10. Dodatky

V této kapitole uvedu několik pojmů a tvrzení, která s pojmem křivky (a obecněji kontinua nebo souvislé množiny) souvisí, ale do textu Kontinua z konce padesátých let se již nedostala. (Tento text byl využíván v topologickém semináři v rozsahu $2+2$ a více látky již nebylo možné do takto omezeného času zařadit.) Navíc mnohdy půjde o zcela jiný přístup k látce, který vyžaduje odlišné metody a řadu nepříliš známých pomocných tvrzení. Všechny věty budou proto uvedeny bez důkazu, jen pro informaci čtenáře; u každé z nich bude uvedena literatura, v níž lze důkaz najít. Omlouvám se, že výběr látky bude hodně nesoustavný.

Pojem souvislé množiny, bez něhož si lze jen těžko představit nejen topologii, ale např. i matematickou analýzu, patří podle mého názoru k nejrafinovanějším a nejneprůhlednějším pojmům běžně známé vysokoškolské matematiky. Je proto užitečné seznámit se s jednou z nejpozoruhodnějších souvislých množin; sestrojili ji začátkem dvacátých let dvacátého století dva světoznámí polští matematici. [38])

Příklad 10.1. Označme $A := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Je-li x bod 1. druhu Cantorova diskontinua Δ [39]), nechť $P(x)$ znamená množinu všech bodů úsečky $\langle (x,0);\, A\rangle$, jejichž druhá souřadnice je iracionální; je-li x bod 2. druhu, nechť je $P(x)$ množina všech bodů úsečky $\langle (x,0);\, A\rangle$, jejichž druhá souřadnice je racionální. Položme

$$P := \bigcup_{x \in \Delta} P(x).$$

Množina P je *souvislá* a má dvě pozoruhodné vlastnosti:

1) Je-li $P = M \cup N$, kde M, N jsou souvislé množiny, je jedna z množin M, N buď jednobodová, nebo prázdná. (Srov. s nerozložitelnými kontinuy.)

2) Množina $P - (1/2, 1/2)$ je totálně nesouvislá. [40])

* * *

S řády rozvětvení souvisí tato přirozená otázka: *Existují křivky K, pro něž existuje $n \in \mathfrak{C}$ tak, že $\mathrm{ord}_x K = n$ pro všechna $x \in K$?* [41])

Dva příklady již známe: Všechny body každé topologické kružnice mají řád rozvětvení 2, všechny body Sierpińského koberce mají řád rozvětvení $\mathfrak{c}$. Uryson uvádí další dva příklady Cantorových křivek: Jedna z nich obsahuje jen body s řádem rozvětvení $\aleph$, druhá jen body s řádem rozvětvení ω. (Viz [4], str. 635 – 662.)

Uryson dále dokazuje dvě podstatná tvrzení:

Věta 10.1. *Je-li P Cantorova křivka splňující rovnost $\mathrm{ord}_x = n$ pro všechna $x \in P$, je n jedno z čísel $2, \omega, \aleph, \mathfrak{c}$.* [42])

Věta 10.2. *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a mají-li všechny body Cantorovy křivky P řád rozvětvení $\geq n$, existuje v P i bod s řádem rozvětvení $\geq 2n-2$.* [42])

Poznámka 10.1. Větu 10.2 lze ekvivalentně formulovat takto: *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a mají-li všechny body Cantorovy křivky P řád rozvětvení $< 2n-2$, existuje v P bod s řádem rozvětvení $< n$.*

Řád rozvětvení každého bodu každé křivky je ≥ 1, ale pro $n = 1$ věta 10.2 neříká nic; protože křivky obsahující jen krajní body podle věty 10.1 neexistují, je nejjednodušším příkladem křivky P, pro niž je $\sup\{\mathrm{ord}_x P;\ x \in P\}$ minimální, oblouk. Pro $n = 2$ je $n = 2n-2$, a jediným příkladem typu křivky, jejíž všechny body mají řád rozvětvení 2, je topologická kružnice. Je-li $n = 3$, je $2n - 2 = 4$ a existuje jednoduchý příklad křivky, jejíž každý bod má řád rozvětvení buď 3, nebo 4 – viz část 9 příkladu 8.1. Uryson (v [4], str. 662 – 673) konstruuje i pro každé přirozené číslo $n > 3$ příklad křivky P, jejíž každý

[38]) Viz článek B. Knastera a K. Kuratowského ve Fundamenta Mathematicae 2, 1921, str.241. Doporučuji čtenářům přečíst si tam poutavý důkaz, že množina P z následujícího příkladu má uvedené vlastnosti.

[39]) Za body 1. druhu považujeme i body 0 a 1.

[40]) Proto se bod A někdy nazývá *bodem výbuchu* množiny P; odstraní-li se ze souvislé množiny P tento jediný bod, zbudou jen „atomy".

[41]) tj. křivky „s konstantním řádem rozvětvení"

[42]) Viz [4], str. 648.

bod má řád rozvětvení buď n, nebo $2n-2$; poznamenejme však, že jak konstrukce, tak i příslušný důkaz nepatří k nejjednodušším.

Poznámka 10.2. Podle věty 9.1 existuje pro každou racionální křivku P rozklad $P = A \cup B$, kde A je spočetná množina a $\dim B = 0$. [43])

Uryson [44]) uvádí příklad Cantorovy křivky P s těmito vlastnostmi:

1. Pro každé $x \in P$ je buď $\operatorname{ord}_x P = 2$, nebo $\operatorname{ord}_x P = \omega$;
2. množina $R := \{x \in P;\ \operatorname{ord}_x P = \omega\}$ je spočetná;
3. množina $\overline{R}$ je dokonalá a má dimenzi 0;
4. v P neexistuje žádné kontinuum kondenzace.

Sestrojíme ji takto: Nechť P_0 je sjednocení půlkružnice

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{4},\ y \geq 0 \tag{1}$$

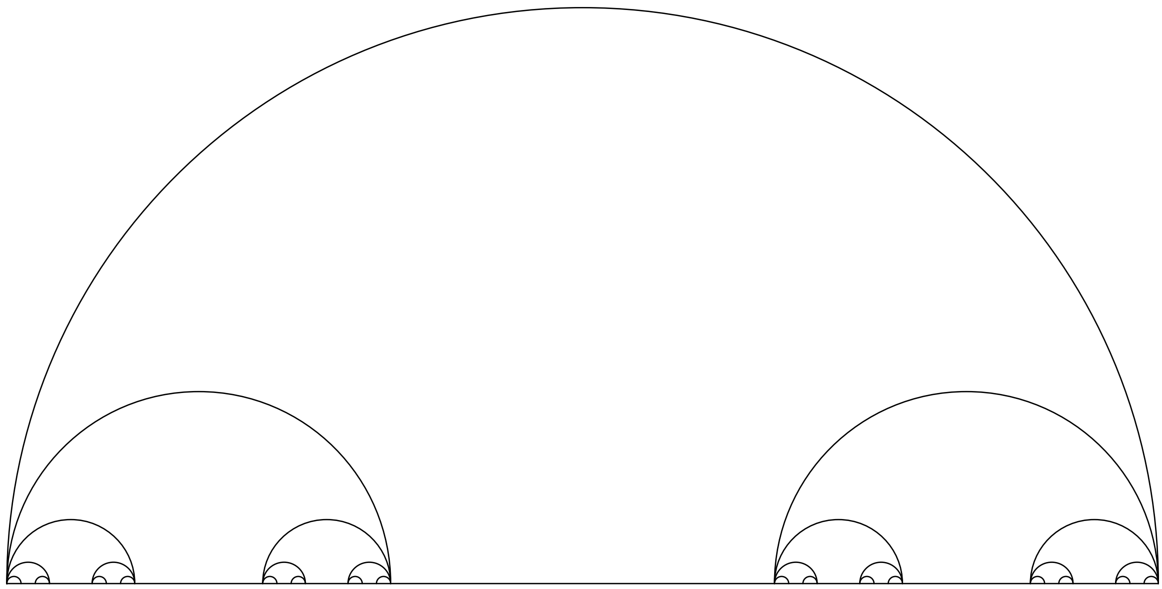
s úsečkou s krajními body $(0,0)$, $(1,0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme P_n sjednocení všech půlkružnic ležících v polorovině $y \geq 0$, jejichž krajní body jsou body

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{3^k} \quad \text{a} \quad 2\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}, \tag{2}$$

kde každé z čísel i_k nabývá hodnot 0 a 1. Kontinuum

$$P := \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n \tag{3}$$

má pak uvedené vlastnosti: řád jeho rozvětvení v každém bodě prvního druhu Cantorova diskontinua (včetně bodů 0 a 1) je roven ω, zatímco všechny ostatní body z P jsou obyčejné. (Na obr. 25 jsou zakresleny množiny P_n s $n = 0, \ldots, 4$.)



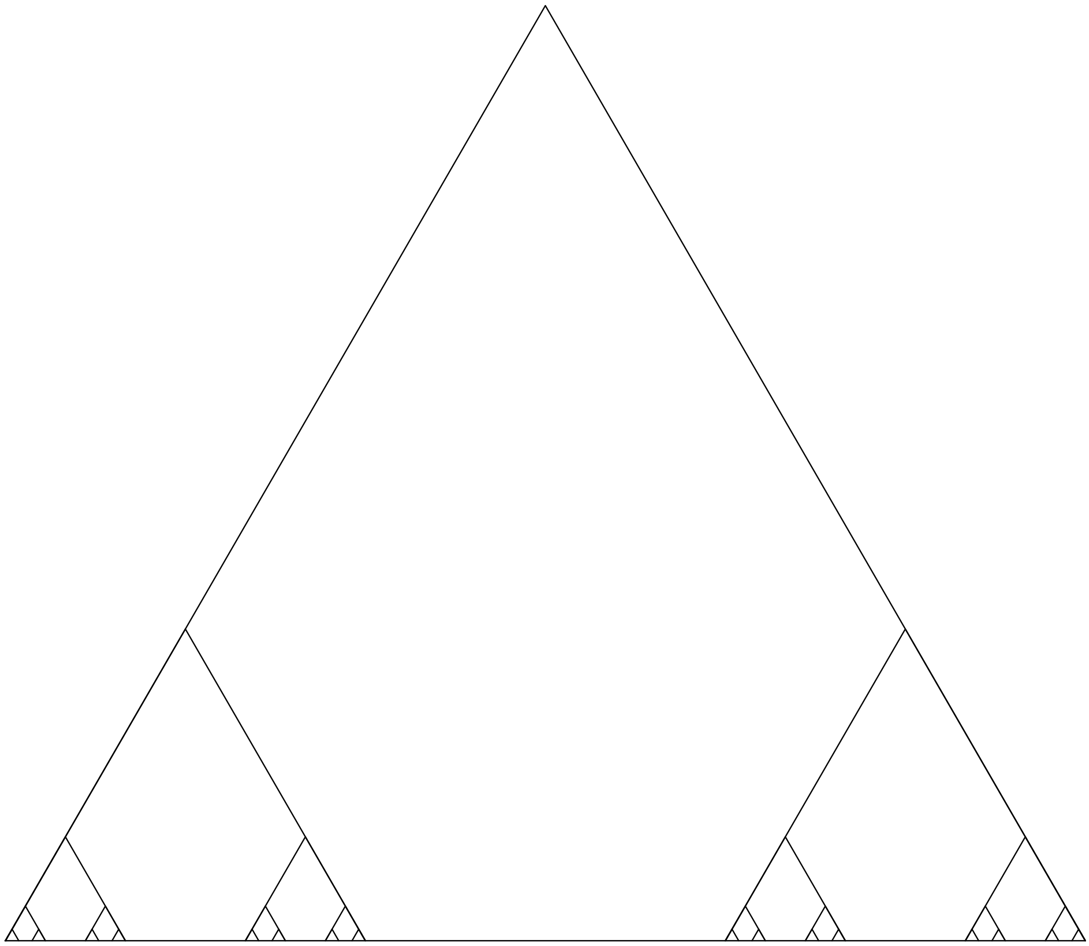
Obr. 25. Schéma kontinua P z poznámky 10.2

[43]) Ve větě 9.1 se mluví obecněji o separabilních racionálních prostorech, v nichž by množina B mohla být prázdná; pro křivky podobná situace nemůže nastat, protože žádná spočetná množina není křivkou.

[44]) Viz [4], str. 597 – 598.

Modifikujeme-li předcházející konstrukci tím, že půlkružnice nahradíme rovnostrannými trojúhelníky, získáme křivku P^*, v níž má každý bod řád rozvětvení buď 2, nebo 3; řád tři mají přitom vrcholy všech trojúhelníků kromě trojúhelníku největšího a všechny body $(x, 0)$, kde $x \in (0, 1)$ je bod prvního druhu Cantorova diskontinua. (Viz obr. 26.)

