4. Kontinua

Definice 4.1. Kompaktní souvislá množina (prostor) se nazývá **kontinuum**; **vlastní kontinuum** obsahuje aspoň dva různé body, prázdná množina a jednobodové množiny jsou tzv. **nevlastní kontinuua**. **Semikontinuum** je množina M, v níž pro každé dva body existuje kontinuum $M_1 \subset M$, které je obsahuje.

Definice 4.2. Pro každý bod $x \in P$ (kde P je libovolný metrický prostor) se sjednocení všech kontinuí $K \subset P$ obsahujících bod x nazývá **konstituanta** bodu x v P a značí se $\operatorname{konst}_x P$.

Poznámka 4.1. Pojem kontinua je nejen invariantem homeomorfních, ale dokonce spojitých zobrazení. Vlastní kontinuum K má vždy mohutnost kontinua, protože pro každé dva různé body a, b z K a pro každé $\delta \in (0, \rho(a,b))$ je $H(U(a,\delta) \cap K \neq \emptyset$ – jinak by totiž kontinuum K mělo rozklad $K = (U(a,\delta) \cap K) \cup (K - U(a,\delta))$ na dvě neprázdné oddělené množiny.

I pojem konstituanty je topologický; konstituanty jsou typickým příkladem semikontinuí.

Poznámka 4.2. Nechť prostor P je kompaktní a nechť $A_n \subset P$ jsou ε_n-sřetězené množiny (speciálně: kontinua), přičemž $\varepsilon_n \to 0$. Existuje-li pak $\operatorname{Lim} A_n$, je to kontinuum. Podobně: Je-li $\operatorname{Li} A_n \neq \emptyset$, je $\operatorname{Ls} A_n$ kontinuum. Má-li nekonečně mnoho množin A_n průměr $\geq r > 0$, je $\operatorname{diam} \operatorname{Ls} A_n \geq r$, takže $\operatorname{Ls} A_n$ je vlastní kontinuum. (Srov. s větou 2.5 a s poznámkou 1.10.)

Speciálně tedy platí tvrzení: *Průnik nerostoucí posloupnosti kontinuí je kontinuum.*

Věta 4.1. (Janiszewski.) *Je-li P vlastní kontinuum a je-li $a \in G \subset P$, kde $G \neq P$ je otevřená množina, existuje kontinuum K s těmito vlastnostmi:*

1. $a \in K \subset \overline{G}$;
2. $K \cap H(G) \neq \emptyset$.

Uvedené vlastnosti má přitom kterákoli z množin

$$\overline{\operatorname{konst}_a G}\,, \quad \overline{\operatorname{komp}_a G}\,, \quad \operatorname{komp}_a \overline{G}\,, \quad \operatorname{konst}_a \overline{G}\,. \tag{1}$$

Důsledek 1. *Každý bod p vlastního kontinua P je obsažen v libovolně malých vlastních kontinuích $K \subset P$.*

Důsledek 2. *Jsou-li K a P kontinua, $K \subsetneq P$, existuje kontinuum K_1 tak, že $K \subsetneq K_1 \subsetneq P$.*

D ů k a z . 1. Dokážeme nejdříve toto tvrzení: *Je-li M otevřená množina a je-li $a \in M \subset \overline{M} \subset G$, existuje kontinuum K tak, že $a \in K \subset \overline{M}$ a $K \cap H(M) \neq \emptyset$.*

Zvolme k tomu účelu bod $b \in P - \overline{M}$. Z věty 2.4 plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $(1/n)$-řetěz

$$a = a_0^n\,,\ a_1^n\,,\ \ldots\,,\ a_{s_n}^n = b \tag{2}$$

spojující body a, b v P; pro každé n existuje pak (právě jeden) index i_n tak, že $0 \leq i \leq i_n \Rightarrow a_i^n \in M$ a že $a_{i_n+1}^n \in P - M$. Množina

$$K_n = \{a_0^n\,, a_1^n\,, \ldots\,, a_{i_n}^n\} \subset M \tag{3}$$

obsahuje bod a a splňuje podmínku $\rho(K_n, P - M) < 1/n$; protože $a \in \operatorname{Li} K_n \neq \emptyset$, je $K := \operatorname{Ls} K_n$ (podle věty 2.5) kontinuum, které má zřejmě všechny žádané vlastnosti.

2. Označíme-li $M_n = P - \overline{U(P - G, 1/n)}$, je $a \in M_n \subset \overline{M_n} \subset G$ pro skoro všechna n, a podle toho, co jsme již dokázali, existují kontinua $K_n \subset \overline{M_n}$ tak, že $a \in K_n \cap H(M_n) \neq \emptyset$. Protože $K_n \subset \operatorname{konst}_a G$, je

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n} \subset \overline{\operatorname{konst}_a G}\,; \tag{4}$$

protože je $\rho(K_n, P - G) \leq 1/n$ pro každé n, protíná množina vlevo množinu $H(G)$; tím spíše to platí pro množinu vpravo.

3. První z množin (1) má tedy žádané vlastnosti; ze zřejmých inkluzí

$$\operatorname{konst}_a G \subset \operatorname{komp}_a G \subset \overline{\operatorname{komp}_a G} \subset \operatorname{komp}_a \overline{G}\,, \quad \overline{\operatorname{konst}_a G} \subset \operatorname{konst}_a \overline{G} \tag{5}$$

plyne, že žádané podmínky splňují i ostatní množiny z (1).

Důsledek 1 platí, protože pro každé $\varepsilon > 0$ je např. $\overline{\mathrm{konst}_p\, U(p, \frac{1}{2}\varepsilon)}$ kontinuum o průměru $\leq \varepsilon$.

Důsledek 2 je zřejmý, je-li $K = \emptyset$. Je-li $K \neq \emptyset$, zvolme pevně body $p \in K$, $q \in P - K$. Z normality prostoru P plyne existence otevřené množiny $G \supset K$ tak, že $q \notin \overline{G}$. Množina

$$K_1 := \mathrm{komp}_p\, \overline{G} \tag{6}$$

je kontinuum obsahující K, které podle hlavní části věty 4.1 protíná $H(G)$, což je množina disjunktní s K. Je tedy $K_1 \neq K$. Protože $q \notin \overline{G}$, je $K_1 \neq P$.

