2. Souvislé prostory

Definice 2.1. Říkáme, že množiny $A \subset P$, $B \subset P$ jsou **oddělené**, je-li $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

Poznámka 2.1. Je-li jedna z množin A, B prázdná, jsou množiny A, B oddělené. *Každý* prostor má proto rozklad na dvě oddělené množiny; rozklady tvaru $P = P \cup \emptyset$ a $P = \emptyset \cup P$ se nazývají **triviální**.

Definice 2.2. Říkáme, že prostor P je **souvislý**, má-li *jen* triviální rozklad na dvě oddělené množiny. Říkáme, že prostor P je **nesouvislý**, není-li souvislý.

Nesouvislý je tedy takový prostor, který má aspoň jeden *netriviální* rozklad na dvě oddělené části.

Poznámka 2.2. *Je-li $P = A \cup B$, jsou množiny A, B oddělené, právě když jsou disjunktní a buď obě otevřené, nebo obě uzavřené.* [1])

Věta 2.1. *Jsou-li množiny $M \subset P$, $N \subset P$ buď obě uzavřené, nebo obě otevřené, jsou množiny $A := M - N$, $B := N - M$ oddělené.*

D ů k a z . Abychom ukázali, že $\overline{A} \cap B = \emptyset$, pišme

$$\overline{A} \cap B = \overline{M \cap (P-N)} \cap N \cap (P-M) \subset \overline{M} \cap \overline{P-N} \cap N \cap (P-M).$$

Je-li množiny M, N uzavřené, je $\overline{M} = M$ a výraz za $\subset$ je roven $M \cap \overline{P-N} \cap N \cap (P-M) = \emptyset$. Jsou-li množiny M, N otevřené, je množina $P-N$ uzavřená a výraz za $\subset$ je roven $\overline{M} \cap (P-N) \cap N \cap (P-M) = \emptyset$.

Podobně se dokáže rovnost $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

* * *

Předpokládám, že čtenář zná základní věty o souvislých prostorech (viz např. [6] nebo [7]) a uvedu proto jen některá tvrzení, která se v běžných učebnicích obvykle nevyskytují.

Věta 2.2. *Nechť C je souvislá podmnožina souvislého prostoru P. Je-li $P - C = A \cup B$, kde A, B jsou oddělené množiny, jsou množiny $A \cup C$, $B \cup C$ souvislé. Je-li C navíc uzavřená, jsou i množiny $A \cup C$, $B \cup C$ uzavřené.*

D ů k a z . Protože případ $C = \emptyset$ je triviální, předpokládejme, že $C \neq \emptyset$, a dokažme tvrzení věty např. pro množinu $A \cup C$; pro množinu $B \cup C$ je důkaz zcela analogický. Nejdříve souvislost: Nechť

$$A \cup C = D \cup E,$$

kde D, E jsou oddělené množiny. Protože C je souvislá, je obsažena buď v D, nebo v E; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $C \subset D$. Pak je $D \neq \emptyset$ a $E \subset A$, a protože množiny A, B jsou oddělené, platí totéž o množinách E, B, a tedy i o množinách E, $B \cup D$. Protože $P = A \cup B \cup C = B \cup D \cup E$, protože prostor P je souvislý a protože $B \cup D \neq \emptyset$, je $E = \emptyset$. $A \cup C$ je tedy souvislá množina.

Předpokládejme nyní navíc, že množina C je uzavřená. Potom je

$$\overline{C \cup A} = \overline{C} \cup \overline{A} = C \cup \overline{A} = (C \cup \overline{A}) \cap (A \cup B \cup C) = [(C \cup \overline{A}) \cap (C \cup A)] \cup [(C \cup \overline{A}) \cap B] = C \cup A,$$

což ukazuje, že $C \cup A$ je uzavřená množina.

Věta 2.3. *Nechť $P = M \cup N$ a nechť množiny M, N jsou buď obě uzavřené, nebo obě otevřené. Jsou-li obě množiny $M \cap N$ a $M \cup N$ souvislé, jsou souvislé i množiny M a N.*

D ů k a z . Ve větě 2.2 položme $A = M - N$, $B = N - M$ a $C = M \cap N$. Množiny A, B jsou pak podle věty 2.1 oddělené, takže množiny $A \cup C = M$, $B \cup C = N$ jsou podle věty 2.2 souvislé.

* * *

Definice 2.3. **Oblastí** prostoru P se nazývá každá jeho souvislá otevřená podmnožina.

Příklady. V $\mathbb{R}$ jsou oblastmi jen otevřené intervaly a prázdná množina. Oblastmi v $\mathbb{R}^2$ jsou např. otevřený kruh a otevřený (dvojrozměrný) interval, (otevřená) polorovina, (otevřený) pás (mezi dvěma rovnoběžkami), (otevřený) úhel, (otevřené) mezikruží, množina $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}$, atd. V $\mathbb{R}^3$ jsou oblastmi např.