Poznámka 10.3. Podle věty 8.3 je každý bod x kompaktního prostoru P, v němž je řád rozvětvení $\geq\aleph$, obsažen v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$, v jehož každém bodě je řád rozvětvení také $\geq\aleph$.



Obr. 26. Schéma kontinua P^* z poznámky 10.2

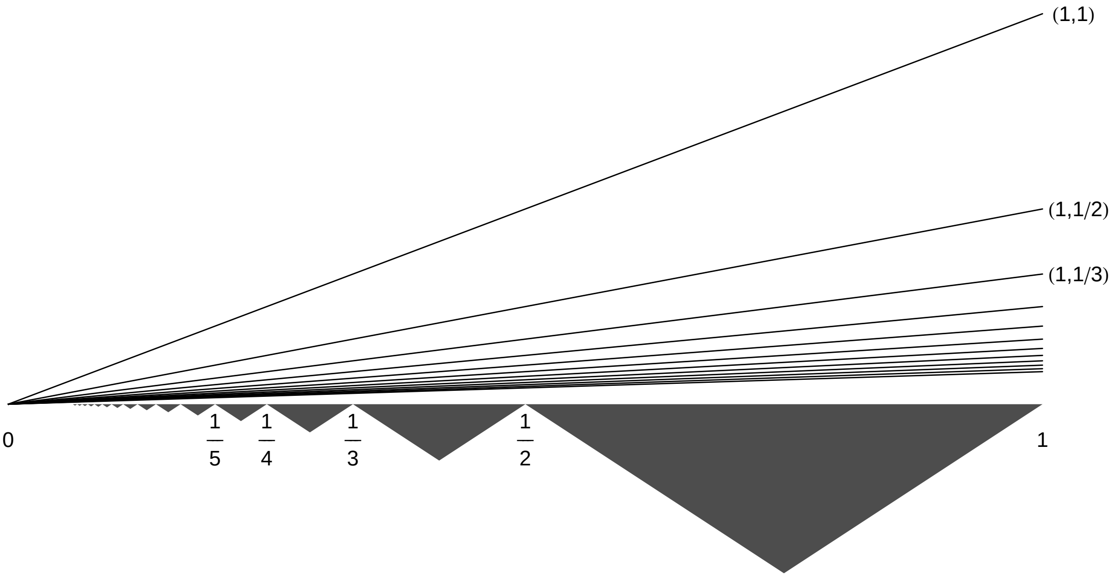
Uryson podává v [4], str. 541 – 542 příklad kontinua P, které obsahuje právě jeden bod a s řádem rozvětvení $\aleph$; bod a leží ve vlastním kontinuu $K \subset P$, pro něž platí: $a \neq x \in K \Rightarrow \operatorname{ord}_x P = \mathfrak{c}$. Konstrukci provádí Uryson takto:

L_0 nechť je úsečka $\langle 0, 1\rangle$ na ose x a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť L_n znamená úsečku s krajními body $a := (0, 0)$ a $(1, 1/n)$. T_n buď rovnostranný trojúhelník (včetně vnitřku) obsažený v dolní polorovině $y \leq 0$, jehož jednou stranou je úsečka s krajními body $(1/(n + 1), 0)$, $(1/n, 0)$. Kontinua K a P jsou definována rovnostmi

$$K := L_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\,, \quad P := K \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n\,. \tag{4}$$

(Viz obr. 27, kde jsou z technických důvodů měřítka na osách x, y zhruba v poměru 2 : 1, takže rovnostranné trojúhelníky T_n jsou deformovány na trojúhelníky rovnoramenné.)

Je $\operatorname{ord}_a P \geq\aleph$, protože hranice každého okolí bodu a má společný aspoň jeden bod s každou úsečkou L_n; není však větší než $\aleph$, protože hranice čtverce o středu a a délce strany $2/n$ protíná P jen ve spočetně



Obr. 27. Schéma kontinua (4) popsaného na předchozí stránce

mnoha bodech (ležících na úsečkách L_n, $n \geq 0$, ležících v polorovině $y \geq 0$). Řád rozvětvení v ostatních bodech úsečky L_0 je $\mathfrak{c}$, stejně jako ve všech bodech všech trojúhelníků T_n; řády rozvětvení v ostatních bodech kontinua P jsou jistě zřejmé.

Uryson pak poznamenává, že trojúhelníky mající dimenzi 2 lze nahradit vhodnými křivkami tak, aby P byla křivka. Lze to provést např. takto: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$s(n) := \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{1}{n}, 0\Big) + \Big(\frac{1}{n+1}, 0\Big)\Big) = \Big(\frac{2n+1}{2n(n+1)}, 0\Big), \quad r(n) := \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{2n(n+1)}; \tag{5}$$

$s(n)$ je tedy střed úsečky s krajními body $(1/n, 0)$ a $(1/(n+1), 0))$, $s(n) - (r(n), 0) = (1/(n+1), 0)$, $s(n) + (r(n), 0) = (1/n, 0)$.

Utvořme analogii $K(n)$ křivky P z poznámky 4.12 (obr. 11), a to tak, že společný krajní bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ úseček z P nahradíme bodem $s(n)$ a body x Cantorova diskontinua Δ body

$$y(n, x) := s(n) + r(n) \cdot \big(\cos(\pi x), -\sin(\pi x)\big)\,. \tag{6}$$[42]

Označme $L(n, x)$ úsečku s krajními body $s(n)$ a $y(n, x)$, kde $x \in \Delta$, a položme

$$K(n) := \bigcup_{x \in \Delta} L(n, x)\,, \quad K := L_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} K(n)\,. \tag{7}$$

K je pak kontinuum, které má všechny žádané vlastnosti, ale na rozdíl od původního Urysonova kontinua má dimenzi 1.

Všechna kontinua $K(n)$ jsou (v geometrickém smyslu) podobná. Na obr. 28a je ve větším měřítku nakresleno schéma kontinua $K(1)$; na obr. 28b je schéma kontinua K.

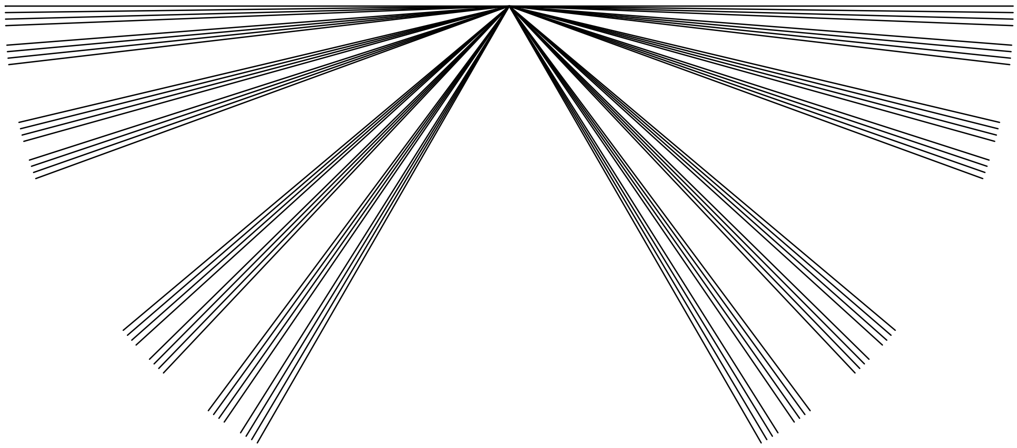
Poznámka 10.4. Sestrojit křivku (8), obsahující jen jeden bod s řádem rozvětvení $\aleph$, dalo dost práce. Snadné však je sestrojit křivku, která obsahuje jen jeden bod s řádem rozvětvení ω, zatímco ostatní její body jsou obyčejné (viz obr. 29): Znamená-li C_n kružnici popsanou rovnicí

$$(x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = \tfrac{1}{n^2}\,; \tag{8}$$

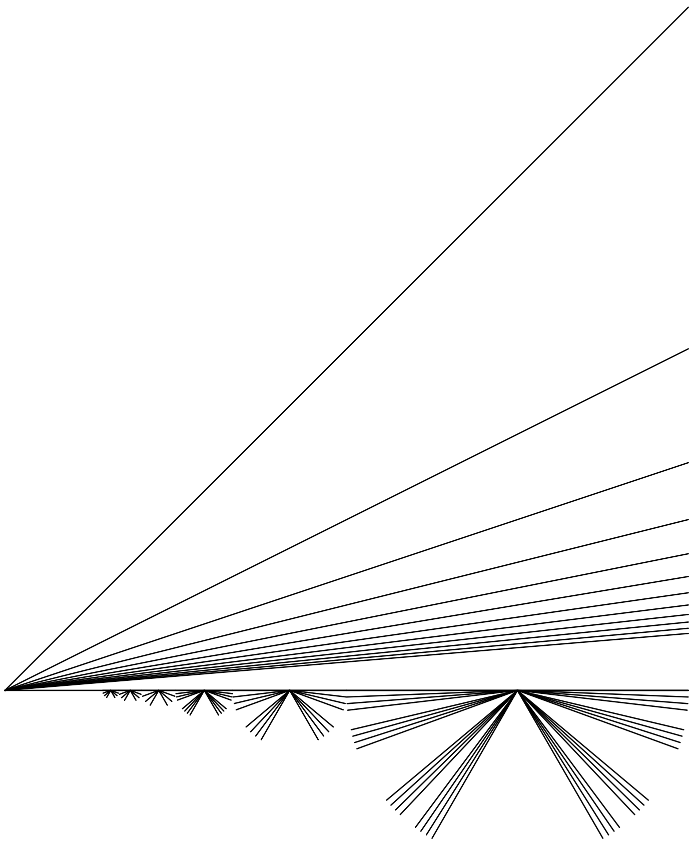
má uvedenou vlastnost křivka

$$C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\,. \tag{9}$$

[42]) Body $x(n)$ leží na půlkružnici o středu $s(n)$ a poloměru $r(n)$ ležící v dolní polorovině $y \leq 0$ a jsou na ní rozloženy podobně jako je Cantorovo diskontinuum rozloženo v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.



Obr. 28a. Schéma křivky $K(1)$

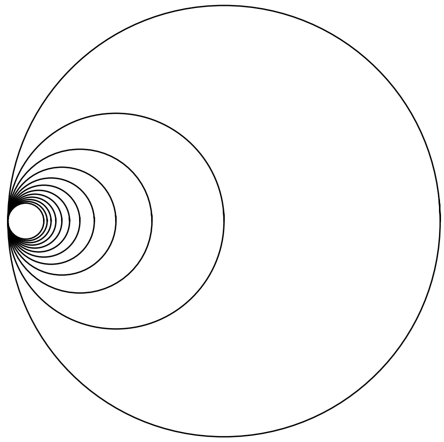


Obr. 28b. Schéma křivky (8)

Ve [4], str. 605 – 607, najdeme i zajímavé tvrzení vztahující se k podobným situacím:

Věta 10.4. *Je-li a izolovaný bod množiny všech bodů rozvětvení Cantorovy křivky P, existuje spočetný systém $\mathfrak{S}$ kontinuí P_n s těmito vlastnostmi:*

1. *každé P_n je buď oblouk, nebo topologická kružnice;*
2. *pro každé n je $a \in P_n$, ale množiny $P_n - a$ jsou disjunktní;*
3. *označíme-li P^* sjednocení všech $P_n \in \mathfrak{S}$, je $a \in \operatorname{Int} P^*$;*



Obr. 29. Schéma křivky C z poznámky 10.4

4. *je-li* $\mathfrak{S}$ *nekonečný systém, je* $\operatorname{diam} P_n \to 0$.

Poznámka 10.5. Křivka z poznámky 8.3 (obr. 23b) ukazuje, že množina všech krajních bodů křivky může být „ve smyslu kategorií" bohatší než množina všech ostatních bodů této křivky. Obráceně existují křivky, které nemají žádný krajní bod; nejjednodušším příkladem je topologická kružnice. Pro křivky, které mají právě jeden krajní bod, platí toto tvrzení [45]):

Věta 10.5. *Není-li množina K všech krajních bodů křivky P ani prázdná, ani dvoubodová, existuje v P aspoň jeden bod rozvětvení.*

Je zřejmé, že ani pro prázdnou, ani pro dvoubodovou množinu K tvrzení věty neplatí: topologická kružnice nemá ani krajní body, ani body rozvětvení, oblouk má dva krajní body, ale žádný bod rozvětvení.

Poznámka 10.6. Podle Sierpińského věty 4.2 nelze žádné kontinuum rozložit na spočetně mnoho disjunktních uzavřených množin, z nichž aspoň dvě jsou neprázdné. V poznámce 4.3 jsme sestrojili křivku, která je sjednocením nespočetně mnoha disjunktních vlastních kontinuí; snadno ověříme, že řád rozvětvení této křivky je v každém jejím bodě roven $\mathfrak{c}$. Není to tak úplně náhoda, protože platí toto obecné tvrzení [46]):

Věta 10.6. *Je-li kontinuum P sjednocením nějakého nespočetného systému disjunktních vlastních kontinuí, obsahuje množina*

$$\{x \in P;\ \operatorname{ord}_x P = \mathfrak{c}\} \tag{10}$$

nějaké vlastní kontinuum.