Věta 4.2. (Sierpiński.) *Žádné kontinuum nelze rozložit na spočetně mnoho disjunktních uzavřených množin, z nichž aspoň dvě jsou neprázdné.*

Důsledek. *Je-li kompaktní prostor P disjunktním sjednocením spočetně mnoha neprázdných kontinuí P_n, je každé P_n komponentou prostoru P.*

D ů k a z . 1. Kdyby pro nějaké přirozené číslo $q > 1$ byla souvislá množina P sjednocením disjunktních uzavřených množin $A_1, \dots, A_q$, kde např. $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$, byl by $P = A_1 \cup (A_2 \cup \dots A_q)$ rozklad množiny P na neprázdné oddělené množiny – spor. Zbývá proto ukázat, že rozklad uvedený v hlavní části věty neexistuje ani v případě, že množin A_n je nekonečně mnoho.

2. Předpokládejme naopak, že pro nějaké kontinuum P existují disjunktní uzavřené množiny $A_n \subset P$, z nichž aspoň dvě jsou neprázdné, tak, že

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,; \tag{7}$$

bez újmy na obecnosti lze opět předpokládat, že $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$.

Z normality metrického prostoru P plyne existence otevřené množiny G, pro niž je $A_1 \cap \overline{G} = \emptyset$, $A_2 \subset G$. Zvolme pevně nějaký bod $x \in A_2$ a označme $K_1 := \overline{\mathrm{komp}_x\, G}$. Podle Janiszewského věty 4.1 je pak $K_1 \cap H(G) \neq \emptyset$, a protože $A_2 \subset G$, je $K_1 - A_2 \neq \emptyset$. Protože $A_1 \cap K_1 \subset A_1 \cap \overline{G} = \emptyset$, je

$$K_1 - A_2 \subset \bigcup_{n=3}^{\infty} K_1 \cap A_n\,, \tag{8}$$

a existuje proto index $n > 2$ tak, že $K_1 \cap A_n \neq \emptyset$. Z (8) dále plyne, že

$$K_1 = \bigcup_{n=2}^{\infty} K_1 \cap A_n\,, \tag{9}$$

přičemž vlevo je kontinuum disjunktní s A_1, vpravo sjednocení disjunktních uzavřených množin, z nichž (aspoň) dvě jsou neprázdné; jednou z nich je množina $K_1 \cap A_2$, a lze předpokládat, že druhou z nich je $K_1 \cap A_3$.

Protože tento rozklad má zcela analogické vlastnosti jako rozklad kontinua P, lze analogickým postupem najít kontinuum $K_2 \subset K_1$ disjunktní s $K_1 \cap A_2$, tedy i s A_2 (protože $K_2 \subset K_1$), tak, že

$$K_2 = \bigcup_{n=3}^{\infty} K_2 \cap A_n\,, \tag{10}$$

přičemž $K_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ a existuje index $n > 3$ tak, že $K_2 \cap A_n \neq \emptyset$; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je to index $n = 4$.

V těchto konstrukcích lze pokračovat neomezeně; tím získáme (nekonečnou) nerostoucí posloupnost neprázdných kontinuí K_n tak, že $K_n \cap A_n = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak je ovšem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (P - A_n) = P - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

a dostáváme se do sporu s Cantorovou větou, podle níž je průnik vlevo neprázdný.

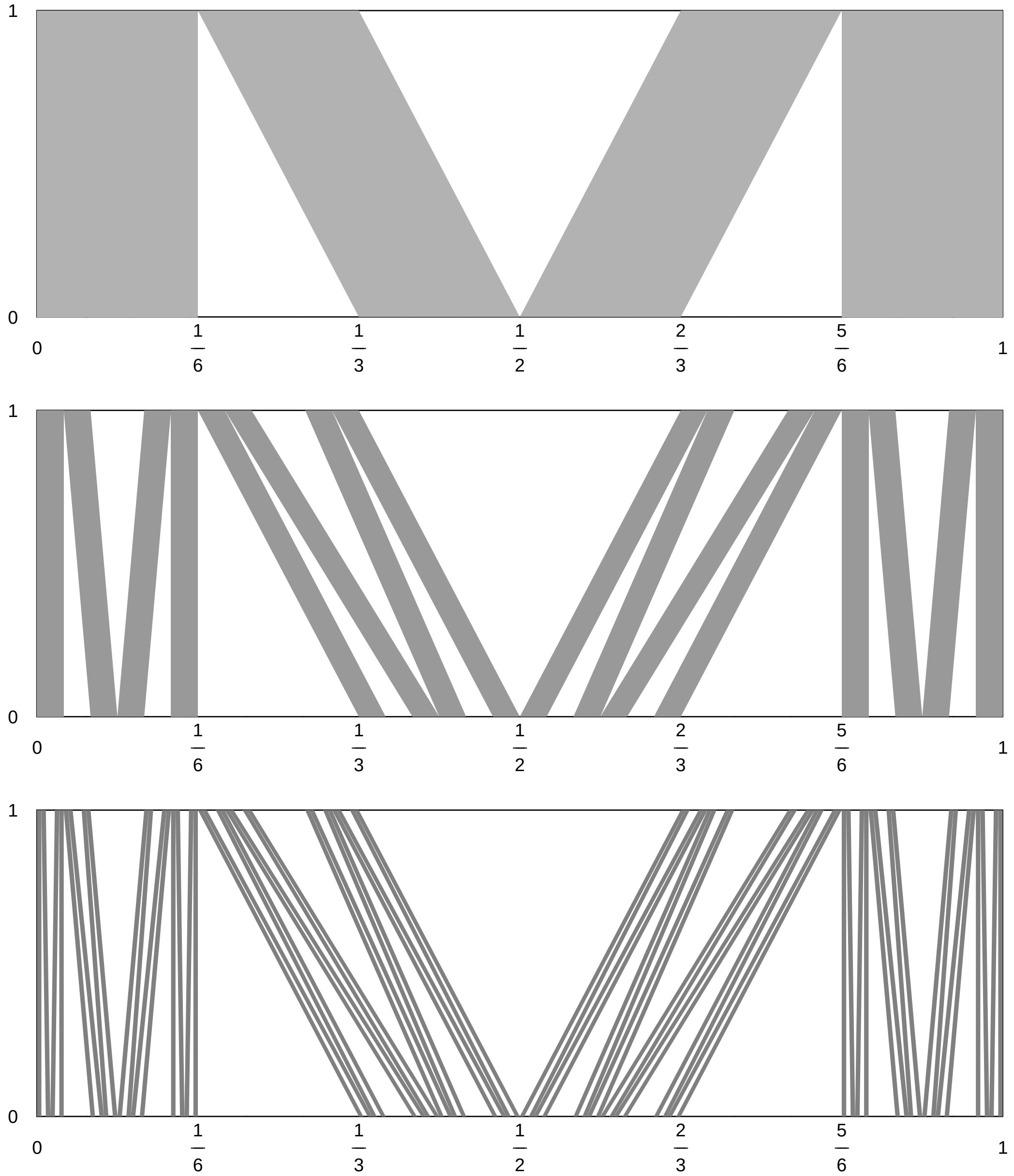
Tím je platnost Sierpińského věty dokázána a zbývá dokázat důsledek.