[1]) Je-li $P = A \cup B$ a množiny vpravo jsou disjunktní, jsou obě otevřené (uzavřené), právě když jsou obě uzavřené (otevřené). *Prostor P je tedy nesouvislý, právě když má netriviální rozklad na dvě obojetné množiny.*

(otevřená) koule, krychle, poloprostor nebo anuloid (torus), ale např. i množina $\mathbb{R}^3 - A$, kde A je sjednocení všech přímek rovnoběžných s osou z a protínajících rovinu xy v bodech s celočíselnými souřadnicemi.

Definice 2.4. **Komponentou** prostoru P nazýváme každou maximální souvislou podmnožinu prostoru P (tj. souvislou množinu $M \subset P$, pro niž platí: Je-li $M \subset N \subset P$ a je-li N souvislá, je $N = M$).

Poznámka 2.3. Snadno nahlédneme, že platí tato tvrzení:

1. Pojem komponenty je (stejně jako pojem oblasti) topologický.

2. Dvě různé komponenty prostoru P jsou disjunktní a prostor P je sjednocením všech svých komponent.

3. Každá souvislá množina $A \subset P$ je částí některé komponenty prostoru P.

4. Komponenty prostoru P jsou vždy *uzavřené* množiny (neboť je-li M souvislá, je i $\overline{M}$ souvislá).

5. Komponenty obecně *nejsou* otevřené. (Příklad. Komponentami prostoru $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel jsou právě všechny jeho jednobodové části; žádná z nich však v něm není otevřená.)

6. Je-li G např. otevřená podmnožina prostoru $\mathbb{R}^n$, jsou všechny její komponenty také otevřené – v G, tedy i v $\mathbb{R}^n$. (Důkaz. Je-li H komponentou otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$ a je-li $x \in H$, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U(x, \varepsilon) \subset G$. Protože toto okolí je souvislé, je souvislá i množina $H \cup U(x, \varepsilon) \subset G$; protože H je maximální souvislá část množiny G, je $U(x, \varepsilon) \subset H$.)

Označení. Pro každé $x \in P$ označíme $\operatorname{komp}_x P$ komponentu prostoru P obsahující bod x.

* * *

Definice 2.5. Je-li $\varepsilon > 0$, nazýváme ε-**řetězem** v P každou konečnou posloupnost bodů $a_i \in P$, $0 \le i \le n$, $n \in \mathbb{N}$, pro niž je $\rho(a_{i-1}, a_i) < \varepsilon$ pro $i = 1, \dots, n$; je-li $p = a_0$, $a_n = q$, říkáme, že tento řetěz body p, q (v P) **spojuje**. Říkáme, že prostor P je ε-**sřetězený**, jestliže pro každé dva body $p \in P$, $q \in P$ existuje ε-**řetěz** spojující p, q v P. Prostor se nazývá **sřetězený**, je-li ε-sřetězený pro každé $\varepsilon > 0$.

Příklad 2.1. Množina všech celých čísel je ε-sřetězená pro každé $\varepsilon > 1$. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je sřetězená. Množina $\{n^2;\, n \in \mathbb{N}\}$ není ε-sřetězená pro žádné $\varepsilon > 0$.

Věta 2.4. *Souvislý prostor je sřetězený. Kompaktní sřetězený prostor je souvislý.*

D ů k a z . 1. Snadno nahlédneme, že je-li $p \in P$, $\varepsilon > 0$, je množina všech bodů $x \in P$, které lze spojit s bodem $p \in P$ nějakým ε-řetězem bodů z P, obojetná; je-li prostor P souvislý, je tedy rovna P.

2. Je-li P kompaktní a nesouvislý, je $P = A \cup B$, kde A, B jsou kompaktní neprázdné množiny. Potom však je $\varepsilon := \rho(A, B) > 0$ a prostor P zřejmě není ε-sřetězený.

Věta 2.5. *Nechť P je kompaktní prostor, nechť $A_n \subset P$ jsou ε_n-sřetězené množiny a nechť $\varepsilon_n \to 0$. Existuje-li $\operatorname{Lim} A_n$, je to souvislá množina. Obecněji: Je-li $\operatorname{Li} A_n \neq \emptyset$, je $\operatorname{Ls} A_n$ souvislá množina.*

D ů k a z . 1. Předpokládejme, že množina $A := \operatorname{Lim} A_n$ není souvislá; protože je (podle věty 1.1) kompaktní, existují neprázdné, disjunktní a kompaktní množiny M, N tak, že $A = M \cup N$. Pak je $r := \rho(M, N) > 0$ a množina $U := U(M, \frac{1}{3}r) \cup U(N, \frac{1}{3}r)$ je okolím množiny A; z věty 1.2 vyplývá, že pro skoro všechna n je $A_n \subset U$. Z podmínky $A = \operatorname{Lim} A_n$ dále plyne, že pro skoro všechna n je

$$A_n \cap U(M, \tfrac{1}{3}r) \neq \emptyset \neq A_n \cap U(N, \tfrac{1}{3}r).$$

V opačném případě by totiž existovala vybraná posloupnost $\{A_{n_k}\}$, jejíž všechny členy by byly disjunktní např. s $U(M, \frac{1}{3}r)$, a totéž by pak platilo i pro množinu $A = \operatorname{Lim} A_{n_k}$. Z toho by však plynulo, že $M = \emptyset$ – spor. Protože vzdálenost množin $U(M, \frac{1}{3}r)$, $U(N, \frac{1}{3}r)$ je $\ge \frac{1}{3}r$, musí pro skoro všechna n být i $\varepsilon_n \ge \frac{1}{3}r$, takže není splněn jeden z předpokladů věty.