Poznámka 10.7. Velmi názorná se zdá být následující věta; její důkaz pro obecné oblouky však není nikterak jednoduchý. [47])

Věta 10.7. *Je-li P sjednocením n oblouků $pa_1, \dots, pa_n$, pro něž jsou množiny $pa_k - p$ disjunktní, je $\operatorname{ord}_p P = n$.*

K. Menger ukázal, že toto tvrzení lze někdy i obrátit: [48])

Věta 10.8. (Menger.) *Je-li p bod lokálně souvislého kontinua P a je-li $\operatorname{ord}_p P \geq n \in \mathbb{N}$, existují v P oblouky $pa_1, \dots, pa_n$, pro něž jsou množiny $pa_k - p$, $k = 1, \dots, n$, disjunktní.*

Poznámka 10.8. Jsou-li pa_k úsečky, je důkaz tvrzení věty 10.7 triviální; v obecném případě důkaz naráží hlavně na to, že oblouk, který má jednoduchou „vnitřní strukturu" (je homeomorfní s intervalem $\langle 0, 1\rangle$, lze v něm zavést uspořádání, každý jeho bod různý od jeho krajních bodů jej rozděluje na dvě

[45]) Viz [4], str. 604.
[46]) Viz [4], str. 545 – 547.
[47]) Viz [2], str. 203.
[48]) Viz Fundamenta Mathematicae 10 (1927), str. 98, nebo [3], kap. VI,1. Tato slavná věta má v německém originále název n-Beinsatz, tedy věta o „n-nožce".

souvislé části, atd.) může být z jiného hlediska velmi složitý; rovinný oblouk L může mít nejen nekonečnou délku, ale např. i kladnou dvojrozměrnou Lebesgueovu míru $\mu(L)$. [49])

V následujícím příkladu popíšeme, jak se pro každé číslo $r \in (0,1)$ zkonstruuje oblouk L obsažený v jednotkovém čtverci Q tak, že $\mu(L) = r$. (Je-li tedy $r \in (1/2, 1)$, „zabírá" takový oblouk L z hlediska míry, která je zobecněním elementárněgeometrického pojmu „obsah" rovinného útvaru, větší část jednotkového čtverce než jeho doplněk. Připomeňme, že každý oblouk v Q je řídký v Q, zatímco jeho doplněk je v Q hustý.)

Příklad 10.2. Popišme nejdříve operaci, kterou budeme v dalším aplikovat na čtverce různých rozměrů. Nechť $X = \langle a, b\rangle^2$ a nechť je dáno nějaké číslo $q \in (0, b-a)$. Každý z obdélníků

$$X_1 := \langle a, b\rangle \times \left(\tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{1}{2}q\right), \; X_2 := \left(\tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{1}{2}q\right) \times \langle a, b\rangle, \tag{11}$$

má míru $q(b-a)$, jejich sjednocení míru $2q(b-a) - q^2$. [50]) Množina $X - (X_1 \cup X_2)$ je sjednocením čtyř shodných čtverců $Q_0, \ldots, Q_3$, jejichž celková míra je rovna $(b-a)^2 - 2q(b-a) + q^2 = (b-a-q)^2$ (takže každý ze čtverců Q_i má míru rovnou čtvrtině tohoto čísla).

Jsou-li dána čísla $a < b$ a $m \in (0, (b-a)^2)$, má kvadratická rovnice

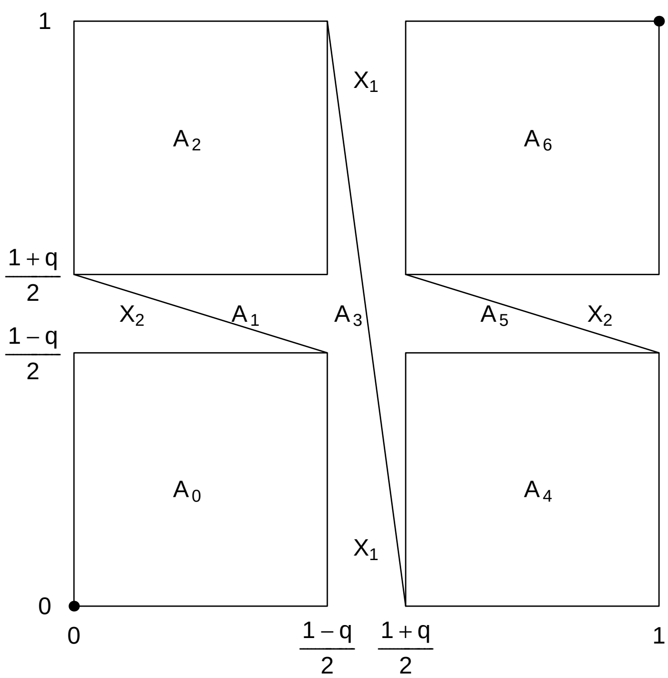
$$\mu(X_1 \cup X_2) = 2q(b-a) - q^2 = m \tag{12}$$

v intervalu $(0, b-a)$ právě jedno řešení

$$q = (b-a) - \sqrt{(b-a)^2 - m}. \tag{13}$$

Množinu $X_1 \cup X_2$ s tímto q nazveme *kříž v X o obsahu m* a označíme $K(X, m)$. Míra komplementární množiny, neboli součet obsahů čtverců Q_i, je pak rovna $(b-a)^2 - m = (b-a-q)^2$. Z toho plyne, že délka strany čtverce Q_i je rovna $\frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - m} = \frac{1}{2}(b-a-q)$ a

$$\operatorname{diam} Q_i = \sqrt{\frac{(b-a)^2 - m}{2}}. \tag{14}$$



Obr. 30a. 1. krok konstrukce oblouku L

[49]) S Lebesgueovou mírou se čtenář může seznámit např. v knihách V. Jarník: Integrální počet 2, Academia, Praha 1984, W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha 1977 nebo R. Sikorski, Academia, Praha 1973.

[50]) Od součtu $\mu(X_1) + \mu(X_2)$ jsme odečetli míru q^2 průniku $X_1 \cap X_2$.

Položme nyní $a = 0$, $b = 1$, zvolme pevně nějaké kladné číslo $r < 1$ a popišme, jak lze sestrojit oblouk $L \subset Q := \langle 0, 1\rangle^2$ s mírou $\mu(L) = r$.

1. krok: Položme $m = 1 - r$ a utvořme kříž $K(Q, m/2)$. Množina $Q - K(Q, m/2)$ se skládá ze čtyř (uzavřených) čtverců; levý dolní nechť je $Q(0)$, levý horní $Q(2)$, pravý dolní $Q(4)$, pravý horní $Q(6)$. $Q(2i + 1)$ nechť je pro $i = 0, 1, 2$ úsečka spojující pravý horní vrchol čtverce $Q(2i)$ s levým dolním vrcholem čtverce $Q(2i + 2)$. (Viz obr. 30a odpovídající $r = 1/2$, $m/2 = 1/4$, $q = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \doteq 0.134$.) Míra kříže $K(Q, m/2)$ je $m/2$, takže $\mu(Q - K(Q, m/2)) = 1 - m/2$. Protože úsečky mají míru 0, je míra množiny $L_1 := Q(0) \cup \ldots \cup Q(6)$ je rovna míře sjednocení čtverců $Q(2i)$. Každý z těchto čtverců má míru $(1 - m/2)/4 = (1 + r)/8 < 1/4$.[51])

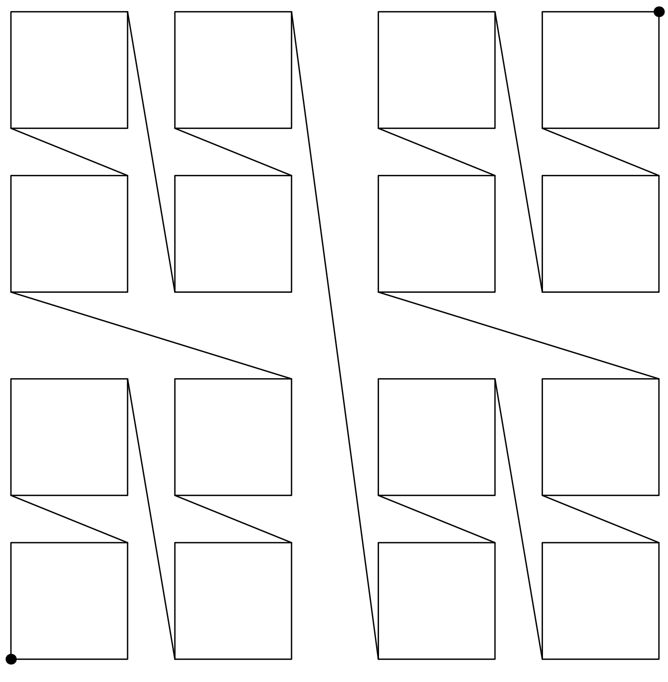
Je zřejmé, že $Q(0), \ldots, Q(6)$ je regulární řetěz (viz definici 5.3) kontinuí, který spojuje body $(0, 0)$, $(1, 1)$.

2. krok: Každá z množin $Q(2i) - K(Q(2i), m/16)$, $0 \le i \le 3$, se skládá ze čtyř čtverců $Q(2i, 2j)$, kde $0 \le j \le 3$, očíslovaných analogicky jako v případě čtverců $Q(2i)$; analogicky jako v prvním kroku konstrukce spojíme pravé horní vrcholy čtverců $Q(2i, 2j)$ s levými dolními vrcholy čtverců $Q(2i, 2j + 2)$ úsečkami $Q(2i, 2j + 1)$. Jsou-li $c(2i + 1) \in A(2i), d(2i + 1) \in A(2i + 2)$ krajní body úsečky $Q(2i + 1)$, označme

$$c(2i + 1, j) := c(2i + 1) + j\,\frac{d(2i + 1) - c(2i + 1)}{7} \quad \text{pro } j = 0, \ldots, 7 \tag{15}$$

a $Q(2i + 1, j)$, $0 \le j \le 6$, nechť je úsečka s krajními body $c(2i + 1, j), c(2i + 1, j + 1)$. Tím je každá z úseček $Q(2i + 1)$ rozdělena na 7 stejně dlouhých úseček a kontinua $Q(i, j)$, $0 \le i \le 6$, $0 \le j \le 6$ tvoří při lexikografickém uspořádání dvojic (i, j) regulární řetěz spojující body $(0, 0)$, $(1, 1)$. Označíme-li L_2 sjednocení všech množin $Q(i, j)$, je zřejmě $L_2 \subset L_1$.

Každý z křížů $K(Q(2i), m/16)$ má míru $m/16$, jejich sjednocení míru $m/4$, sjednocení těchto 4 křížů s křížem $K(Q, m/2)$ míru $m/2 + m/4 = 3m/4$ a sjednocení všech kontinuí $Q(i, j)$ míru $1 - 3m/4 = (1 + 3r)/4$. Délka strany každého čtverce $Q(2i, 2j)$ je rovna $(1 + 3r)/4^3 < 1/2^2$.[21]) (Viz obr. 30b.)



Obr. 30b. 2. krok konstrukce oblouku L

[51]) K odhadu délky stran čtverců $Q(i)$ nepotřebujeme znát jejich přesnou velikost; čtverce jsou 4, jsou disjunktní a obsažené ve čtverci Q míry 1. Jejich celková míra je tedy < 1, míra každého z nich $< 1/4$, délka jejich stran $< \sqrt{1/4} = 1/2$. Podobně snadno lze v dalším odhadnout délku stran čtverců $Q(2i_1, \ldots, 2i_n)$.

V n-tém kroku sestrojíme tímto postupem 7^n kontinuí

$$Q(i_1, \dots, i_n), \ (i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1, \dots, 6\}^n, \tag{16}$$

která při lexikografickém uspořádání n-tic $(i_1, \dots, i_n)$ tvoří regulární řetěz spojující body $(0, 0)$, $(1, 1)$. Jsou-li všechna čísla i_k sudá, je $Q(i_1, \dots, i_n)$ čtverec, v ostatních případech jde o úsečky. Abychom kontinua (17) získali, bylo nutné z Q odstranit

$$1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} = \tfrac{1}{3}\,(4^n - 1) \tag{17}$$

křížů o celkové míře

$$\frac{m}{2} + \ldots + \frac{m}{2^n} = m\,(1 - 2^{-n})\,; \tag{18}$$

sjednocení L_n všech množin (16) má tedy míru

$$1 - m\,(1 - 2^{-n}) = r + \frac{1 - r}{2^n}\,. \tag{19}$$

Míra každého čtverce $Q(2i_1, \dots, 1i_n)$ je rovna číslu (20) dělenému číslem 4^n; délka jeho strany je menší než $1/2^n$.[51])

$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost regulárních řetězů kontinuí spojujících body $(0, 0)$, $(1, 1)$. Průnik

$$L := \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \tag{20}$$

má míru rovnou limitě výrazů (19) pro $n \to \infty$; je tedy $\mu(L) = r$.