3. Každé kontinuum P_n je částí jisté komponenty K_n prostoru P; kdyby některé P_n nebylo komponentou prostoru P, bylo by $P_n \subsetneq K_n$, tedy

$$K_n = K_n \cap P = (K_n \cap P_1) \cup (K_n \cap P_2) \cup \dots,$$

kde (aspoň) dvě množiny vpravo jsou neprázdné – spor.

Poznámka 4.3. Každé vlastní kontinuum se dá rozložit na jednotlivé body, tj. na nespočetně mnoho disjunktních *nevlastních* kontinuí. Triviálním příkladem kontinua, které lze rozložit na nespočetně mnoho disjunktních vlastních kontinuí, je čtverec (který lze rozložit např. na rovnoběžné úsečky). Existují však též kontinua *řídká v rovině*[6]), která se dají rozložit na nespočetně mnoho disjunktních vlastních kontinuí; příklad takového kontinua uvádí Uryson ve [4], část II, kap. V, §7–§8 (viz obr. 4).



Obr. 4. K poznámce 4.3; různá měřítka na osách umožila nakreslit i třetí krok konstrukce

Je-li dán rovnoběžník $abcd$, jehož strany $\langle a; b\rangle$, $\langle c; d\rangle$ jsou rovnoběžné s osou x, buď a vždy jeho levý dolní vrchol, b pravý dolní vrchol, c pravý horní vrchol, d levý horní vrchol. Operací $\mathfrak{M}$ nazveme pak přechod od rovnoběžníku $abcd$ ke čtyřem rovnoběžníkům, které jsou v něm obsaženy a definovány takto:

[6]) tj. křivky podle Cantorovy definice, kterou uvedeme v dalším textu

Stranu ab rozdělíme na šest stejně dlouhých úseček

$$\langle a; a_1\rangle, \langle a_1; a_2\rangle, \langle a_2; a_3\rangle, \langle a_3; a_4\rangle, \langle a_4; a_5\rangle, \langle a_5; b\rangle, \tag{11'}$$

stranu dc na šest stejně dlouhých úseček

$$\langle d; d_1\rangle, \langle d_1; d_2\rangle, \langle d_2; d_3\rangle, \langle d_3; d_4\rangle, \langle d_4; d_5\rangle, \langle d_5; c\rangle \tag{11''}$$

a utvoříme rovnoběžníky

$$aa_1d_1d,\ a_2a_3d_2d_1,\ a_3a_4d_5d_4,\ a_5bcd_5. \tag{12}$$

Jednotkový čtverec v rovině xy označíme P_0. Operací $\mathfrak{M}$ získáme z P_0 čtyři rovnoběžníky P_{i_1}, kde $1 \leq i_1 \leq 4$, jejichž sjednocení označíme P^1. Operací $\mathfrak{M}$ provedenou na každém P_{i_1} dostaneme 16 rovnoběžníků $P_{i_1 i_2}$, kde $1 \leq i_2 \leq 4$, jejichž sjednocení označíme P^2, atd. Průnik

$$P^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n \tag{13}$$

je kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha lomených čar složených ze dvou úseček majících jeden krajní bod společný (podobně jako písmeno **V**) a nespočetně mnoha „samostatných“ úseček (podobných různě nakloněnému písmenu **I**).

Věta 4.3. (Moore.) *V každém vlastním kontinuu P existují aspoň dva body, z nichž žádný P neroztíná.*

D ů k a z . Stačí dokázat, že pro každý bod $p \in P$ existuje bod $q \in P$ neroztínající P a různý od p. Nechť množina všech členů prosté posloupnosti $\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$ je hustá v P, přičemž $p(0) = p$. Pokud některý z bodů $p(n)$, kde $n > 0$, neroztíná P, stačí zvolit jej za q; zbývá proto vyšetřit případ, kdy každý bod $p(n)$, $n > 0$, kontinuum P roztíná.

Položme $n_0 = 0$, $A_0 = P$, $n_1 = 1$. Protože bod $p(n_1)$ roztíná P, je $P - p(n_1) = A_1 \cup B_1$, kde vpravo jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny; jejich označení zvolme tak, že $p \in B_1$. Podle věty 2.2 je pak uzavřená množina $A_1 \cup p(n_1)$ kontinuum a $H(A_1) = p(n_1)$ (protože hranice otevřené množiny A_1 vznikne z jejího uzávěru $A_1 \cup p(n_1)$ odečtením množiny A_1).

Je-li pro některé $i > 1$ sestrojeno číslo $n_{i-1} \in \mathbb{N}$ a množina A_{i-1}, označme n_i nejmenší číslo, pro nějž je $p(n_i) \in A_{i-1}$; pišme pak $P - p(n_i) = A_i \cup B_i$, kde vpravo jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny, a označení zvolme tak, že $p(n_{i-1}) \in B_i$. Podle věty 2.2 je množina $\overline{A_i} = A_i \cup p(n_i)$ kontinuum a $H(A_i) = \overline{A_i} - A_i = p(n_i)$.

Tím je indukcí sestrojena posloupnost $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ přirozených čísel a posloupnost $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ otevřených podmnožin kontinua P tak, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí:

1. n_i je nejmenší přirozené číslo, pro nějž je $p(n_i) \in A_{i-1}$;
2. $p(n_{i-1}) \notin A_i$;
3. $\overline{A_i} = A_i \cup p(n_i)$ je kontinuum, $H(A_i) = p(n_i)$.

