku toho i Li $A_n \subset M$).

Věta 1.2. *Nechť P je kompaktní, nechť $A_n \subset P$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a nechť $U(A)$ je libovolné okolí množiny $A :=$ Lim A_n; pak je $A_n \subset U(A)$ pro s.v. n.*

D ů k a z . Kdyby tomu tak nebylo, existovaly by body $x_{n_k} \in A_{n_k} - U(A)$. Kdybychom vybrali konvergentní posloupnost $x_{n_{k_j}}$ s limitou x, bylo by $x \in P - U(A)$ a zároveň $x \in$ Ls $A_n = A$, což je (podle poznámky 1.4) nemožné.

Poznámka 1.10. Je-li P kompaktní prostor a je-li $A_n \subset P$, diam $A_n \geq r > 0$ pro všechna n, je diam Ls $A_n \geq r$. [2])

D ů k a z . V každém A_n existují dva body x'_n a x''_n tak, že $\rho(x'_n, x''_n) \geq r - 1/n$. Vybereme-li posloupnosti $\{x'_{n_k}\}$ a $\{x''_{n_k}\}$ konvergující k x' resp. k x'', je $x' \cup x'' \subset$ Ls A_n a $\rho(x', x'') \geq r$.

Věta 1.3. *Je-li P prostor se spočetnou bází, lze z každé posloupnosti množin $A_n \subset P$ vybrat posloupnost (topologicky) konvergentní.* [3])

D ů k a z . Buď $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ báze P. Položme $A_n^1 := A_n$ a předpokládejme, že pro jisté $k \geq 1$ jsou sestrojeny množiny A_n^k, $n \in \mathbb{N}$. Jsou dvě možnosti:

1) Existuje-li posloupnost $\{A_{n_i}^k\}_{i=1}^{\infty}$ vybraná z $\{A_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, pro niž je $U_k \cap$ Ls $A_{n_i}^k = \emptyset$ pro každé i, položíme $A_i^{k+1} := A_{n_i}^k$;

2) jestliže taková posloupnost neexistuje, položíme $A_i^{k+1} := A_i^k$ pro každé i.

Posloupnost $\{A_i^{k+1}\}_{i=1}^{\infty}$ je v obou případech vybrána z posloupnosti $\{A_i^k\}_{i=1}^{\infty}$.

Dokažme, že „diagonální" posloupnost $\{A_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje: Jestliže $x \notin$ Li A_n^n, existuje U_k tak, že $x \in U_k$ a pro vhodnou vybranou posloupnost $\{A_{n_i}^{n_i}\}$ je $U_k \cap A_{n_i}^{n_i} = \emptyset$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Protože $\{A_{n_i}^{n_i}\}$ je (až snad na konečně mnoho prvních členů) vybrána z $\{A_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, nastal při k-tém kroku případ 1), takže $U_k \cap$ Ls $A_n^{k+1} = \emptyset$ pro všechna n. Protože však $\{A_n^n\}$ je vybrána (až snad na konečně mnoho prvních členů) z $\{A_n^{k+1}\}$, je též $U_k \cap$ Ls $A_n^n = \emptyset$, takže $x \notin$ Ls A_n^n.

Dokázali jsme implikaci $x \notin$ Li $A_n^n \Rightarrow x \notin$ Ls A_n^n, tj. inkluzi Ls $A_n^n \subset$ Li A_n^n; Lim A_n^n tedy skutečně existuje.

Příklad 1.3. Snadno se může stát, že z dané posloupnosti $\{A_n\}$ nelze vybrat žádnou topologicky konvergentní posloupnost s neprázdnou limitou; stačí, aby Lim $A_n = \emptyset$. Dva jednoduché příklady: $P = \mathbb{R}$ (takže P je úplný, ale neomezený prostor) a $A_n := \{n\}$, nebo $P = (0, 1)$ (takže P je neúplný, ale omezený prostor) a $A_n := (1 - \frac{1}{n}, 1,)$.

Ani dodatečný předpoklad, že P je úplný prostor a že množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je omezená, však nestačí [4]) k tomu, aby z posloupnosti množin $A_n \subset P$ bylo možné vybrat posloupnost s neprázdnou limitou: Je-li P např. Hilbertův prostor všech nekonečných posloupností $\{a_n\}$ reálných čísel, pro něž je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergentní řada, v němž je norma definována rovností

$$||\{a_n\}|| := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2}, \tag{3}$$

---

[2]) diam(M) je *průměr* množiny M. diam$(\emptyset) := 0$, pro neprázdnou M je diam$(M) := \sup\{\rho(x, y);\ x, y \in M\}$.

[3]) Limita této vybrané posloupnosti může ovšem být prázdná.

[4]) na rozdíl od kompaktnosti prostoru P – viz poznámku 1.12

a je-li e_n posloupnost, jejíž n-tý člen je 1, zatímco ostatní členy jsou nulové, je $||e_m - e_n|| = \sqrt{2}$ pro každé dva indexy $m \neq n$, takže posloupnost $\{e_n\}$ nemá žádný hromadný bod. Z posloupnosti jednobodových množin $A_n := \{e_n\}$ nelze vybrat žádnou (topologicky) konvergentní posloupnost s neprázdnou limitou, protože $\mathrm{Lim}\, A_n = \emptyset$.

Poznámka 1.11. V prostoru se spočetnou bází je $\mathrm{Ls}\, A_n = \bigcup \mathrm{Lim}\, A_{n_k}$, kde vpravo se sjednocuje přes všechny (topologicky) konvergentní posloupnosti $\{A_{n_k}\}$ vybrané z $\{A_n\}$.

D ů k a z . Pravá strana je podle poznámky 1.2 obsažena v levé. Je-li $x \in \mathrm{Ls}\, A_n$, existují podle poznámky 1.4 body $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tak, že $x_{n_k} \to x$. Z posloupnosti $\{A_{n_k}\}$ lze (podle věty 1.3) vybrat konvergentní posloupnost $\{A_{n_{k_j}}\}$; znamená-li A její limitu, je $x \in A$.

Poznámka 1.12. *Je-li P kompaktní prostor a jsou-li $A_n \subset P$ neprázdné množiny, je $\mathrm{Lim}\, A_n \neq \emptyset$, pokud limita vlevo existuje.*

D ů k a z . Je-li $A := \mathrm{Lim}\, A_n$, $x_n \in A_n$, je každý hromadný bod x posloupnosti $\{x_n\}$ obsažen v A, a vzhledem ke kompaktnosti prostoru alespoň jeden hromadný bod existuje.