K tomu, abychom nahlédli, že L je oblouk, stačí provést podobnou úvahu jako v důkazu věty 5.5. Homeomorfní zobrazení $h : \langle 0, 1\rangle \to_{\text{na}} L$ lze však snadno získat i takto: Rozdělme interval $J := \langle 0, 1\rangle$ na 7 stejně dlouhých intervalů $J(i_1)$, $0 \le i_1 \le 6$, a číslujme tyto intervaly „zleva doprava“, takže tvoří regulární řetěz spojující body 0, 1. Každý interval $J(i_1)$ rozdělme na 7 stejně dlouhých intervalů $J(i_1, i_2)$, $0 \le i_2 \le 6$, a opět číslujme „zleva doprava“; při lexikografickém uspořádání dvojic (i_1, i_2) tvoří pak intervaly $J(i_1, i_2)$ regulární řetěz spojující body 0, 1. V n-tém kroku tímto postupem získáme systém 7^n intervalů $J(i_1, \dots, i_n)$, který při lexikografickém uspořádání tvoří regulární řetěz spojující 0, 1. Pokračujme takto do nekonečna.

Pak jedinému bodu průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J(i_1, \dots, i_n) \tag{21}$$

přiřaďme jediný bod průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q(i_1, \dots, i_n)\,. \tag{22}$$

Snadno nahlédneme, že definice je korektní a že uvedené zobrazení intervalu J na množinu L je homeomorfní.

Poznámka 10.9.. Rozměry křížů z n-tého kroku v 10.2 jsou tím složitější výrazy, čím větší je n. Čím větší je r, tím jsou kříže užší a na obrázcích nejsou šikmé úsečky dobře rozeznatelné. K ilustraci pátého kroku podobné konstrukce jsme proto zvolili za šířku n-tého kříže „jednoduché“ číslo $2^{2n-1}/10^n$.

Stejně jako při konstrukci popsané nahoře se ze čtverce $Q = \langle 0, 1\rangle^2$ vynechá kříž K, z každého ze zbylých čtverců $Q(2i_1)$, $0 \le i_1 \le 3$, kříž $K(i_1)$, atd. Konstrukce se však liší rozměry vynechaných křížů: Kříž K je sjednocením dvou obdélníků o rozměrech $\frac{2}{10} \times 1$, takže

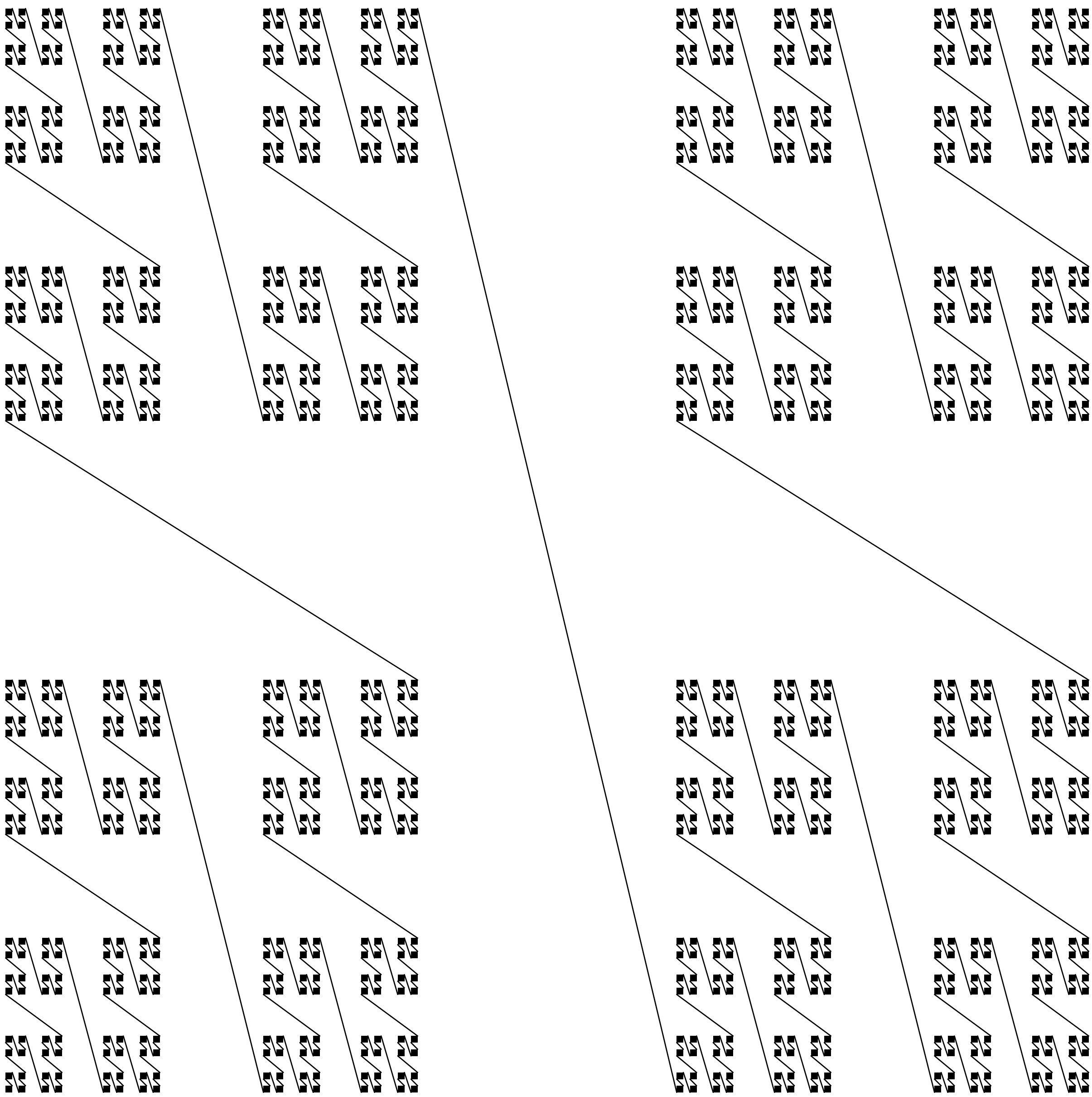
$$\mu(K) = 2 \cdot \Big(\frac{2}{10} \cdot 1\Big) - \Big(\frac{2}{10}\Big)^2 = \frac{9}{25} \tag{23}$$

a délka strany každého čtverce $Q(2i_1)$ je rovna polovině z $1 - 2/10$, tedy $4/10$.

Každý kříž $K(i_1)$ je sjednocením dvou obdélníků o rozměrech $2^3/10^2 \times (4/10)^1$, takže

$$\mu(K(i_1)) = 2 \cdot \frac{2^3}{10^2} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^1 - \left(\frac{2^3}{10^2}\right)^2 = \frac{36}{625}\,. \tag{24}$$

Abychom získali míru sjednocení všech křížů $K(i_1)$, je třeba číslo (24) vynásobit čtyřmi.



Obr. 30c. Pátý krok modifikované konstrukce

Obecně: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojíme kříže $K(i_1, \ldots, i_n)$ tak, že

$$\mu(K(i_1, \ldots, i_n)) = 2 \cdot \frac{2^{2n-1}}{10^n} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} - \left(\frac{2^{2n-1}}{10^n}\right)^2 = \frac{9 \cdot 4^{n-1}}{25^n}. \tag{25}$$

Abychom získali míru sjednocení všech křížů $K(i_1, \ldots, i_n)$, je třeba (25) vynásobit číslem 4^{n-1}:

$$4^{n-1} \cdot \mu(K(i_1, \ldots, i_n)) = \frac{9 \cdot 16^{n-1}}{25^n}. \tag{26}$$

Tato čísla tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem $9/25$ a kvocientem $16/25$; její součet je tedy

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{1}{1 - 16/25} = 1 . \tag{27}$$

Ze čtverce Q jsme vynechali množinu míry 1, a zbylý oblouk má proto míru 0. Právě uvedená modifikace konstrukce je podobná jako v příkladu 10.2, ale jednodušší numerické vztahy a možnost ukázat na obrázku prvních pět kroků změnily podstatnou okolnost: *jednodušeji zkonstruovaný oblouk nemá kladnou míru.*

* * *

V poslední části Dodatků zkonstruujeme rovinné kontinuum, jehož doplněk má celkem čtyři komponenty a je hranicí tří z nich. I když toto kontinuum bude ležet v eukleidovské rovině $\mathbb{R}^2$, odůvodnění jednotlivých kroků konstrukce se zjednoduší, budeme-li pracovat s rovinou rozšířenou o „bod nekonečno“ s vhodně zavedenou metrikou.

Buď ∞ jakýkoli bod, který nepatří do $\mathbb{R}^2$ a označme

$$\mathbb{S} := \{(x,y)\,;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \cup \infty\,; \tag{28}$$

buď $A := (0,0,1)$ „severní pól“ jednotkové sféry

$$\tilde{\mathbb{S}} := \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3\,;\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}\,. \tag{29}$$

Úsečka spojující bod $(x,y,0)$ roviny xy s bodem A sféry (29) má kromě bodu A s touto sférou společný ještě další bod, jehož souřadnice (jak snadno zjistíme elementárními prostředky analytické geometrie) jsou dány rovnostmi

$$\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\,,\ \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\,,\ \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\,. \tag{30}$$

Označme $\varPhi$ zobrazení, které bodu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ přiřazuje bod (ξ,η,ζ) podle (30), a bodu ∞ přiřadí bod A. *Vzdálenost dvou bodů a, b* z $\mathbb{S}$ definujme rovností

$$\rho^*(a,b) := \rho_3(\varPhi(a), \varPhi(b))\,, \tag{31}$$

kde ρ_3 je kartézská metrika v $\mathbb{R}^3$. „*Rozšířená rovina*“ $\mathbb{S}$ s metrikou ρ^* je pak izometrická se sférou $\tilde{\mathbb{S}}$, a v důsledku toho je *kompaktní*.

Poznamenejme, že kartézská metrika ρ_2 je v rovině $\mathbb{R}^2$ *ekvivalentní* s metrikou ρ^* (v tom smyslu, že pro $z_n \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^2$ platí ekvivalence $\rho_2(z_n,z) \to 0 \Leftrightarrow \rho^*(z_n,z) \to 0$ a pro $z_n = (x_n,y_n) \in \mathbb{R}^2$ je podmínka $\rho^*(z_n,\infty) \to 0$ ekvivalentní s podmínkou $\|z_n\|$ $(= \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\,) \to +\infty$. (Posloupnost čísel $z_n = (-1)^n n$ nemá v $\mathbb{R}$ limitu, ale posloupnost bodů $(z_n, 0)$ konverguje při metrice ρ^* k ∞.)

Hlavní výhodou přechodu od $\mathbb{R}^2$ k $\mathbb{S}$ je možnost aplikace tohoto velmi užitečného tvrzení:

Věta 10.9. (Janiszewski.) *Nechť množiny $A \subset \mathbb{S}$, $B \subset \mathbb{S}$ jsou buď obě uzavřené, nebo obě otevřené. Neroztíná-li žádná z nich rovinu $\mathbb{S}$ a je-li jejich průnik souvislý, jejich sjednocení $A \cup B$ neroztíná $\mathbb{S}$.* [53])

V topologii roviny a v jejích aplikacích např. v komplexní analýze [54]) hrají důležitou úlohu tato dvě tvrzení:

Věta 10.10. *Je-li $L \subset \mathbb{S}$ oblouk, je $\mathbb{S} - L$ oblast, jejíž hranicí je L. Analogické tvrzení platí, píšeme-li $\mathbb{R}^2$ místo $\mathbb{S}$.*

Věta 10.11. *Je-li $T \subset \mathbb{S}$ topologická kružnice, je $\mathbb{S} - T$ sjednocením dvou disjunktních oblastí, jejichž společnou hranicí je T. Analogické tvrzení platí, píšeme-li $\mathbb{R}^2$ místo $\mathbb{S}$.*

---

[53]) Důkaz viz [2], str. 355, tvrzení 7, nebo třeba moje kniha Analýza v komplexním oboru, Academia, Praha 1983, str. 135, Věta 5,3,4.