Protože $p(n_{i+1}) \in A_i$, $p(n_i) \in H(A_i)$, je $n_i \neq n_{i+1}$ (pro každé $i \in \mathbb{N}$). Protože $p(n_i) \notin A_{i+1} \cup p(n_{i+1}) = \overline{A_{i+1}}$, je $\overline{A_{i+1}} \subset P - p(n_i) = A_i \cup B_i$. Protože kontinuum $\overline{A_{i+1}}$ má s A_i společný bod $p(n_{i+1})$, je částí A_i. Z inkluze $\overline{A_{i+1}} \subset A_i$ a z definice čísel n_i plyne, že $n_{i+1} \geq n_i$; protože *neprázdná kompaktní* podmnožina $\overline{A_{i+1}} \neq P$ souvislého prostoru P nemůže být identická s *otevřenou* množinou A_i, je $n_{i+1} > n_i$. Posloupnost $\{n_i\}$ je tedy rostoucí.

Z inkluzí $\overline{A_{i+1}} \subset A_i$ a z Cantorovy věty dále plyne, že

$$A := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \neq \emptyset;$$

tato množina neobsahuje žádný bod $p(n_i)$, $i \geq 0$, protože $p(n_i) \notin A_{i+1}$. Pro každé $n \geq 0$ existuje $i > 1$ tak, že $n_i > n$; protože n_i je nejmenší číslo, pro něž je $p(n_i) \in A_{i-1}$, je $p(n) \notin A_{i-1}$, a tím spíše je $p(n) \notin A$. Množina A tedy neobsahuje žádný z bodů $p(n)$, $n \geq 0$.

Věta bude dokázána, ukážeme-li, že žádný bod $q \in A$ neroztíná P, tj. že pro každý rozklad $P - q = M \cup N$, kde M, N jsou disjunktní otevřené množiny, je jedna z množin M, N prázdná:

Protože není $q = p(n_i)$ pro žádné $i \in \mathbb{N}$, leží všechny body $p(n_i)$ ve sjednocení $M \cup N$; pro jednu z množin M, N – např. pro N – existuje proto vybraná posloupnost $\{n_{i_j}\}$ tak, že $p(n_{i_j}) \in N$ pro každé j. Množina $M \cup q$ je kontinuum disjunktní s $H(A_{i_j}) = p(n_{i_j})$, tedy obsažené v $A_{i_j} \cup B_{i_j}$; protože má společný bod q s A_{i_j}, je $M \cup q \subset A_{i_j}$. Protože tato inkluze platí pro každé j, je $M \subset A$. Protože A (a tím spíše M) neobsahuje žádný z bodů $p(n)$ a protože množina $\{p(n);\, n \geq 0\}$ je hustá v P, je otevřená množina M prázdná.

Tím je věta 4.3 dokázána.

* * *

Definice 4.3. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a je-li f spojité zobrazení nějaké množiny $X \subset \mathbb{R}^n$ na (metrický) prostor P, říkáme, že f je **parametrizací** neboli **parametrickým popisem** prostoru P.

Příklad 4.1. 1. Každé homeomorfní zobrazení h každého jednorozměrného kompaktního intervalu J je parametrizací oblouku $h(J)$. Je-li I další jednorozměrný kompaktní interval a je-li $\omega : I \to_{\text{na}} J$ prostá spojitá funkce, je $h \circ \omega$ další (homeomorfní) parametrizace oblouku $h(J)$.

2. Je-li $\rho \in \mathbb{R}_+$, je vektorová funkce

$$v(\varphi) := (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)\,,\ \ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\,, \tag{14}$$

parametrizací kružnice K o středu $(0,0)$ a poloměru ρ. Její restrikce $v|\langle 0,\pi\rangle$, $v|\langle \pi, 2\pi\rangle$ jsou parametrizacemi příslušné „horní“ půlkružnice $K_1 := v(\langle 0,\pi\rangle)$ a „dolní“ půlkružnice $K_2 := v(\langle \pi, 2\pi\rangle)$. Tyto půlkružnice jsou oblouky s krajními body $a := -\rho$ a $b := \rho$, přičemž

$$K_1 \cup K_2 = K\,,\ \ K_1 \cap K_2 = \{a, b\}\,. \tag{15}$$

3. Je-li $\rho \in \mathbb{R}_+$, je vektorová funkce

$$w(\varphi, \vartheta) := (\rho \cos\varphi \sin\vartheta, \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \rho\cos\vartheta),\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ 0 \leq \vartheta \leq \pi\,, \tag{16}$$

parametrizací sféry o středu v počátku prostoru $\mathbb{R}^3$ a poloměru ρ. Restringujeme-li úhel ϑ na interval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ resp. $\langle \frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$, dostaneme „horní“ resp. „dolní“ polosféru.

4. Pišme body Cantorova diskontinua Δ ve tvaru

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\,, \tag{17}$$

kde $a_k \in \{0, 1\}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a definujme vektorovou funkci $f = (f_1, f_2) : \Delta \to \mathbb{R}^2$ takto: Je-li x dáno rovností (17), je

$$f_1(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^k}\,,\ \ f_2(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^k}\,. \tag{18}$$

Je zřejmé, že funkce f zobrazuje Δ do čtverce $Q := \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Je-li dán libovolný bod $(b, c) \in Q$, kde $b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k/2^k$, $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k/2^k$, přičemž každé b_k a každé c_k je buď 0, nebo 1, a položíme-li $a_{2k-1} = b_k$, $a_{2k} = c_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je obrazem bodu (17) bod (b, c). Je tedy $f(\Delta) = Q$.

Dokažme, že f je spojité zobrazení: Je-li

$$x' = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{3^k}\,, \tag{17'}$$

kde $a'_k \in \{0, 1\}$ pro každé k, další bod z Δ a je-li n nejmenší index, pro nějž je $a_n \neq a'_n$, je

$$|\,x - x'\,| = \left|2\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k - a'_k}{3^k}\right| \geq 2\Big(\frac{1}{3^n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\Big) = \frac{1}{3^n}\,. \tag{19}$$

Je-li tedy $|\,x - x'\,| < 3^{-2n}$, je $a_k = a'_k$ pro $k = 1, \ldots, 2n$, z čehož snadno plyne, že $|\,f_i(x) - f_i(x')\,| \leq 2^{-n}$ pro $i = 1, 2$, takže (kartézská) vzdálenost bodů $f(x)$, $f(x')$ je nejvýše rovna 2^{-n+1}. Z toho je patrná (stejnoměrná) spojitost funkce f v Δ.