2. Podle poznámky 1.11 je

$$\operatorname{Ls} A_n = \bigcup \operatorname{Lim} A_{n_k},$$

kde vpravo se sjednocuje přes všechny konvergentní posloupnosti vybrané z $\{A_n\}$. Každý sčítanec je podle toho, co jsme již dokázali, souvislý, a protože každý obsahuje neprázdnou množinu $\operatorname{Li} A_n$ (viz poznámku 1.2), je i celé sjednocení vpravo souvislé.

* * *

Definice 2.6. Říkáme, že **prostor** P **je nesouvislý mezi množinami** $A \subset P$, $B \subset P$, je-li $P = M \cup N$, kde M, N jsou oddělené množiny, přičemž $A \subset M$, $B \subset N$. V opačném případě říkáme, že

prostor P **je souvislý mezi** A, B. Říkáme, že množina $D \subset P$ **roztíná** P **mezi množinami** A, B, je-li podprostor $P - D$ nesouvislý mezi A, B. Říkáme, že $D \subset P$ **roztíná** P, existují-li neprázdné množiny $A \subset P$, $B \subset P$ tak, že prostor P je mezi množinami A, B souvislý a jeho podprostor $P - D$ nesouvislý.

Příklad 2.2. Souvislý prostor P je souvislý mezi kterýmikoli svými body p, q. Jednotková kružnice D roztíná rovinu $\mathbb{R}^2$, protože ji roztíná např. mezi počátkem p a kterýmkoli bodem q, pro nějž je $\rho(p, q) > 1$. Podprostor $\mathbb{R}^2 - D$ je mezi takovými dvěma body nesouvislý.

Věta 2.6. *Roztíná-li $D \subset P$ prostor P mezi množinami A, B, existuje uzavřená množina $D^* \subset D$, která též roztíná P mezi A, B.*

D ů k a z . Je

$$P - D = M \cup N\,, \text{ kde } \overline{M} \cap N = \emptyset = M \cap \overline{N}\,,\ A \subset M\,,\ B \subset N\,.$$

Položíme-li

$$M^* = \{x \in P;\, \rho(x, M) < \rho(x, N)\}\,,\quad N^* = \{x \in P;\, \rho(x, M) > \rho(x, N)\}\,,\quad D^* = P - (M^* \cup N^*)\,,$$

je $M^* \supset M$, $N^* \supset N$ a množiny M^*, N^* jsou disjunktní a otevřené [2]), takže množina $D^* \subset D$ je uzavřená.

Poznámka 2.4. *Roztíná-li uzavřená množina D prostor P a je-li množina Q hustá v P, existují body $p \in Q$, $q \in Q$ tak, že D roztíná P mezi p a q.*

D ů k a z . Podle předpokladu existují neprázdné množiny A, B, mezi nimiž je podprostor $P - D$ nesouvislý, takže $P - D = M \cup N$, kde $\overline{M} \cap N = M \cap \overline{N} = \emptyset$, $A \subset M$, $B \subset N$. Množiny M, N jsou neprázdné a otevřené; protože množina Q je hustá v P, existují body $p \in Q \cap M$, $q \in Q \cap N$, a D zřejmě roztíná P mezi p, q.

* * *

Věta 2.7. *Nechť P je souvislý prostor se spočetnou bází a nechť $a \in P$, $b \in P$. Nechť $\mathfrak{S}$ je disjunktní systém souvislých uzavřených podmnožin prostoru P, z nichž každá roztíná P mezi body a, b. Je-li $C \in \mathfrak{S}$, buď*

$$P - C = M(C) \cup N(C)\,, \tag{1}$$

kde množiny $M(C)$ a $N(C)$ jsou oddělené, $a \in M(C)$, $b \in N(C)$. [3]) *Položíme-li pak $A(C) := C \cup M(C)$, platí tato tvrzení:*

I. *Je-li $C \in \mathfrak{S}$, $D \in \mathfrak{S}$, $C \neq D$, je $M(C) \neq M(D)$ a buď $A(C) \subset M(D) \subset \operatorname{Int} A(D)$, nebo $A(D) \subset M(C) \subset \operatorname{Int} A(C)$.*

II. *Množinám $C \in \mathfrak{S}$ lze přiřadit indexy ležícími v intervalu $(0, 1)$ tak, aby pro každou dvojici x, y užitých indexů platila implikace*

$$x < y \;\Rightarrow\; A(C_x) \subset M(C_y) \subset \operatorname{Int} A(C_y) \subset A(C_y)\,. \tag{2}$$

Píšeme-li pak krátce $A_x = A(C_x)$, $M_x = M(C_x)$, $N_x = N(C_x)$, platí pro téměř všechny indexy y tyto identity:

$$\operatorname{Int} A_y = \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x = \bigcup_{x<y} A_x = M_y\,, \tag{3}$$

$$A_y = \overline{\bigcup_{x<y} A_x} = \overline{M_y} = \overline{\operatorname{Int} A_y}\,, \tag{4}$$

$$A_y = \bigcap_{z>y} \operatorname{Int} A_z = \bigcap_{z>y} A_z\,. \tag{5}$$

III. *Pro téměř všechna $C \in \mathfrak{S}$ platí:*

---

[2]) Otevřenost plyne ze spojitosti funkcí $\rho(x, M)$ a $\rho(x, N)$.