[54]) kde se ovšem ∞ nepřidává v eukleidovské rovině $\mathbb{R}^2$, ale k (otevřené) Gaussově rovině, která je s $\mathbb{R}^2$ izometricky izomorfní

Důkazy právě uvedených dvou vět nejsou právě jednoduché; obě jsou dokázány např. v [8], str. 221, jako tvrzení 26.5.3 a 26.5.4. Obě věty jsou triviálními důsledky následující věty o rozšíření homeomorfismů, jejíž obvyklý důkaz (viz např. [2], str. 381) je však (bohužel) na nich založen.

Věta 10.12. *Je-li $M \subset \mathbb{S}$ buď oblouk nebo topologická kružnice a je-li $h : M \to \mathbb{S}$ homeomorfní zobrazení, existuje homeomorfní zobrazení $H : \mathbb{S} \to_{\text{na}} \mathbb{S}$ tak, že $H(z) = h(z)$ pro každé $z \in M$. Analogické tvrzení platí, píšeme-li $\mathbb{R}^2$ místo $\mathbb{S}$.*

Důkaz věty 10.10 pomocí věty 10.12 je opravdu jednoduchý: Nechť h je homeomorfní zobrazení oblouku L na interval $\langle 0,1\rangle$ a $H : \mathbb{S} \to_{\text{na}} \mathbb{S}$ nechť je jeho homeomorfní rozšíření. Protože $\Omega := \mathbb{S} - \langle 0,1\rangle$ je zřejmě oblast, jejíž hranicí je $\langle 0,1\rangle$, a protože při homeomorfním zobrazení H_{-1} přechází oblast v oblast a hranice v hranici, je $\mathbb{S} - L$ oblast s hranicí L.

Podobně se na základě věty 10.12 dokáže i věta 10.11; interval $\langle 0,1\rangle$ nahradíme jednotkovou kružnicí.

Poznámka 10.10. Ve větě 10.10 je L kontinuum, které je hranicí jediné oblasti; ve větě 10.11 je T kontinuum, které je společnou hranicí dvou disjunktních oblastí. Je proto přirozenou otázkou, zdali i pro každé $n > 2$ existuje kontinuum, které je společnou hranicí n disjunktních oblastí. Ukážeme, že odpověď na tuto otázku je kladná: *sestrojíme kontinuum $K \subset \mathbb{R}^2$, které je hranicí tří disjunktních oblastí.* [55]) Kuratowski v [2], str. 404, odst. 11 uvádí, že *společná hranice tří disjunktních (neprázdných) oblastí je buď nerozložitelné kontinuum, nebo sjednocení dvou nerozložitelných kontinuí.* Nelze proto očekávat, že konstrukce bude snadná.

V literatuře najdeme „hezké vyprávění“, jak úkol splnit „zavodňováním ostrova“: [56])

Ostrov, na němž jsou tři jezera, potřebujeme vodními nádržemi, které vzniknou rozšířením těchto jezer o kanály, které z nich vycházejí, „co nejlépe“ zavodnit vodami všech tří jezer. Vody se nesmí smíchat, příslušné vodní nádrže se nesmí protínat ani dotýkat. Potřebné práce rozložíme na etapy, během nichž budeme kanály postupně prodlužovat a tím příslušné nádrže rozšiřovat: Za první rok vykopeme z každého jezera kanál tak, aby každé dosud suché místo ostrova mělo od každé ze tří nádrží vzdálenost menší než 1 km, za dalšího půl roku prodloužíme každý z kanálů tak, aby každé dosud suché místo ostrova mělo od každé z nádrží vzdálenost menší než půl kilometru, za dalšího čtvrt roku prodloužíme každý z kanálů tak, aby každé dosud suché místo ostrova mělo od každé z nádrží vzdálenost menší než čtvrt kilometru, atd. do nekonečna. Za dva roky bude mít každé zbylé suché místo ostrova od každé ze tří nádrží vzdálenost 0 km, takže „ať máme jakkoli krátké ruce, můžeme suchá místa zalévat vodou z kteréhokoli ze tří jezer“.

Je patrné, že toto názorné vyprávění má „malou vadu“: nehledě na to, že nevíme, co se rozumí „jezerem“ a „kanálem“ *nedokazuje se, že popisovanou myšlenkovou konstrukci lze opravdu realizovat.* V dalším se pokusíme celou úvahu zpřesnit a jednotlivé kroky odůvodnit; budeme k tomu potřebovat nejen Janiszewského větu, ale i několik nových pojmů a pomocných tvrzení.

Definice 10.2. Říkáme, že **oblouk** $L = ab \subset \mathbb{S}$ **vychází z bodu** a **do** $\Omega \subset \mathbb{S}$, je-li $a \in H(\Omega)$ a $L - a \subset \Omega$. Říkáme, že **bod** $a \in H(\Omega)$ **je dosažitelný z** Ω, existuje-li oblouk L vycházející z bodu a do Ω. Říkáme, že **bod** a **je z** Ω **dosažitelný lineárně**, existuje-li úsečka vycházející z bodu a do Ω. Je-li bod a dosažitelný z Ω, ale není dosažitelný lineárně, budeme říkat, že je **dosažitelný z** Ω **nelineárně**.

Následující příklady 10.3 ukáží, že každý bod hranice oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nemusí být z Ω dosažitelný. Platí však toto jednoduché tvrzení:

Věta 10.13. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{S}$ oblast, která má omezenou hranici, je množina všech bodů z $H(\Omega)$ dosažitelných z Ω lineárně, hustá v $H(\Omega)$.*

D ů k a z . Pro každé $a \in H(\Omega)$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje bod $b \in \Omega \cap U(a, \varepsilon)$. Bod c úsečky $\langle a; b\rangle$ nejbližší bodu b je zřejmě lineárně dosažitelný z Ω.

Příklady 10.3. 1. Je-li A sjednocení grafu funkce $\sin(1/x)$, $0 < |x| \leq 1$, s úsečkou B s krajními body $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, je $\Omega := \mathbb{S} - A$ oblast, jejíž hranicí je A. Body a, b jsou z Ω dosažitelné lineárně, ale žádný bod *otevřené* úsečky s krajními body a, b není z Ω dosažitelný.

2. Počátek $p = (0, 0)$ je nelineárně dosažitelný z oblasti $\Omega := U((2, 0), 2) - \overline{U((1, 0), 1)}$.

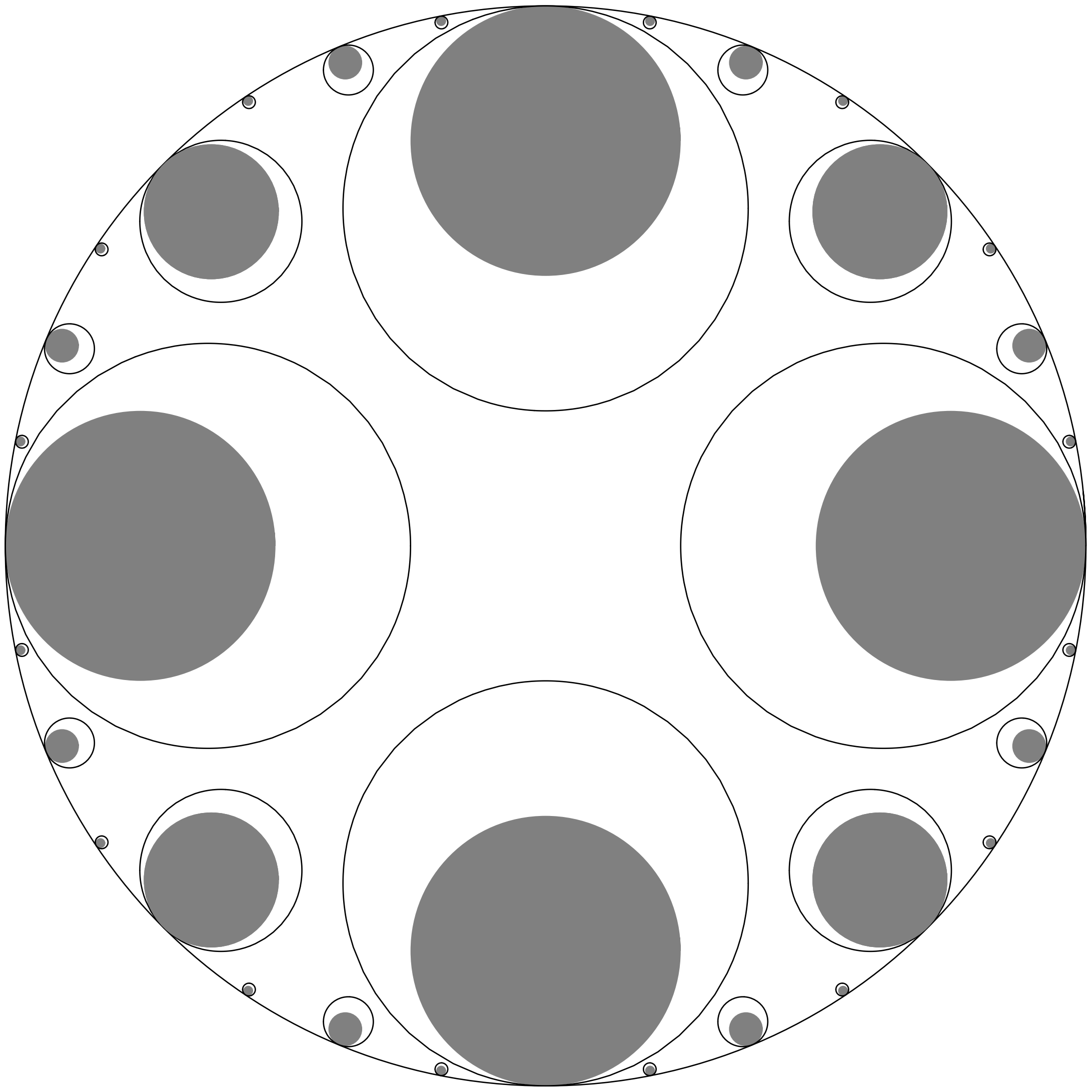
3. Podle věty 10.13 tvoří body lineárně dosažitelné z oblasti Ω (s omezenou hranicí) hustou část její hranice; i množina všech bodů nelineárně dosažitelných z Ω však může být „podstatnou částí“ $H(\Omega)$:

[55]) Čtenář po prostudování navržené konstrukce snadno nahlédne, že podobně lze postupovat i pro každé $n > 3$, dokonce i pro $n = \infty$.

[56]) Viz např. [6], str. 217 – 218; vyprávění je upraveno tak, aby všechny tři oblasti byly omezené.

Předcházející příklad lze modifikovat tak, aby množina všech bodů jednotkové kružnice C nelineárně dosažitelných z oblasti $\Omega \subset U := U(p,1)$, kde $p := (0,0)$, byla hustá v C:

Abychom zkrátili vyjadřování, nechť v tomto příkladu slovo „kruh“ znamená „uzavřený kruh“; slovy „dotýkající se“ budeme rozumět „dotýkající se zevnitř“.



Obr. 31. Oblast Ω_4. Kruhy $D(n,k)$ (tmavé) a kružnice $C(n,k)$ pro $n = 1, \dots, 4$.

Pro $k = 1, \dots, 4$ nechť je $B(1,k)$ kruh o poloměru $\rho_1 := \frac{3}{8}$, dotýkající se kružnice C v bodě

$$b(1,k) := (\cos\alpha(1,k), \sin\alpha(1,k)), \quad \text{kde} \quad \alpha(1,k) := \frac{k\pi}{2}. \tag{32}$$

Označme $C(1,k) := H(B(1,k))$, buď $D(1,4)$, $k = 1, \dots, 4$, kruh o poloměru $r_1 := \frac{1}{4}$ dotýkající se kružnice C v bodě (32) a D_1 nechť je sjednocení všech kruhů $D(1,k)$. Dokažme, že

$$\Omega_1 := \Omega - D_1 \tag{33}$$

je oblast. Důkaz na základě Janiszewského věty je snadný: Množiny $\mathbb{S} - U$, $D(1,1)$ jsou uzavřené a neroztínají $\mathbb{S}$; protože jejich (jednobodový) průnik $b(1,1)$ je souvislý, neroztíná $\mathbb{S}$ ani množina $(\mathbb{S} - U) \cup D(1,1)$, tj. její doplněk

$$\Omega_1(1) := \mathbb{S} - ((\mathbb{S} - U) \cup D(1,1) = U - D(1,1) \tag{34}$$

je souvislý. Množina (34) je tedy oblast. Provedeme-li analogickou úvahu s ní a s kruhem $D(1,2)$, zjistíme, že i množina $\Omega_1(2) := \Omega_1(1) - D(1,2)$ je oblast. Celkem ve čtyřech krocích tak dokážeme, že oblastí je i množina (33).