Funkce f je tedy parametrizací čtverce Q; definičním oborem není interval, ale řídká nespočetná kompaktní množina $\Delta \subset \mathbb{R}$, která má jen jednobodové komponenty. Funkci f lze snadno rozšířit spojitě na celý interval $\langle 0,1\rangle$ – stačí v každém omezeném styčném intervalu (a,b) Cantorova diskontinua položit

$$f(x) := f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \ \text{ pro každé } \ x \in (a,b).$$

Takto rozšířená funkce f zobrazuje jednorozměrný interval $\langle 0,1\rangle$ spojitě na dvojrozměrný interval Q.

Jak původní funkce $f : D \to_{\text{na}} Q$, tak i rozšířená funkce $f : \langle 0,1\rangle \to_{\text{na}} Q$ je parametrizací čtverce Q. Spojité funkce zobrazující část $\mathbb{R}$ na „vícerozměrnou" množinu se často nazývají **Peanovy funkce** nebo **Peanovy křivky**. [7])

Poznamenejme ještě, že kdybychom bodu (17) přiřadili vektor

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k-2}}{2^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k-1}}{2^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k}}{2^k} \Big),$$

zřejmě bychom získali spojité zobrazení množiny Δ na krychli $\langle 0,1\rangle^3$, tedy další Peanovu funkci. Jistě je též patrné, že podobně lze parametrizovat i krychli $\langle 0,1\rangle^n \subset \mathbb{R}^n$ libovolné (konečné) dimenze n.

Definice 4.4. Homeomorfní obrazy kružnic se nazývají **topologické kružnice**.

Poznámka 4.4. Pojem „topologická kružnice" je zřejmě topologický. „Vnitřní" vlastnosti topologických kružnic odpovídají analogickým vlastnostem kružnic:

Zvolíme-li např. na jednotkové kružnici C s parametrickým popisem $f(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, dva různé body $a = f(\alpha)$, $b = f(\beta)$, lze předpokládat, že $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$. Množiny $C_1 := f(\langle \alpha, \beta\rangle)$ a $C_2 := f(\langle \beta, \alpha + 2\pi\rangle)$ jsou pak (komplementární) oblouky kružnice C; mají krajní body a, b a jejich průnikem je množina $\{a,b\}$. (Dodejme ještě, že neexistuje oblouk $C_3 \subset C$ s krajními body a, b a různý od C_1 i od C_2.) Z toho ihned plyne toto tvrzení pro topologické kružnice:

Je-li K topologická kružnice a jsou-li $A \neq B$ dva její body, existují právě dva oblouky K_1, K_2 s krajními body A, B tak, že $K_1 \cup K_2 = K$, $K_1 \cap K_2 = \{A, B\}$.

Obráceně: *Jsou-li K_1, K_2 dva oblouky AB* [8]) *a je-li $K_1 \cap K_2 = \{A,B\}$, je $K_1 \cup K_2$ topologická kružnice.*

Existuje totiž homeomorfní zobrazení $h_1 : \langle 0,\pi\rangle \to_{\text{na}} K_1$ tak, že $h_1(0) = A, h_1(\pi) = B$, a homeomorfní zobrazení $h_2 : \langle \pi, 2\pi\rangle \to_{\text{na}} K_2$ tak, že $h_2(\pi) = B, h_2(2\pi) = A$; je-li f jako nahoře a označíme-li $B_1 := f(\langle 0,\pi\rangle), B_2 := f(\langle \pi, 2\pi\rangle)$ horní a dolní půlkružnici, je

$$h := \begin{cases} h_1 \circ (f|\langle 0,\pi\rangle)_{-1} & \text{v } B_1 \\ h_2 \circ (f|\langle \pi, 2\pi\rangle_{-1} & \text{v } B_2 \end{cases} \tag{20}$$

zřejmě homeomorfní zobrazení kružnice C na $K_1 \cup K_2$; toto sjednocení je tedy topologická kružnice. □

Následující tři věty obsahují důležité charakteristiky oblouků a topologických kružnic.

Věta 4.4. *Existují-li v kontinuu P dva různé body a, b tak, že každý bod $x \in P - \{a,b\}$ roztíná P, je P oblouk ab.*

D ů k a z . Pro každé $x \in P - \{a,b\}$ je podle předpokladu $P - x = M \cup N$, kde M, N jsou otevřené disjunktní neprázdné množiny; množiny $M \cup x$, $N \cup x$ jsou podle věty 2.2 kontinua. Předpokládejme, že $a \in M$ a dokažme sporem, že $b \in N$. Předpokládejme, že $b \in M$ a podle věty 4.3 zvolme bod $y \in N$, který neroztíná kontinuum $N \cup x$. Množina $P - y = ((N \cup x) - y) \cup (M \cup x)$ je pak (jakožto sjednocení dvou souvislých množin, které mají společný bod x) souvislá, takže bod y neroztíná P, ačkoli není roven ani a, ani b – spor.

Dokázali jsme, že pro každé $x \in P - \{a,b\}$ je $P - x = M \cup N$, kde vpravo jsou oddělené množiny, přičemž z předpokladu $a \in M$ plyne, že $b \in N$. Každý bod $x \in P$ různý od a i b tedy roztíná P mezi body a, b, tj. $P - \{a,b\} = S(a,b)$. Podle věty 2.11 je P oblouk ab.

[7]) Slovo „křivka" má v různých matematických disciplínách různý význam. Zatímco v tomto textu budou křivky bodové množiny, jinde je účelnější nazývat křivkami (vektorové) funkce, tedy parametrizace jistých bodových množin.

[8]) Připomeňme, že to znamená, že oba oblouky mají krajní body A, B.

Věta 4.5. (Moore.) *Vlastní kontinuum P je topologickou kružnicí, právě když je roztíná každá dvoubodová množina $\{a, b\} \subset P$.*

D ů k a z . Protože každá topologická kružnice uvedenou vlastnost má, budeme dokazovat jen obrácené tvrzení.