[3]) Takových rozkladů množiny $P - C$ na dvě oddělené množiny může být více; vybereme libovolně, ale pevně jednu dvojici. Vzhledem k tomu, že množina C je uzavřená, jsou množiny $M(C), N(C)$ otevřené (v otevřené množině $P - C$, tedy i v P).

a) $\operatorname{Int} A(C) = M(C)$, $H(A(C)) = C$;
b) $C = H(M(C)) = H(N(C))$;
c) *existuje rostoucí posloupnost množin $D_n \in \mathfrak{S}$ a klesající posloupnost množin $E_n \in \mathfrak{S}$ tak, že*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} M(D_n) \cap N(E_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(D_n) \cap \overline{P - A(E_n)}; \tag{6}$$

d) *množiny $M(C)$ a $N(C)$ jsou souvislé.*

D ů k a z . I. Je-li $C \in \mathfrak{S}$, $D \in \mathfrak{S}$, $C \neq D$, je buď $D \subset M(C)$, nebo $D \subset N(C)$, neboť D je souvislá podmnožina sjednocení $M(C) \cup N(C)$ oddělených množin $M(C)$, $N(C)$. Ukažme nejdříve, že

$$D \subset M(C) \Rightarrow A(D) \subset M(C). \tag{7}$$

Z inkluze $D \subset M(C)$ a z rovností

$$P = C \cup M(C) \cup N(C) = D \cup M(D) \cup N(D) \tag{8}$$

plyne, že

$$P = (C \cup M(C) \cup M(D)) \cup (N(C) \cap N(D)). \tag{9}$$

Protože $C \subset P - D = M(D) \cup N(D)$, je buď $C \subset M(D)$, nebo $C \subset N(D)$; kdyby však bylo $C \subset M(D)$, bylo by $P = (M(C) \cup M(D)) \cup (N(C) \cap N(D))$, což není možné, protože prostor P je souvislý a množiny $M(C) \cup M(D)$, $N(C) \cap N(D)$ jsou neprázdné a oddělené.

Je tedy $C \subset N(D)$; z této inkluze, z premisy implikace (7) a z identit (8) plyne, že

$$P = C \cup D \cup M(C) \cup N(D) \cup (M(D) \cap N(C)) = (M(C) \cup N(D)) \cup (M(D) \cap N(C)), \tag{10}$$

kde množiny $M(C) \cup N(D)$, $M(D) \cap N(C)$ jsou oddělené, přičemž $a \in M(C) \cup N(D)$, takže tato množina není prázdná. Ze souvislosti prostoru P plyne, že $M(D) \cap N(C) = \emptyset$, tedy $M(D) \subset P - N(C) = M(C) \cup C$; protože $C \subset N(D) \Rightarrow C \cap M(D) = \emptyset$, je dokonce $M(D) \subset M(C)$. Protože $D \subset M(C)$, je $A(D) = D \cup M(D) \subset M(C)$, což je závěr implikace (7).

Protože množina $M(C) \subset A(C)$ je otevřená, je částí $\operatorname{Int} A(C)$; dokázali jsme tedy implikaci

$$D \subset M(C) \Rightarrow A(D) \subset M(C) \subset \operatorname{Int} A(C). \tag{11$'$}$$

Podobně se dokáže implikace

$$C \subset M(D) \Rightarrow A(C) \subset M(D) \subset \operatorname{Int} A(D). \tag{11$''$}$$

Protože premisa jedné z těchto implikací platí, platí i příslušný závěr. Rovnost $M(C) = M(D)$ by spolu s $(11')$ vedla k inkluzi $A(D) \subset M(D)$, spolu s $(11'')$ k inkluzi $A(C) \subset M(C)$, tedy v obou případech ke sporu. Tím je část I věty 2.7 dokázána.

II. Zvolme pevně nějakou spočetnou bázi $\mathfrak{B}$ prostoru P a sestavme její prvky do posloupnosti $\{U_n\}$ tak, aby pro každé $U \in \mathfrak{B}$ bylo $U = U_n$ pro nekonečně mnoho indexů n. Pro každou množinu $C \in \mathfrak{S}$ tvoří pak indexy n, pro něž je $U_n \subset M(C)$, jistou rostoucí posloupnost $\{n_k\}$; číslo