Žádný z bodů $b(1,k)$ zřejmě není z Ω dosažitelný lineárně. Protože kružnice $C(1,k))$ je sjednocení dvou oblouků vycházejících z bodu $b(1,k)$ do Ω_1, jsou body $b(1,k)$ z Ω_1 dosažitelné nelineárně. Během následující konstrukce budeme oblast Ω_1 zmenšovat; protože však z U nikdy nevynecháme žádný bod sjednocení B_1 kruhů $B(1,k)$, zůstanou body $b(1,k)$ nelineárně dosažitelné i z menších oblastí, které postupně zkonstruujeme. [57])

Protože množina všech bodů

$$b(2,k) := (\cos\alpha(2,k), \sin\alpha(2,k)), \text{ kde } \alpha(2,k) := \frac{(2k-1)\pi}{2^3} \text{ a kde } k = 1,\dots,2^2, \tag{35}$$

má od B_1 kladnou vzdálenost, existuje $\rho_2 \in (0, r_1)$ tak, že každý z kruhů $B(2,k)$ o poloměru ρ_2, dotýkající se kružnice C v bodě $b(2,k)$, je disjunktní s B_1. Zvolme pevně číslo $r_2 \in (0,\rho_2)$ a označme $D(2,k)$ kruh o poloměru r_2 dotýkající se kružnice C. Označme D_2 sjednocení D_1 se všemi kruhy $D(2,k)$, B_2 sjednocení B_1 se všemi kruhy $B(2,k)$ a nechť

$$\Omega_2 := \Omega_1 - B_2\,. \tag{36}$$

Jako nahoře se dokáže, že Ω je oblast a že všechny body $b(1,k)$, $b(2,k)$ jsou z ní nelineárně dosažitelné.

Předpokládejme, že pro některé $n \geq 2$ jsou definována čísla $\rho_n \in (0, r_{n-1})$, $r_n \in (0,\rho_n)$ a množiny B_n, D_n (složené z jistých kruhů dotýkajících se kružnice C v bodech $b(j,k)$, $j = 1,\dots,n$). [58]) Množina všech bodů

$$b(n+1,k) := (\cos\alpha(n+1,k), \sin\alpha(n+1,k)), \text{ kde } \alpha(n+1,k) := \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}},\ k = 1,\dots,2^{n+1}, \tag{37}$$

má pak kladnou vzdálenost od B_n, a existuje proto $\rho_{n+1} \in (0, r_n)$ tak, že kruhy $B(n+1,k)$ o poloměru ρ_{n+1}, dotýkající se kružnice C v bodech $b(n+1,k)$, jsou disjunktní s B_n. Zvolme pevně číslo $r_{n+1} \in (0,\rho_{n+1})$ a definujme $B(n+1,k)$ resp. $D(n+1,k)$ jako kruh o poloměru ρ_{n+1} resp. r_{n+1} dotýkající se kružnice C a buď B_{n+1} resp. D_{n+1} sjednocení B_n resp. D_n se všemi kruhy $B(n+1,k)$ resp. $D(n+1,k)$. Jako nahoře se dokáže, že

$$\Omega_{n+1} := \Omega_n - D_{n+1} \tag{38}$$

je oblast a že všechny body $b(1,k),\dots,b(n+1,k)$ jsou z ní nelinárně dosažitelné.

Buď konečně

$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\,,\quad \Omega := U - D\,. \tag{39}$$

Tvrdíme, že Ω *je oblast, z níž je každý z bodů* $(\cos(2k\pi/2^n), \sin(2k\pi/2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2^n$, *dosažitelný, ale nelineárně.*

Protože Ω je otevřená množina, stačí dokázat, že pro každé dva její body $a \neq b$ existuje kontinuum $M \subset \Omega$ obsahující body a, b. Protože U je konvexní oblast, leží v U i úsečka $\langle a; b\rangle$; parametrizujme ji lineární funkcí $\lambda : \langle 0,1\rangle \to U$ tak, že $\lambda(0) = a$, $\lambda(1) = b$. Protože vzdálenost úsečky $\langle a; b\rangle$ od kružnice C je kladná a protože $\operatorname{Lim} D_n \subset C$, protíná tato úsečka jen konečný počet kruhů $D(n,k)$.

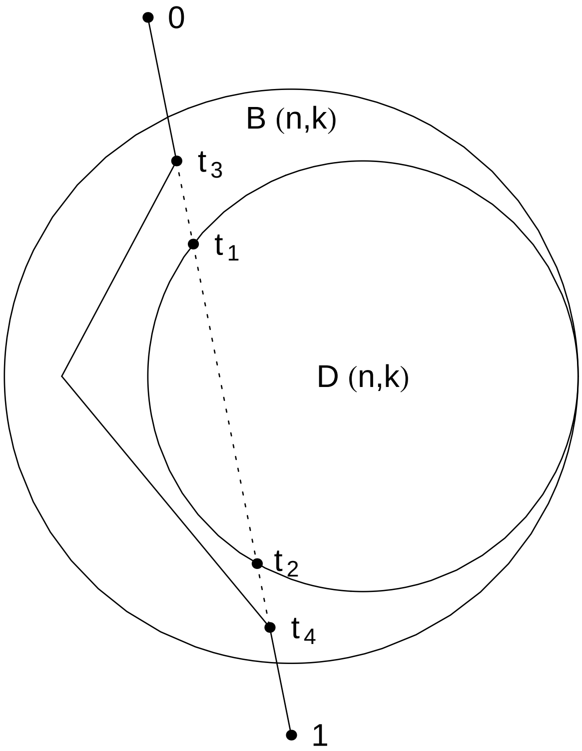
a) Neprotíná-li $\langle a; b\rangle$ žádný kruh $D(n,k)$, položíme $M := \langle a; b\rangle$.

b) Nechť $\langle a; b\rangle$ protíná nějaký kruh $D(n,k)$; protože body a, b leží v Ω, neleží v $D(n,k)$, a existují proto čísla t_1, t_2 tak, že $0 < t_1 < t_2 < 1$, že množina $\lambda((0,t_1\rangle \cup \lambda\langle t_2, 1)$ je disjunktní s $D(n,k)$ a že body $\lambda(t_1)$, $\lambda(t_2)$ leží v $D(n,k)$. [59]) Vzhledem k tomu, jak je definován kruh $B(n,k)$, je zřejmé, že pro $t_3 \in (0,t_1)$, $t_4 \in (t_2, 1)$ dostatečně blízké k t_1 resp. k t_2 leží polouzavřené úsečky $\lambda((t_3, t_1\rangle$ a $\lambda(\langle t_2, t_4)$ v oblasti $\operatorname{Int} B(n,k) - D(n,k)$ a existuje proto spojitá funkce $\mu : \langle t_3, t_4\rangle \to \operatorname{Int} B(n,k) - D(n,k)$ tak, že $\mu(t_3) = la(t_3)$, $\mu(t_4) = \lambda(t_4)$. Nahradíme-li tedy úsečku $\lambda(\langle t_3, t_4\rangle)$ kontinuem $\mu(\langle t_3, t_4\rangle)$, dostaneme kontinuum M_1, které obsahuje body a, b a neprotíná kruh $D(n,k)$.

[57]) Úvahu analogickou úvaze z tohoto odstavce nebudeme v dalším krocích již provádět.

[58]) Před indukčním krokem jsme museli udělat dva kroky, protože jak kruhy $B(1,k)$, tak i kruhy $B(2,k)$ jsou čtyři a pak se teprve každým dalším krokem počet kruhů $B(j,k)$ zdvojnásobuje.

[59]) Postupujeme-li po úsečce $\langle a; b\rangle$ od bodu a k bodu b, je $\lambda(t_1)$ první, $\lambda(t_2)$ poslední bod této úsečky, který leží v kruhu $D(n,k)$. Viz obr. 32.



Obr. 32. Konstrukce kontinua M_1 (souvislá čára); odstraněná část úsečky $\langle a; b\rangle$ je vyznačena čárkovaně

c) Protíná-li kontinuum M_1 některý z kruhů $D(n', k')$, postupujeme podobně jako v části b) tohoto důkazu a získáme kontinuum M_2, které neprotíná ani $D(n, k)$, ani $D(n', k')$. Je zřejmé, že po konečném počtu kroků tak získáme kontinuum M s nahoře uvedenými vlastnostmi. To dokazuje, že Ω je oblast.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou příslušné body $b(1, k), \dots, b(n, k)$ dosažitelné z Ω_n po obloucích kružnic $C(1, k), \dots, C(n, k)$ a tyto kružnice leží v $\Omega_{n+1}, \Omega_{n+2}, \dots$, je zřejmé, že všechny body $b(n, k)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou z Ω dosažitelné, ale nelineárně.

4. Doplněk kontinua K z příkladu 4.4, obr. 8, má dvě komponenty. Body jednotkové kružnice jsou z neomezené komponenty (rovné vnějšku jednotkového kruhu) dosažitelné lineárně, ale z omezené komponenty (obsažené v jednotkovém kruhu) dosažitelné nejsou.

5. Kontinuum K z příkladu 4.5 má dvě omezené komponenty. Bod $(-1, 0)$ není dosažitelný z žádné z nich, bod $(1, 0)$ je dosažitelný z každé z nich, ale nelineárně. Všechny ostatní body úsečky s krajními body $(-1, 0)$, $(1, 0)$ jsou dosažitelné lineárně z každé z obou komponent.

6. Je-li Ω doplněk křivky z poznámky 4.12, jsou z Ω lineárně dosažitelné krajní body všech úseček (spojujících body Cantorova diskontinua s bodem $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$). Totéž platí pro vnitřní body úseček, které p spojují s bodem x prvního druhu. Žádný vnitřní bod žádné úsečky spojujících bod p s bodem x druhého druhu z Ω dosažitelný není. [60]) $\square$

Věta 10.14. *Je-li $L \subset \mathbb{S}$ oblouk, je každý bod $a \in L$ dosažitelný z oblasti $\mathbb{S} - L$. Je-li $T \subset \mathbb{S}$ topologická kružnice, je každý bod $a \in T$ dosažitelný z každé komponenty množiny $\mathbb{S} - T$.*

Poznámka 10.11. Věta 10.14 ukazuje, že nejen „vnitřní topologické vlastnosti“ rovinných oblouků resp. topologických kružnic jsou stejné jako vlastnosti úseček resp. kružnic, ale že totéž platí i pro jejich „vnější topologické vlastnosti“. Toho lze využít k důkazu věty 10.14:

D ů k a z . Je-li $H : \mathbb{S} \to_{\text{na}} \mathbb{S}$ homeomorfní zobrazení, pro něž je $H(L) = \langle 0, 1\rangle$, existuje úsečka Λ s krajním bodem $H(a)$ tak, že $\Lambda \cap \langle 0, 1\rangle = H(a)$; $M := H_{-1}(\Lambda)$ je pak oblouk s krajním bodem a, pro

[60]) V tomto případě je nejen množina všech dosažitelných bodů, ale i množina všech nedosažitelných bodů hustá v $H(\Omega)$.

nějž je $(M - a) \cap L = \emptyset$.

Druhá část věty se dokáže zcela analogicky, jen $\langle 0, 1 \rangle$ nahradíme jednotkovou kružnicí. $\square$

Přikročme nyní k pomocným tvrzením, potřebným pro „zavodňování ostrova".

Lemma 10.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{S}$ je oblast a nechť $L_1 = a_1 b_1, \dots, L_n = a_n b_n$ je libovolný konečný systém disjunktních oblouků, pro něž je $L_k - a_k \subset \Omega$ pro $k = 1, \dots, n$.* [61]) *Pak je*

$$\Omega - \bigcup_{k=1}^{n} L_n \tag{40}$$

oblast.

D ů k a z stačí provést pro $n = 1$, protože obecný případ dokážeme opakováním úvahy, která následuje.

Položme $M_1 = \mathbb{S} - \Omega$, $M_2 = L_1$. Protože obě množiny jsou uzavřené, žádná z nich neroztíná $\mathbb{S}$ a jejich průnik je buď prázdný, nebo jednobodový (v obou případech tedy souvislý), neroztíná $\mathbb{S}$ (podle Janiszewského věty 10.9) ani množina $(\mathbb{S} - \Omega) \cup L_1$, což je totéž, jako když řekneme, že množina

$$\mathbb{S} - ((\mathbb{S} - \Omega) \cup L_1) = \Omega - L_1$$

je souvislá. Protože je zároveň otevřená, je to oblast.

Definice 10.3. Regulární lomenou čárou (zkratka r.l.č.) rozumíme množinu tvaru

$$L = \bigcup_{k=1}^{n} L_k\,, \tag{41}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a kde $L_k = \langle a_{k-1}; a_k \rangle \subset \mathbb{R}^2$ jsou úsečky splňující tyto podmínky:

1) každá úsečka L_k je rovnoběžná s některou souřadnicovou osou;

2) je-li $n > 1$, je $L_k \cap L_{k+1} = a_k$ pro $k = 1, \dots, n-1$;

3) je-li $n > 2$ a jsou-li i, j dva indexy, pro něž je $|j - i| > 1$, je $L_i \cap L_j = \emptyset$.