Dokažme nejdříve (nepřímo), že *pro každé $a \in P$ je množina $P - a$ souvislá*: Z předpokladu její nesouvislosti plyne existence rozkladu $P = C_1 \cup C_2$, kde C_1 a C_2 jsou otevřené disjunktní neprázdné množiny; podle věty 2.2 je každá z množin $D_i := C_i \cup a$, $i = 1, 2$, kontinuem. Podle věty 4.3 existují v každém D_i aspoň dva body, které D_i neroztínají; existují proto dva body $p \in C_1$, $q \in C_2$ tak, že množiny $D_1 - p$ a $D_2 - q$ jsou souvislé. Množina $P - (p \cup q) = (D_1 - p) \cup (D_2 - q)$ je pak (jakožto sjednocení dvou souvislých množin majících společný bod a) souvislá, což odporuje předpokladu věty.

Zvolme $a \in P$ pevně; množina $P - a$ je podle toho, co jsme právě dokázali souvislá (a nespočetná), takže podle věty 2.8 existuje bod $b \in P - a$, pro nějž je $P - \{a, b\}$ sjednocením dvou disjunktních oblastí M, N, jejichž společnou hranicí je b. Kdyby bod a neležel v $\overline{M}$, byl by $P - b = M \cup (N \cup a)$ rozklad souvislé množiny na dvě neprázdné oddělené množiny. Je tedy $\overline{M} = M \cup a \cup b$; podobně se dokáže, že $\overline{N} = N \cup a \cup b$.

Dokažme, že $\overline{M}, \overline{N}$ jsou oblouky ab. Nechť např. $\overline{M}$ není oblouk ab; pak (podle věty 2.11) existuje bod $x \in M$ tak, že množina $\overline{M} - x$ je souvislá. Jsou jen dvě možnosti: 1) $\overline{N}$ není oblouk; pak existuje bod $y \in N$ tak, že i množina $\overline{N} - y$ je souvislá, načež je souvislá i množina $P - \{x, y\} = (\overline{M} - x) \cup (\overline{N} - y)$, protože souvislé množiny vpravo mají společné body a, b – spor. 2) $\overline{N}$ je oblouk; pak pro každý bod $y \in N$ je $\overline{N} - y$ sjednocením množin $ay - y$ a $by - y$ [9]) a množina $P - \{x, y\} = (ay - y) \cup (\overline{M} - x) \cup (by - y)$ je zřejmě opět souvislá – spor.

Tím je dokázáno, že $\overline{M}$ je oblouk ab; důkaz, že i $\overline{N}$ je oblouk ab, je zcela analogický.

Věta 4.6. *K tomu, aby kontinuum P bylo obloukem ab, je nutné a stačí, aby bylo možné zavést do P uspořádání $\prec$ tak, že kromě obvyklých axiomů platí:*

1. *a je první, b poslední bod;*
2. *je-li $c \in P$, $d \in P$, $c \prec d$, jsou množiny*

$$\{x \in P;\, c \prec x \prec d\}, \quad \{x \in P;\, x \prec d\}, \quad \{x \in P;\, x \succ c\}$$

otevřené a neprázdné.

D ů k a z . 1. Je-li P oblouk ab, jsou podmínky zřejmě splněny.

2. Předpokládejme, že podmínky jsou splněny a že A je hustá spočetná část kontinua P obsahující body a, b. Množina A je, jakožto část uspořádané množiny P, také uspořádaná. Má první a poslední prvek a podle podmínky 2 nemá skoky. [10]) Je tedy podobná [11]) množině D všech dyadicky racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. [12]) Buď f podobné zobrazení množiny A na D. Položíme-li

$$f(x) := \sup\{f(z);\, z \in A,\ z \prec x\}, \text{ je-li } x \in P - A,$$

je f definována na celém P a snadno se ukáže, že je homeomorfním zobrazením.

* * *

Definice 4.5. Říkáme, že *vlastní* kontinuum $K \subset P$ je **kontinuum kondenzace** prostoru P, je-li K řídké v P, a **kontinuem konvergence**, existují-li kontinua $K_n \subset P$ disjunktní s K tak, že $K = \operatorname{Lim} K_n$.

Poznámka 4.5. Oba pojmy jsou zřejmě topologické.

Poznámka 4.6. *Každé kontinuum konvergence je řídké, takže je kontinuem kondenzace. Následující dva příklady ukazují, že obrácené tvrzení neplatí*, tj. že existují kontinua kondenzace, která nejsou kontinuy konvergence.

[9]) Jsou to oblouky s krajními body a, y a y, b obsažené v oblouku $\overline{N}$, z nichž byl odstraněn společný krajní bod y.

[10]) *Skokem* (v uspořádané množině) se rozumí dvojice jejích bodů $c \prec d$, pro něž je interval $\{x;\, c \prec x \prec d\}$ prázdný.

[11]) *Zobrazení* F uspořádané množiny X do uspořádané množiny Y se nazývá *podobné*, zachovává-li uspořádání, tj. platí-li implikace $x \prec y \Rightarrow F(x) \prec F(y)$. Říkáme, že *množiny* X, Y jsou *podobné*, existuje-li podobné zobrazení množiny X *na* množinu Y.

[12]) Srov. např. s [6], kap. III, Věta 1.

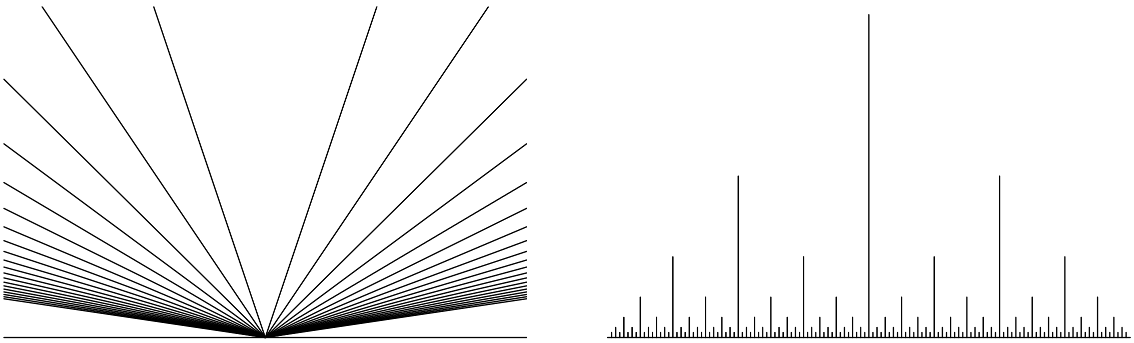
Příklad 4.2. Je-li P sjednocení úsečky $u := \langle(-1,0);(1,0)\rangle$ s úsečkami spojujícími počátek s body $(\pm 1, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, je u kontinuem kondenzace kontinua P, není však jeho kontinuem konvergence. (Jeho kontinuy konvergence jsou však úsečky $\langle(0,0);(\pm 1,0)\rangle$.)