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k}} \tag{12}$$

lze napsat i jako dyadický zlomek tvaru $0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, kde α_n je rovno 1, nebo 0 podle toho, zdali je $U_n \subset M(C)$, nebo ne. Protože pro žádné $C \in \mathfrak{S}$ není ani $M(C) = \emptyset$, ani $M(C) = P$, existuje $U' \in \mathfrak{B}$ tak, že $U' \subset M(C)$, a $U'' \in \mathfrak{B}$ tak, že $U'' \not\subset M(C)$; z toho plyne, že v dyadickém zlomku je nekonečně mnoho cifer rovných 1 a nekonečně mnoho cifer rovných 0. Je tedy $x \in (0,1)$ a cifry zlomku $0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ jsou jeho hodnotou x určeny jednoznačně. Dále je patrné, že posloupnosti $\{n_k\}$, $\{n'_k\}$ odpovídající dvěma různým množinám $C \in \mathfrak{S}$, $D \in \mathfrak{S}$ jsou různé, protože $C \neq D \Rightarrow M(C) \neq M(D)$ a

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n_k} = M(C) \neq M(D) = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n'_k};$$

v důsledku toho je číslo (12) různé od čísla

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n'_k}}\,. \tag{12'}$$

Je-li $C \in \mathfrak{S}$, je-li $M(C) = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n_k}$ a platí-li (12), budeme množinu C značit C_x; označení je korektní, protože podle toho, co jsme řekli, index x za uvedených podmínek množinu C jednoznačně identifikuje. Položme ještě $M_x = M(C_x)$, $A_x = A(C_x)$ a $N_x = N(C_x)$.

Jsou-li x, y dva různé indexy, je podle části I buď $A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y$, nebo $A_y \subset M_x \subset \operatorname{Int} A_x$. Z inkluze $A_x \subset M_y$ plyne, že $M_x \subset M_y \neq M_x$. Každé U_n obsažené v M_x je obsaženo i v M_y, posloupnost $\{n_k\}$ příslušná k C_x je vybrána z posloupnosti $\{n'_k\}$ příslušné k C_y; protože M_x je pravou částí množiny M_y, existuje $U_n \subset M_y$ tak, že $U_n \not\subset M_x$, a takový index n je roven nekonečně mnoha indexům n'_k, ale není roven žádnému z indexů n_k. Z toho zřejmě plyne, že $x < y$. Z inkluzí $A_y \subset M_x \subset \operatorname{Int} A_x$ by se obdobně odvodila nerovnost $y < x$.

Je-li tedy $x < y$, je $A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y$; protože inkluze $\operatorname{Int} A_y \subset A_y$ je zřejmá, je tím implikace (2) dokázána.

Užívejme zavedená označení a mějme na paměti, že množiny M_x, N_x jsou disjunktní a otevřené, zatímco množiny A_x jsou uzavřené. Protože

$$\begin{aligned} x < y \;&\Rightarrow\; \operatorname{Int} A_x \subset A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y \subset A_y\,, \\ y < z \;&\Rightarrow\; \operatorname{Int} A_y \subset A_y \subset M_z \subset \operatorname{Int} A_z \subset A_z\,, \end{aligned} \tag{13}$$

je též

$$\bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x \subset \bigcup_{x<y} A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y \subset A_y\,, \tag{14}$$

$$\operatorname{Int} A_y \subset A_y \subset \bigcap_{z>y} M_z \subset \bigcap_{z>y} \operatorname{Int} A_z \subset \bigcap_{z>y} A_z\,. \tag{15}$$

Je-li $\operatorname{Int} A_y - \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x \neq \emptyset$, zvolme v této množině bod w a pak najděme číslo $n(y) \in \mathbb{N}$ tak, že $w \in U_{n(y)} \subset \operatorname{Int} A_y$; protože $x < y \Rightarrow w \notin \operatorname{Int} A_x$, platí implikace $x < y \Rightarrow U_{n(y)} \not\subset \operatorname{Int} A_x$.

Ukažme, že přiřazení čísla $n(y)$ indexu y je prosté. Je-li $n(y')$ číslo přiřazené popsaným způsobem indexu $y' \neq y$, pro který je $\operatorname{Int} A_{y'} - \bigcup_{x<y'} \operatorname{Int} A_x \neq \emptyset$, je buď $y' > y$, nebo $y' < y$. V prvním případě je $U_{n(y)} \subset \operatorname{Int} A_y$, zatímco $U_{n(y')} \not\subset \operatorname{Int} A_y$, ve druhém případě je $U_{n(y')} \subset \operatorname{Int} A_{y'}$, zatímco $U_{n(y)} \not\subset \operatorname{Int} A_{y'}$; v obou případech je proto $U_{n(y)} \neq U_{n(y')}$, tedy i $n(y) \neq n(y')$.

Získali jsme tedy prosté zobrazení indexů y, pro něž *neplatí* rovnost

$$\operatorname{Int} A_y = \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x\,, \tag{16}$$

do množiny $\mathbb{N}$; takových indexů je tedy jen spočetně mnoho. Jinými slovy: Rovnost (16) platí pro téměř každý index y. Vzhledem k inkluzím (14) je zřejmé, že z ní plynou rovnosti

$$\operatorname{Int} A_y = M_y = \bigcup_{x<y} A_x\,; \tag{16'}$$

tím je dokázáno (3).