Nebude-li výslovně řečeno něco jiného, orientujeme L tak, aby a_0 byl její **počáteční bod**, a_n její **koncový bod**, a budeme pak říkat, že L **spojuje** a_0 **s** a_n; je-li navíc $L \subset \Omega$, budeme říkat, je tyto body **spojuje v** Ω. $\square$

Snadno nahlédneme, že *regulární lomená čára je oblouk.*

Lemma 10.2. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, existuje pro každé dva různé body a, b z Ω r.l.č. $L \subset \Omega$, která spojuje a s b.*

D ů k a z . Několikrát budeme v dalším potřebovat toto evidentní tvrzení:

(42) *Je-li K otevřený kruh a je-li $u \in H(K)$, $v \in K$, existuje r.l.č. $\Lambda \subset \overline{K}$ spojující u s v tak, že $\Lambda - a \subset K$.* [62])

Označme M_1 množinu všech bodů $x \neq a$, pro něž existuje r.l.č. $L_x \subset \Omega$, která spojuje a s x, a buď $M := M_1 \cup a$. Protože M není prázdná množina, bude lemma dokázáno, dokážeme-li, že množina M je otevřená i uzavřená v Ω.

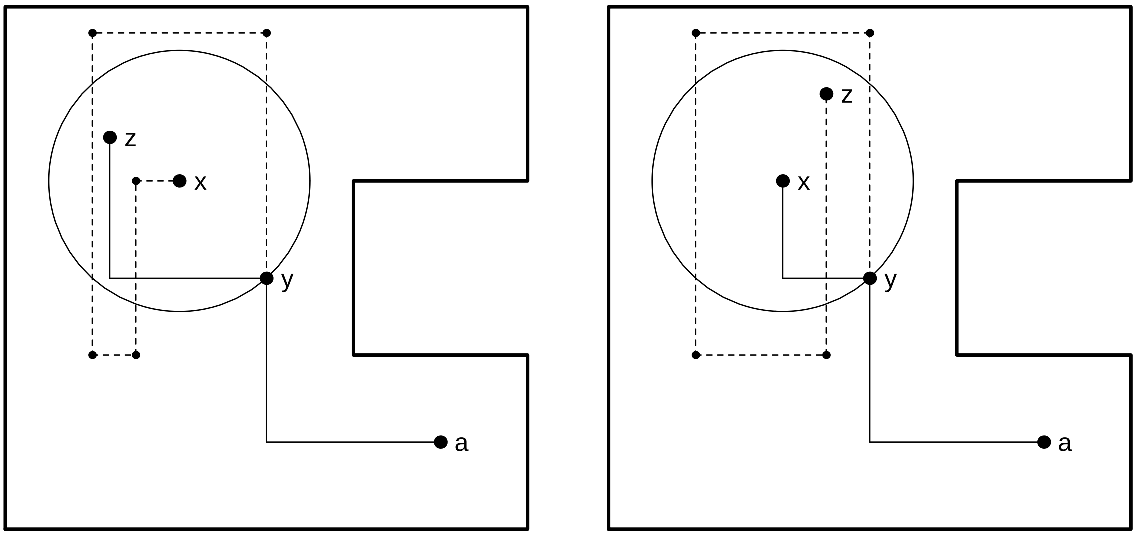
Je-li $\delta > 0$ tak malé, že $U := U(a, \delta) \subset \Omega$, existuje pro každý bod $x \in U$ různý od a r.l.č. $L_x \subset U$ spojující a s x. Z toho plyne, že $U \subset M$.

Je-li $a \neq x \subset M$, existuje r.l.č. $L_x \subset \Omega$ spojující a s x a $\delta > 0$ tak malé, že $\overline{U(x, \delta)} \subset \Omega - a$. Pak L_x protíná hranici kruhu $U(x, \delta)$ a existuje první bod $y \in L_x$ ležící v $H(U(x, \delta))$; buď L_y část L_x spojující a s y. Nechť $z \in U(x, \delta)$ a nechť Λ je r.l.č. spojující y se z, přičemž $\Lambda - y \subset U(x, \delta)$ (srov. s (42)). $L_y \cup \Lambda$ je pak r.l.č. spojující a se z, takže $z \in M$. Tím je důkaz otevřenosti množiny M dokončen.

Nechť $a \neq x \in \overline{M} \cap \Omega$ a nechť $\delta > 0$ je tak malé, že $\overline{U(x, \delta)} \subset \Omega$. Zvolme pevně nějaké $z \in U(x, \delta) \cap M$ a nějakou r.l.č. L_z spojující a se z; buď y její první bod ležící na hranici kruhu $U(x, \delta)$ a $L_y \subset L_z$ nechť je r.l.č. spojující a s y. Podle (42) existuje r.l.č. Λ spojující y s x tak, že $\Lambda - y \subset U(x, \delta)$. $L_y \cup \Lambda$ je pak r.l.č. spojující a s x v Ω; bod x leží tedy v M. Tím je dokázáno, že množina M je uzavřená v Ω, a zároveň je tím dokončen důkaz lemmatu 10.2.

[61]) Každý oblouk L_k tedy buď leží v Ω celý, nebo celý až na krajní bod a_k, který pak leží v $H(\Omega)$.

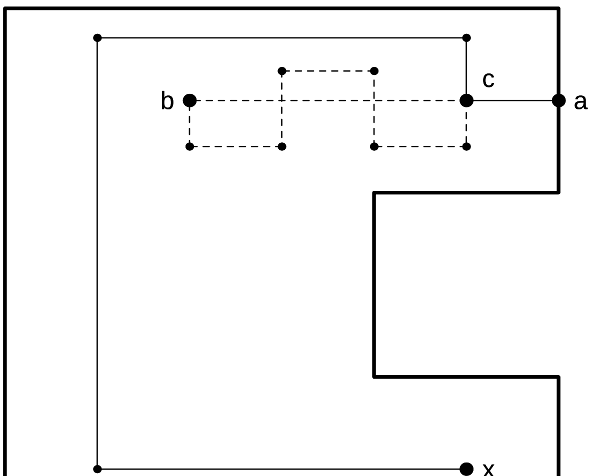
[62]) Λ lze vždy zvolit tak, aby to byla úsečka nebo sjednocení dvou úseček.



Obr. 33. K důkazu lemmatu 10.2: Vlevo otevřenost, vpravo uzavřenost v Ω množiny M;
vynechané části lomených čar jsou vyznačeny čárkovaně

Lemma 10.3. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, nechť $a \in H(\Omega)$ a nechť existuje úsečka $L_b = \langle a; b\rangle$ rovnoběžná s některou ze souřadnicových os tak, že $L_b - a \subset \Omega$. Pak pro každé $x \in \Omega$ existuje r.l.č. L_x, která spojuje a s x a pro niž je $L_x - a \subset \Omega$.*

D ů k a z . Podle lemmatu 10.2 existuje r.l.č. L_{xb} spojující x s b v Ω. Orientujme úsečku L_b tak, že a je jejím prvním bodem, buď c její první bod ležící v L_{xb} a nechť L_c je část úsečky L_b mezi a a c. Orientujme r.l.č. L_{xb} tak, že jejím prvním bodem je x, a nechť L_{xc} je část L_{xb} mezi x a c. Jak snadno nahlédneme, je $L_c \cup L_{xc}$ hledaná r.l.č.



Obr. 34. K důkazu lemmatu 10.3;
vynechané části lomených čar jsou vyznačeny čárkovaně

Lemma 10.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, nechť $K \subset \Omega$ je neprázdná konečná množina a nechť existuje* *úsečka Λ vycházející z bodu $a \in H(\Omega)$ do Ω a rovnoběžná s některou souřadnicovou osou. Pak existuje r.l.č. L vycházející z bodu a do Ω tak, že $K \subset L$.*

D ů k a z . Protože úsečku L lze zkrátit, lze předpokládat, že je disjunktní s $K = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (kde $n \in \mathbb{N}$ a c_i jsou navzájem různé body).

Podle lemmatu 10.3 existuje r.l.č. L_1 vycházející z bodu a do Ω a spojující a s c_1. Je-li $n = 1$, jsme hotovi; je-li $n > 1$, pokračujme: Protože podle lemmatu 10.1 je $\Omega_1 := \Omega - L_1$ oblast a protože zřejmě existuje úsečka vycházející z bodu c_1 do Ω_1 a rovnoběžná s některou souřadnicovou osou, existuje r.l.č. L_2 vycházející z bodu c_1 do Ω_1 a spojující c_1 s c_2. $L_1 \cup L_2$ je r.l.č. vycházející z bodu a do Ω, obsahující bod c_1 a spojující a s c_2.

Je-li $n = 2$, jsme hotovi; jinak pokračujme analogicky jako dosud. Po konečném počtu kroků získáme žádanou r.l.č.

Definice 10.4. Otevřeným (resp. **uzavřeným**) **δ-čtvercem o středu** $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ budeme nazývat množinu

$$Q(x, \delta) := (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times (x_2 - \delta, x_2 + \delta) \ \ (\text{resp. } R(x, \delta) := \langle x_1 - \delta, x_1 + \delta \rangle \times \langle x_2 - \delta, x_2 + \delta \rangle). \tag{43}$$

Otevřeným (resp. **uzavřeným**) **δ-kanálem s osou** L nazveme sjednocení $ok(L, \delta)$ (resp. $uk(L, \delta)$) všech otevřených (resp. uzavřených) δ-čtverců o středech v L. **Kanálem s osou** L nazveme množinu, která je δ-kanálem s osou L pro nějaké $\delta > 0$. **Šířkou** uvedených kanálů nazveme číslo 2δ.

Poznámka 10.4. Otevřený (uzavřený) kanál, jehož osou je úsečka, je otevřený (uzavřený) interval. Z toho ihned plyne, že *pro každou r.l.č. L a každé $\delta > 0$ je otevřený kanál s osou L oblast, uzavřený kanál s osou L kontinuum.* Kromě toho zřejmě platí:

$$ok(L, \delta) \subset U(L, \sqrt{2}\,\delta) \ \ \big(\text{resp. } uk(L, \delta) \subset \overline{U(L, \sqrt{2}\,\delta)}\big). \tag{44}$$

Důležité bude při „zavodňování ostrova“ toto tvrzení:

Lemma 10.5. *Je-li L r.l.č., existuje $\Delta > 0$ tak, že pro žádné $\delta \in (0, \Delta)$ neroztíná $uk(L, \delta)$ rovinu $\mathbb{S}$.*

D ů k a z . Nechť L je jako v definici r.l.č., tj. nechť platí (41) spolu s podmínkami a), b), c). Podmínky c) zaručuje, že úsečky L_i, L_j mají pro každou dvojici indexů i, j, pro něž je $|i - j| > 1$, kladnou vzdálenost Δ_{ij}. Nechť číslo $\Delta > 0$ je menší než polovina minima všech těchto Δ_{ij} a nechť $\delta \in (0, \Delta)$. Vzhledem k (44) jsou pak kanály $uk(L_i, \delta)$, $uk(L_j, \delta)$ (kde $|i - j| > 1$) disjunktní. Žádný kanál, jehož osou je úsečka, neroztímá $\mathbb{S}$ a . průnikem δ-kanálů s osami L_k, L_{k+1} je δ-čtverec o středu a_k, tedy souvislá množina.

Postupujme podle Janiszewského věty 10.1: Kanály $uk(L_1, \delta)$, $uk(L_2, \delta)$ neroztínají $\mathbb{S}$ a jejich průnik je souvislý; proto ani jejich sjednocení $uk(L_1, \delta) \cup uk(L_2, \delta) = uk(L_1 \cup L_2, \delta)$ neroztíná $\mathbb{S}$. Je-li $n > 2$, uvažme, že průnik naposled napsaného kanálu s kanálem $uk(L_3, \delta)$ je uzavřený δ-čtverec o středu a_2. Podle Janiszewského věty tedy ani $uk(L_1 \cup L_2 \cup L_3$ neroztíná $\mathbb{S}$, atd. Po konečném počtu kroků bude tvrzení lemmatu dokázáno.

Definice 10.5. Regulárním kanálem nazveme kanál, který neroztíná $\mathbb{S}$. [63])

Lemma 10.6. *Pro každou omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $K \subset M$ tak, že*

$$x \in M \ \Rightarrow \ \rho\,(x, K) < \varepsilon\,. \tag{45}$$

D ů k a z . Množina $N := \overline{M}$ je kompaktní, takže ze systému $\{U(x, \frac{1}{2}\varepsilon)\}_{x \in N}$, který pokrývá N, lze (podle Borelovy věty) vybrat konečný podsystém $U(x_1, \frac{1}{2}\varepsilon), \ldots, U(x_m, \frac{1}{2}\varepsilon)$, který množinu N také pokrývá. Zvolíme-li pro každé $k = 1, \ldots, m$ bod $y_k \in M \cap U(x_k, \frac{1}{2}\varepsilon)$, je zřejmě $U(x_k, \frac{1}{2}\varepsilon) \subset U(y_k, \varepsilon)$, takže množina $K := \{y_1, \ldots, y_m\}$ má žádanou vlastnost.