Příklad 4.3. Je-li P sjednocení úsečky $v := \langle(0,0);(1,0)\rangle$ s úsečkami spojujícími body

$$\Big(\frac{2m-1}{2^n}, 0\Big), \ \Big(\frac{2m-1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\Big), \ 0 < 2m-1 < 2^n, \ n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

je úsečka v je kontinuem kondenzace kontinua P; v tomto případě neobsahuje P žádné kontinuum konvergence.

Příklad 4.4. Typická kontinua konvergence jsou patrná z obr. 7 (dolní úsečka) a z obr. 8 (jednotková kružnice, která leží v uzávěru množiny $\{r(t)\cdot(\cos t, \sin t);\ r(t) := t/(t+1), t \in \langle 0, +\infty)\}$.



Obr. 5 a 6. K příkladům 4.2 a 4.3

Poznámka 4.7. *Je-li K kontinuum konvergence kompaktního prostoru P, existují disjunktní kontinua $K_n \subset P$ tak, že*

$$K_n \cap K = \emptyset \ \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \ \text{ a } \ K = \operatorname{Lim} K_n .$$

D ů k a z . Podle předpokladu existují kontinua $C(k)$ disjunktní s K tak, že $K = \operatorname{Lim} C(k)$. Položme $k_1 := 1$, $K_1 := C(k_1)$. Jsou-li již sestrojeny indexy $k_1 < \ldots < k_n$ a disjunktní množiny $K_1 := C(k_1), \ldots, K_n := C(k_n)$, položme $r_n := \min\{\rho(K_1, K), \ldots, \rho(K_n, K)\}$. Toto číslo je kladné a protože $\operatorname{Lim} C(k) = K$, existuje podle věty 1.2 index $k_{n+1} > k_n$ tak, že $K_{n+1} := C(k_{n+1}) \subset U(K, r_n)$, což zaručuje, že $(K_1 \cup \ldots \cup K_n) \cap K_{n+1} = \emptyset$.

Tím je indukcí sestrojena posloupnost $\{K_n\}$; protože je vybrána z posloupnosti $\{C(k)\}$, je $\operatorname{Lim} K_n = \operatorname{Lim} C(n) = K$, a z konstrukce plyne, že $m \neq n \Rightarrow K_m \cap K_n = \emptyset$.

Poznámka 4.8. V dalším budeme potřebovat tvrzení, které lze vyslovit ve dvou ekvivalentních verzích:

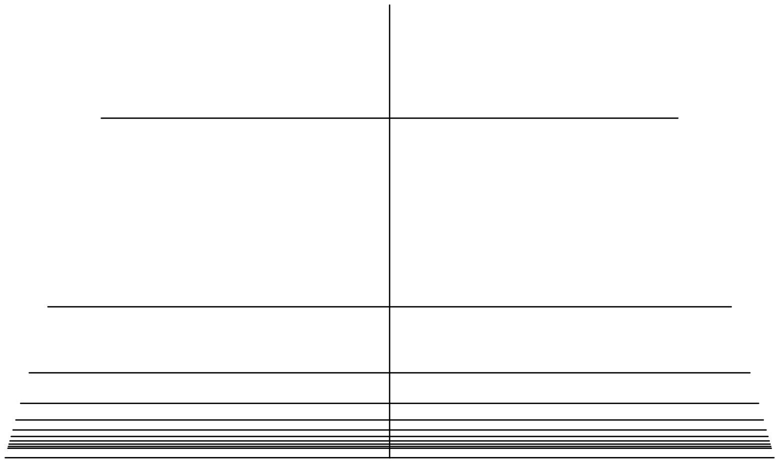
Baireova věta – 1. verze. *Je-li každá z množin P_n, $n \in \mathbb{N}$, otevřená a hustá v úplném prostoru P, je i množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ hustá v P.* [13])

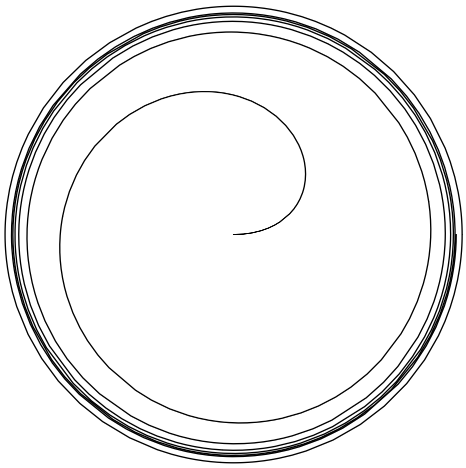
Uvážíme-li, že uzavřená množina $K \subset P$ je řídká v P, právě když je množina $P - K$ hustá v P, a že uzávěr množiny řídké v P je řídký v P, je patrné, že Baireovu větu lze ekvivalentně vyslovit i takto:

Baireova věta – 2. verze. *Je-li P úplný prostor a jsou-li množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, řídké v P, je množina $P^* := P - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ množina hustá v P; je-li $P \neq \emptyset$, je i $P^* \neq \emptyset$.*

Poznamenejme, že sjednocení spočetně mnoha množin řídkých v P se nazývá množina **první kategorie v** P. Neprázdný úplný prostor *není tedy první kategorie v sobě. Protože kompaktní prostory jsou úplné, plyne z toho, že žádné vlastní kontinuum není první kategorie v sobě.*

[13]) Viz [6], str. 132 – 134, nebo [7], str. 300.