Podle (14) je $\bigcup_{x<y} A_x \subset A_y$; protože A_y je uzavřená množina, je dokonce $\overline{\bigcup_{x<y} A_x} \subset A_y$. Neplatí-li tedy (pro některé y) rovnost

$$\overline{\bigcup_{x<y} A_x} = A_y\,, \tag{17}$$

existuje $n(y) \in \mathbb{N}$ tak, že

$$U_{n(y)} \cap A_y \neq \emptyset = U_{n(y)} \cap \overline{\bigcup_{x<y} A_x}\,;$$

tím spíše pak je $U_{n(y)} \cap A_x = \emptyset$ pro všechna $x < y$.

Podobně jako nahoře dokážeme, že přiřazení čísel $n(y)$ indexům y, pro něž neplatí (17), je prosté: Je-li $y' \neq y$ index, pro který neplatí rovnost analogická (17), je buď $y' > y$, načež $U_{n(y')} \cap A_y = \emptyset \neq U_{n(y)} \cap A_y$, nebo je $y' < y$, načež $U_{n(y)} \cap A_{y'} = \emptyset \neq U_{n(y')} \cap A_{y'}$. Ze stejných důvodů jako nahoře z toho plyne, že rovnost (17) platí pro téměř všechny indexy y.

Protože podle (14) a (17) je

$$\overline{\bigcup_{x<y} A_x} \subset \overline{M_y} \subset \overline{\operatorname{Int} A_y} = A_y = \overline{\bigcup_{x<y} A_x},$$

platí (4) také pro téměř každý index y.

Předpokládejme nyní, že pro některý index y *neplatí* rovnost

$$A_y = \bigcap_{z>y} A_z; \tag{18}$$

protože výraz vlevo je podle (15) obsažen v průniku vpravo, znamená to, že existuje bod w tohoto průniku, který neleží v A_y. Protože A_y je uzavřená množina, existuje $n(y) \in \mathbb{N}$ tak, že $U_{n(y)}$ je disjunktní s A_y; toto $U_{n(y)}$ však protíná každou z množin A_z, kde $z > y$.

Přiřazení čísel $n(y)$ indexům y, pro něž neplatí (18), je opět prosté: Je-li $y' \neq y$ index, pro nějž neplatí rovnost analogická (18), je buď $y' > y$, načež $U_{n(y)} \cap A_{y'} \neq \emptyset = U_{n(y')} \cap A_{y'}$, nebo je $y' < y$, načež $U_{n(y)} \cap A_y = \emptyset \neq U_{n(y')} \cap A_y$.

Podobně jako nahoře z toho plyne, že rovnost (18) platí pro téměř všechny indexy y. Z (15) a (18) je ihned patrné, že i (5) platí pro téměř každý index y. Tím je dokončen důkaz části II věty 2.7.

III a). Podle (3) je $\operatorname{Int} A(C) = M(C)$ pro téměř všechna $C \in \mathfrak{S}$; v důsledku toho platí totéž o rovnostech $H(A(C)) = A(C) - \operatorname{Int} A(C) = (C \cup M(C)) - M(C) = C$.

III b). Podle (4) je $\overline{M(C)} = A(C)$ pro téměř každé $C \in \mathfrak{S}$; z toho plyne, že $H(M(C)) = \overline{M(C)} - M(C) = A(C) - M(C) = C$. Protože každá množina má touž hranici jako její doplněk a protože $N(C) = P - A(C)$, je i $H(N(C)) = C$ pro téměř každé C.

III c). Podle (3) – (5) je nejen

$$C_y = H(A_y) = A_y - \operatorname{Int} A_y = \bigcap_{z>y} M_z - \bigcup_{x<y} A_x = \bigcap_{z>y} M_z - \bigcup_{x<y} (P - N_x) = \bigcap_{z>y} M_z \cap \bigcap_{x<y} N_x \tag{19}$$

pro téměř každý index y, ale také

$$C_y = \bigcap_{z>y} A_z - \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x = \bigcap_{z>y} A_z - \bigcup_{x<y} (P - \overline{P - A_x}\,) = \bigcap_{z>y} A_z \cap \bigcap_{x<y} \overline{P - A_x}\,. \tag{20}$$

V množině Y všech indexů tvoří indexy y, k nimž neexistuje rostoucí posloupnost indexů x_n tak, že $x_n \to y$, spočetnou množinu, protože 1) ke každému takovému y existuje interval (a, y) disjunktní s Y, 2) intervaly přiřazené různým indexům jsou disjunktní a 3) každý systém disjunktních jednorozměrných intervalů je spočetný. Zcela analogicky se zjistí, že indexy y, k nimž neexistuje klesající posloupnost indexů z_n tak, že $z_n \to y$, tvoří jen spočetnou množinu.

Pro téměř každý index y existuje tedy rostoucí posloupnost indexů x_n tak, že $x_n \to y$, a klesající posloupnost indexů z_n tak, že $z_n \to y$. Vzhledem k (13) jsou pak obě posloupnosti $\{M_{z_n}\}$, $\{N_{x_n}\}$ klesající, takže

$$\bigcap_{z>y} M_z = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{z_n}\,, \quad \bigcap_{x<y} N_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} N_{x_n}\,; \tag{21}$$

z toho a ze (17) a (18) plyne, že

$$C_y = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{z_n} \cap N_{x_n} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{z_n} \cap \overline{P - A_{x_n}}\,. \tag{22}$$

Položíme-li tedy

$$D_n := C_{z_n}\,,\ E_n := C_{x_n}\,, \tag{23}$$

dostaneme tvrzení III c).