Nyní již budeme moci dokázat toto tvrzení:

Věta 10.15. *V $\mathbb{R}^2$ existují omezené neprázdné disjunktní oblasti Ω_1, Ω_2, Ω_3 tak, že*

$$H(\Omega_1) = H(\Omega_2) = H(\Omega_3)\,. \tag{46}$$

---

[63]) Je-li tedy L r.l.č., je regulárním kanálem s osou L každý kanál s touto osou a dostatečně malou šířkou.

D ů k a z . Označme

$$A := \langle 0, \sqrt{2}\,\rangle \times \langle 0, \sqrt{2}\,\rangle, \tag{47}$$

nechť $A(0,1)$, $A(0,2)$, $A(0,3)$ jsou disjunktní uzavřené čtverce obsažené v $\operatorname{Int} A$ a nechť $a(0,i)$ je pro každé $i = 1,2,3$ střed některé (libovolné, ale pevně zvolené) strany čtverce $A(0,i)$. Snadno zjistíme, že

$$G := \operatorname{Int} A - (A(0,1) \cup A(0,2) \cup A(0,3)). \tag{48}$$

je oblast o průměru 2.

Nechť $K(1,1) \subset G$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti G vzdálenost ≤ 1 (srov. s lemmatem 10.6). Podle lemmatu 10.4 existuje r.l.č. $L(1,1)$ vycházející z bodu $a(0,1)$ do G, pro niž je $K(1,1) \subset L(1,1)$; její krajní bod různý od $a(0,1)$ označme $a(1,1)$. Podle lemmatu 10.5 existuje regulární kanál $uk(1,1)$ s osou $L(1,1)$ a šířkou $2\delta(1,1)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(0,2) \cup A(0,3)$. Protože průnik tohoto kanálu se čtvercem $A(0,1)$ je souvislý, je podle Janiszewského věty

$$G(1,1) := G - uk(1,1) \tag{49}$$

oblast; množina

$$A(1,1) := A(0,1) \cup uk(1,1) \tag{50}$$

je kompaktní a disjunktní s $A(0,2) \cup A(0,3)$.

Nechť $K(1,2) \subset G(1,1)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(1,1)$ vzdálenost ≤ 1, nechť $L(1,2)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(0,2)$ do $G(1,1)$ a obsahující množinu $K(1,2)$; její krajní bod různý od $a(0,2)$ označme $a(1,2)$. Nechť $uk(1,2)$ je regulární kanál s osou $L(1,2)$ a šířkou $2\delta(1,2)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(0,3) \cup A(1,1)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(1,2) := G(1,1) - uk(1,2) \tag{51}$$

oblast; množina

$$A(1,2) := A(0,2) \cup uk(1,2) \tag{52}$$

je kompaktní a disjunktní s $A(0,3) \cup A(1,2)$.

Nechť $K(1,3) \subset G(1,2)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(1,2)$ vzdálenost ≤ 1, nechť $L(1,3)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(0,3)$ do $G(1,2)$ a obsahující $K(1,3)$; její krajní bod různý od $a(0,3)$ označme $a(1,3)$. Nechť $uk(1,3)$ je regulární kanál s osou $L(1,3)$ a šířkou $2\delta(1,3)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(1,1) \cup A(1,2)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(1,3) := G(1,2) - uk(1,3) \tag{53}$$

oblast; množina

$$A(1,3) := A(0,3) \cup uk(1,3) \tag{54}$$

je kompaktní a disjunktní s $A(1,1) \cup A(1,2)$.

Je-li $1 \leq i \leq 3$ a označíme-li $ok(1,i)$ kanál $ok(L(1,i), \delta(1,i))$, jsou

$$\Omega(1,i) := \operatorname{Int} A(0,i) \cup ok(1,i) \tag{55}$$

disjunktní oblasti. Každý bod z $\overline{G(1,3)}$ má od každé z nich vzdálenost ≤ 1.

Místo formální indukce provedeme podrobně ještě další krok konstrukce – zejména proto, aby se plně vysvětlila užitá označení: [64])

[64]) Obr. 36 ilustruje situaci po třetím kroku konstrukce. Každá z množin $A(1,i)$ se skládá ze čtverce a silněji vyznačeného kanálu, $A(2,i)$ vznikne z $A(1,i)$ přidáním kanálu vyznačeného středně silnou čarou, $A(3,i)$ vznikne z $A(2,i)$ přidáním kanálu vyznačeného slabou čarou. Rozdělíme-li velký čtverec na 4, 16, 64 shodných čtverců, má každý bod z $G(1,3)$, $G(2,3)$, $G(3,3)$ vzdálenost nejvýše 1, 1/2, 1/4 od množin $A(1,i)$, $A(2,i)$, $A(3,i)$, protože každá z těchto množin má společné body s každým z uvedených 4, 16, 64 čtverců.

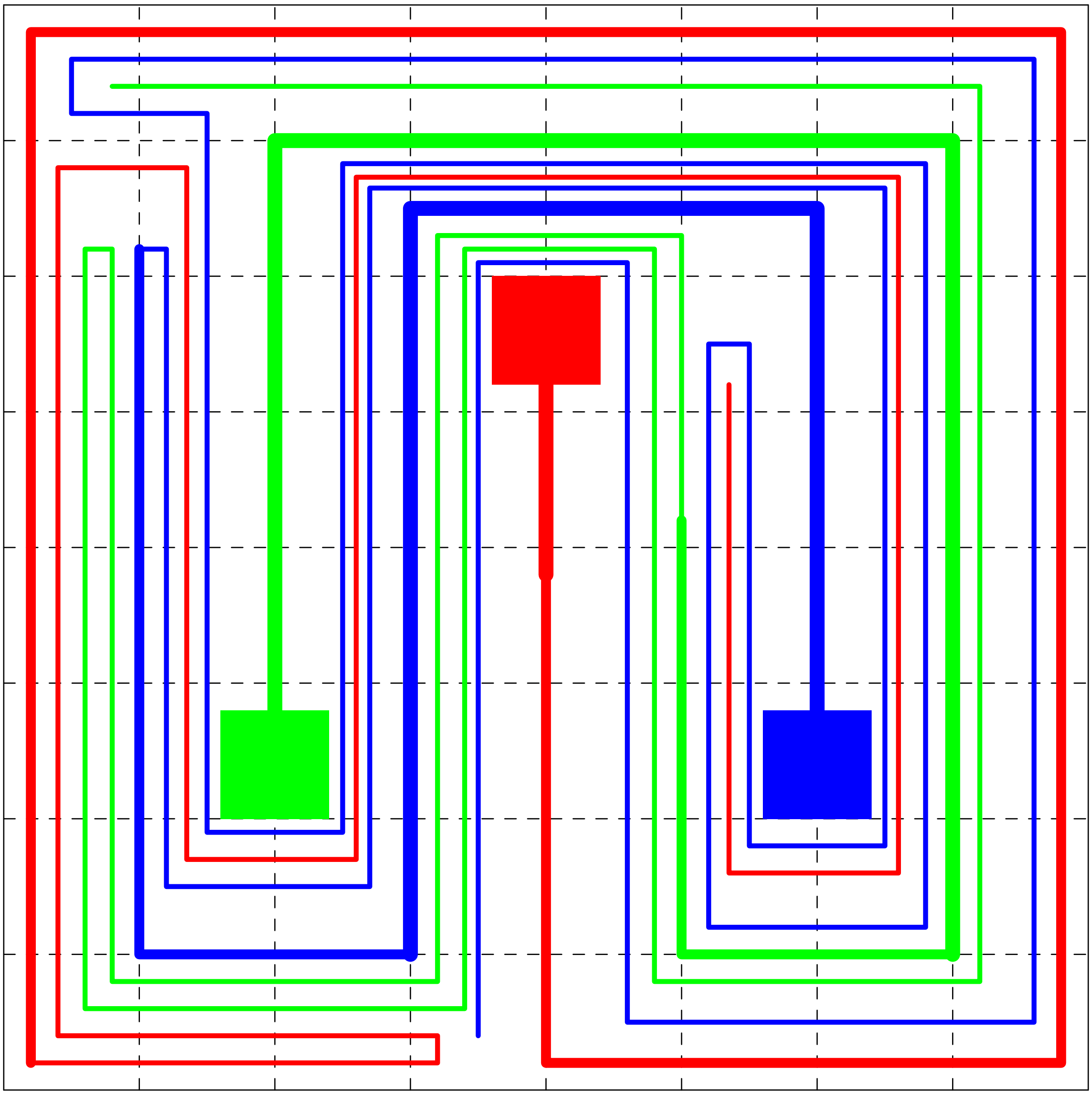
Nechť $K(2,1) \subset G(1,3)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(1,3)$ vzdálenost $\le 2^{-1}$. Nechť $L(2,1)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(1,1)$ do $G(1,3)$ a obsahující množinu $K(2,1)$; její krajní bod různý od $a(1,1)$ označme $a(2,1)$. Označme krátce $uk(2,1)$ regulární kanál $uk(L(2,1), \delta(2,1))$, kde $\delta(2,1) < \delta(1,1)$ je tak malé, že kanál je disjunktní s $A(1,2) \cup A(1,3)$. Protože průnik tohoto kanálu s $A(1,1)$ je souvislý, je podle Janiszewského věty

$$G(2,1) := G(1,3) - uk(2,1) \tag{56}$$

oblast; množina

$$A(2,1) := A(1,1) \cup uk(2,1) \tag{57}$$

kontinuum disjunktní s $A(1,2) \cup A(1,3)$.



Obr. 35. K důkazu věty 10.15

Nechť $K(2,2) \subset G(2,1)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(2,1)$ vzdálenost $\le 2^{-1}$, nechť $L(2,2)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(1,2)$ do $G(2,1)$ a obsahující množinu $K(2,2)$; její krajní bod různý od $a(1,2)$ označme $a(2,2)$. Nechť $uk(2,2)$ je regulární kanál s osou $L(1,2)$ a šířkou $2\delta(2,2) < 2\delta(1,2)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(1,3) \cup A(2,1)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(2,2) := G(2,1) - uk(2,2) \tag{58}$$

oblast; množina

$$A(2,2) := A(1,2) \cup uk(2,2) \tag{59}$$

kontinuum disjunktní s $A(1,3) \cup A(2,1)$.

Nechť $K(2,3) \subset G(2,2)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(2,2)$ vzdálenost $\leq 2^{-1}$, nechť $L(2,3)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(2,3)$ do $G(2,2)$ a obsahující $K(2,3)$; její krajní bod různý od $a(2,3)$ označme $a(3,3)$. Nechť $uk(2,3)$ je regulární kanál s osou $L(2,3)$ a šířkou $2\delta(2,3) < 2\delta(1,3)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(2,1) \cup A(2,2)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(2,3) := G(2,2) - uk(2,3) \tag{60}$$

oblast; množina

$$A(2,3) := A(1,3) \cup uk(2,3) \tag{61}$$

kontinuum disjunktní s $A(2,1) \cup A(2,2)$.

Je-li $1 \leq i \leq 3$ a označíme-li $ok(2,i)$ kanál $ok(L(2,i), \delta(2,i))$, jsou

$$\Omega(2,i) := \operatorname{Int} A(0,i) \cup ok(1,i) \cup ok(2,i) \tag{62}$$

disjunktní oblasti. Každý bod z $\overline{G(2,3)}$ má od každé z nich vzdálenost $\leq 2^{-1}$.

Postupujeme-li takto dále, dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $i = 1,2,3$ disjunktní oblasti $\Omega(n,i)$ a oblasti $G(n,i)$, pro něž platí: Posloupnosti $\{\Omega(n,i)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou (pro $i = 1,2,3$) rostoucí, posloupnost

$$G \supset G(1,1) \supset G(1,2) \supset G(1,3) \supset \ldots \supset G(n,1) \supset G(n,2) \supset G(n,3) \supset \ldots \tag{63}$$

klesající, přičemž každý bod z $\overline{G(n,3)}$ má od každé z oblastí $\Omega(n,i)$ vzdálenost $\leq 2^{-(n-1)}$. Položme

$$\Omega_i := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega(n,i) \ \text{ pro } \ i = 1,2,3 \tag{64}$$

a buď Γ průnik uzávěrů množin (63). Pak je Γ kontinuum, jehož každý bod má od každé z oblastí Ω_i vzdálenost 0, přičemž $\Gamma \cap \Omega_i = \emptyset$. Kontinuum Γ je tedy společnou hranicí všech tří oblastí Ω_i.