Abychom dokázali tvrzení III d), zvolme index y tak, aby platila tvrzení III a) – c), a dokažme např. souvislost množiny M_y; souvislost množiny N_y se dokáže zcela analogicky.[4])

Předpokládejme, že $M_y = M' \cup M''$, kde M', M'' jsou oddělené množiny, a nechť např. $a \in M'$. Pak jsou oddělené i množiny $M' \cup N_y, M''$, takže sjednocení $M' \cup N_y \cup C_y$ je podle věty 2.2 souvislé; podobně je i $M'' \cup N_y \cup C_y$ souvislá množina. Protože $a \cup b \subset M' \cup N_y \cup C_y$ a protože každá z množin E_n roztíná P mezi a a b, je $E_n \cap (M' \cup N_y \cup C_y) \neq \emptyset$. Protože $E_n = C_{x_n}$, kde $x_n < y$, je $E_n \subset M_y$, takže $E_n \cap (C_y \cup N_y) = \emptyset$; v důsledku toho je $E_n \cap M' \neq \emptyset$. Protože množina $E_n \subset M_y = M' \cup M''$ je souvislá, protože množiny M', M'' jsou oddělené a protože $E_n \cap M' \neq \emptyset$, je $E_n \subset M'$, tedy $E_n \cap M'' = \emptyset$. Protože $P - C_y = M'' \cup (M' \cup N_y)$, kde množiny vpravo jsou oddělené, je množina $M'' \cup C_y$ souvislá; protože je disjunktní s E_n (a tedy obsažená ve sjednocení oddělených množin $M(E_n), N(E_n)$) a protože podle (22) je $C_y \subset N(E_n)$, je $M'' \cup C_y \subset N(E_n)$, a tím spíše je $M'' \subset N(E_n)$. Protože $z_n > y$, je $M'' \subset M_y \subset A_y \subset M(D_n)$ (pro každé n), takže $M'' \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M(D_n) \cap N(E_n) = C_y$ (podle (6)). Protože $C_y \cap M'' = \emptyset$, je $M'' = \emptyset$; tím je souvislost množiny M_y dokázána.

Spolu s tím je dokázána i celá věta 2.7.

Věta 2.8. *Nechť $\mathfrak{S}$ je disjunktní systém souvislých uzavřených podmnožin souvislého separabilního prostoru P. Pak pro téměř každou z množin $C \in \mathfrak{S}$ je množina $P - C$ sjednocením dvou disjunktních oblastí M, N, jejichž společnou hranicí je C.*

D ů k a z . Nechť množina všech členů posloupnosti $\{p_n\}$ je hustá v P. Pro každé $C \in \mathfrak{S}$ je $P - C = M \cup N$, kde M, N jsou neprázdné otevřené disjunktní množiny; existují tedy indexy i, j tak, že $p_i \in M$, $p_j \in N$; C pak roztíná P mezi body p_i, p_j. Pro každou dvojici indexů i, j nechť $\mathfrak{S}_{i,j}$ znamená systém všech množin $C \in \mathfrak{S}$, které roztínají P mezi body p_i, p_j; systém $\mathfrak{S}$ je pak zřejmě sjednocení všech systémů $\mathfrak{S}_{i,j}$.

Podle částí III d) a III b) věty 2.7 má téměř každá z množin $C \in \mathfrak{S}_{i,j}$ obě vlastnosti uvedené v tvrzení věty; protože podsystémů $\mathfrak{S}_{i,j}$ je jen spočetně mnoho, mají uvedené dvě vlastnosti téměř všechny množiny $C \in \mathfrak{S}$.

Označení. Je-li P separabilní souvislý prostor a je-li $a \in P$, $b \in P$, označíme $S(a, b)$ **množinu všech bodů $x \in P$, které roztínají P mezi a, b.**[5]) $\square$

Zřejmým důsledkem vět 2.7 a 2.8 je toto tvrzení:

Věta 2.9. *Nechť a, b jsou dva různé body separabilního souvislého prostoru P; pak platí tato dvě tvrzení:*

1. *Bodům $p \in S(a, b)$ lze přiřadit indexy z $(0, 1)$ tak, že pro každé tři indexy $x < y < z$ roztíná bod p_y prostor P mezi body p_x a p_z.*

2. *Definujeme-li S_1 jako množinu všech bodů $p \in P$, které neroztínají P, a S_2 jako množinu všech bodů $p \in P$, pro něž je $P - p$ sjednocením dvou disjunktních oblastí $M(p), N(p)$, jejichž společnou hranicí je p, je $P - (S_1 \cup S_2)$ spočetná množina.*

Věta 2.10. (Lennes.) *Je-li P souvislý separabilní prostor a platí-li pro dva body $a \neq b$ z P rovnost*

$$P = S(a, b) \cup a \cup b, \tag{24}$$

existuje prosté spojité zobrazení f prostoru P na interval $\langle 0, 1\rangle$.

D ů k a z . Přiřaďme každému bodu $p \in S(a, b)$ index podle části II věty 2.7, označme α, β infimum a supremum množiny všech těchto indexů a užívejme tamější označení.

Dokažme (sporem), že žádný index x není roven ani α, ani β: Předpokládejme, že $x = \alpha$; pak je

$$M(p_\alpha) \cup p_\alpha = A(p_\alpha) \subset M(p_y) \ \text{ pro všechna } \ y \neq \alpha,$$

[4]) V původním rozkladu $P - C = M \cup N$ není žádný podstatný rozdíl mezi množinami vpravo.

[5]) Množiny $S(a, b)$, $S(a, b) \cup a \cup b$ jsou zřejmě invariantní vůči homeomorfním zobrazením.

tj. pro všechna $p_y \in S(a,b) - p_\alpha$. Protože pro žádný index y není $p_y \notin M(p_y)$, plyne z toho, že pro žádný index y není $p_y \in M(p_\alpha)$, tj. že $M(p_\alpha) \cap S(a,b) = \emptyset$. Podle (24) je tedy množina $M(p_\alpha)$ částí dvoubodové množiny $\{a,b\}$, což není možné, protože je neprázdná a otevřená (a prostor P je souvislý).

Podobně se dokáže, že žádný index x není roven β.

Definujeme-li funkci $g : P \to \langle \alpha, \beta \rangle$ podmínkami

$$g(a) := \alpha\,,\ g(p_x) := x \ \text{ pro každý index } \ x\,,\ g(b) := \beta\,,$$

je zřejmé, že funkce g je prostá. K tomu, abychom dokázali, že je spojitá, stačí ukázat, že vzory intervalů $\langle \alpha, \gamma)$ a $(\gamma, \beta\rangle$ jsou pro každé $\gamma \in (\alpha, \beta)$ množiny otevřené v P. To však plyne z identit

$$g_{-1}(\langle \alpha, \gamma)) = M(p_\gamma)\,,\ g_{-1}((\gamma, \beta\rangle) = P - A(p_\gamma) = N(p_\gamma)\,.$$

Protože zobrazení g je spojité a protože prostor P je souvislý, je $g(P)$ souvislá část intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ obsahující body α, β, takže $g(P) = \langle \alpha, \beta \rangle$. Složíme-li zobrazení g s funkcí $h(x) := (x-\alpha)/(\beta-\alpha)$, získáme prosté spojité zobrazení $f := h \circ g$ prostoru P na interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Definice 2.7. Obloukem nazveme každou množinu homeomorfní s intervalem $\langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka 2.5. Jsou-li f, g dvě homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na týž oblouk L, je $g_{-1} \circ f$ homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na sebe, tedy spojitá ryze monotónní funkce. Z toho je patrné, že $\{f(0), f(1)\} = \{g(0), g(1)\}$; obraz množiny $\{0, 1\}$ krajních bodů intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nezávisí tedy na volbě homeomorfního zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ na L. Je proto korektní tato definice:

Definice 2.8 a označení. Krajními body oblouku L nazveme body $f(0), f(1)$, kde f je (jakékoli) homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na L. Oblouk s krajními body a, b budeme značit ab. [6])

Věta 2.11. *K tomu, aby kompaktní a souvislý prostor P byl obloukem ab, je nutné a stačí, aby platila rovnost*

$$P = S(a,b) \cup a \cup b\,. \tag{25}$$

[7])

D ů k a z . Je-li $P = \langle a, b \rangle$, rovnost (25) zřejmě platí; protože množina vpravo je invariantem homeomorfních zobrazení, platí rovnost i pro každý oblouk ab. Obrácené tvrzení plyne ihned z věty 2.10 a z toho, že spojité prosté zobrazení kompaktního prostoru je homeomorfní. $\square$

Následující příklad ukazuje, že *ve větě* 2.11 *nelze vynechat předpoklad kompaktnosti.*

Příklad 2.3. Nechť P je graf funkce $\sin(1/x)$, $0 < x \leq 1$, k němuž je přidán bod $a = (0,0)$. Množina P je pak souvislá, ale není obloukem, a klademe-li $b = (1, \sin 1)$, je $P = S(a,b) \cup a \cup b$.

Tento příklad zároveň ukazuje, že zobrazení f ve větě 2.10 *nemusí* být homeomorfní.

---

[6]) Toto označení oblouk samozřejmě neidentifikuje; je jen zkratkou slovního spojení „oblouk s krajními body a, b“. Jistě je patrné, že oblouky i jeho krajní body jsou invarianty homeomorfních zobrazení. V literatuře se „krajní body“ nazývají spíše „koncovými body“ (end-points); tato terminologie se nám nehodí, protože u intervalu a tzv. orientovaného oblouku potřebujeme mluvit o jeho *počátečním* a *koncovém* bodě (což ovšem nejsou topologické pojmy).

[7]) Oblouky jsou tedy mezi souvislými kompaktními prostory P charakterizovány tím, že v nich existují takové dva body a, b, že každý jiný bod z P roztíná P mezi nimi.