Obr. 7 a 8. K příkladu 4.4

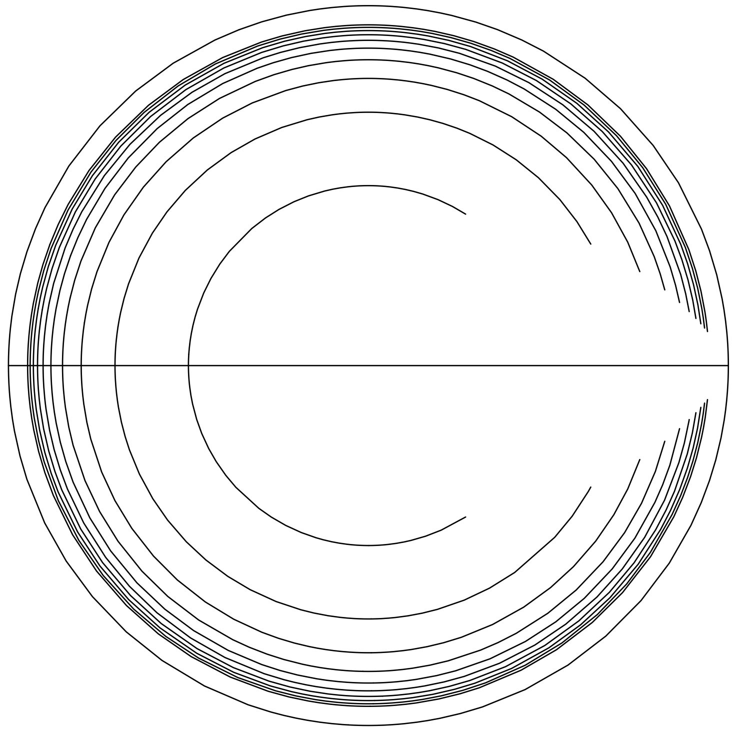
Poznámka 4.9. *Je-li K kontinuem kondenzace prostoru P, je kontinuem kondenzace každého většího prostoru $P_1 \supset P$; analogické tvrzení platí i pro kontinua konvergence.*

Je-li K kontinuem kondenzace prostoru P, platí totéž o každém vlastním kontinuu $C \subset K$. Obdobné tvrzení pro kontinua konvergence však *neplatí*.

Příklad 4.5. Nechť P je sjednocením úsečky spojující body $(-1,0)$ a $(1,0)$, jednotkové kružnice $K := \{(\cos\varphi, \sin\varphi);\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ a oblouků

$$K_n = \{r_n(\cos\varphi, \sin\varphi);\ r_n := n/(n+1), \varphi \in \langle 1/n, 2\pi - 1/n\rangle\}$$

kružnic o středu $(0,0)$ a poloměrech r_n. (Viz obr. 9.) Pak je P kontinuum a kružnice K je jeho kontinuem konvergence, zatímco její „pravá polovina“ $C = \{(\cos\varphi, \sin\varphi);\ \varphi \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle\}$ kontinuem konvergence není.



Obr. 9. K příkladu 4.5

Poznámka 4.10. *Jsou-li K_n kontinua kondenzace kompaktního prostoru P a je-li $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ kontinuum, je K také kontinuem kondenzace prostoru P.*

D ů k a z . Protože množiny $P - K_n$ jsou otevřené a husté v P, je podle Baireovy věty hustý i jejich průnik

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (P - K_n) = P - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = P - K\,.$$

Protože množina K je podle předpokladu uzavřená, je množina $P - K$ otevřená; protože je hustá v P, je množina K řídká v P. $\square$

Kontinuum z poznámky 4.6 ukazuje, že (na rozdíl od právě dokázaného tvrzení o kontinuích kondenzace) ani *sjednocení dvou kontinuí konvergence nemusí být kontinuem konvergence*.

Poznámka 4.11. *Je-li prostor P sjednocením konečného počtu kontinuí, z nichž žádné neobsahuje žádné kontinuum kondenzace, neobsahuje ani P žádné kontinuum kondenzace.*

D ů k a z . Tvrzení stačí zřejmě dokázat pro případ, kdy P je sjednocením dvou vlastních kontinuí P_1, P_2. Pro každé vlastní kontinuum $C \subset P$ nastane jedna z těchto dvou situací:

1. $C \cap ((P_1 - P_2) \cup (P_2 - P_1)) \neq \emptyset$,

2. $C \subset P_1 \cap P_2$.

Ad 1. Je-li např. $C \cap (P_1 - P_2) \neq \emptyset$, zvolme bod a v tomto průniku a uvažme, že číslo $\delta := \rho(a, P_2)$ je pak kladné. Podle důsledku 1 věty 4.1 existuje vlastní kontinuum $C_1 \subset C - P_2$ obsahující bod a a disjunktní s P_2, takže $\rho(C_1, P_2) > 0$. Protože $C_1 \subset P_1$ a protože P_1 neobsahuje žádné vlastní kontinuum řídké v P_1, není C_1 řídké v P_1. Vzhledem k tomu, že má kladnou vzdálenost od P_2, není řídké ani v P. Tím spíše není v P řídké kontinuum $C \supset C_1$. P tedy žádné kontinuum kondenzace neobsahuje.

Ad 2. Předpokládejme, že C je řídké v P, a dokažme, že pak existuje buď vlastní kontinuum řídké v P_1, nebo vlastní kontinuum řídké v P_2. Pro $i = 1, 2$ položme

(22) $$C_i := \{x \in C;\ \text{pro každé okolí } U(x) \text{ je } U(x) \cap P_i - C \neq \emptyset\}\,.$$

Snadno nahlédneme, že obě množiny C_i jsou uzavřené, že $C_1 \cup C_2 = C$ a že množina C_i je řídká v P_i.

Protože kompaktní prostor je úplný a úplný prostor není sjednocením žádných dvou řídkých množin, *není* např. množina C_1 řídká v C. Existuje tedy bod $a \in C_1$ a $\delta > 0$ tak malé, že $\overline{U(a,\delta)} \cap C \subset C_1$, $\overline{U(a,\delta)} - C \neq \emptyset$. Podle věty 4.1 existuje vlastní kontinuum D obsahující bod a a obsažené v C_1. Protože C_1 je řídká v P_1, je v P_1 řídké tím spíše i vlastní kontinuum D. $\square$

Tvrzení analogické tomu, které jsme právě dokázali, *pro kontinua konvergence neplatí*. V následujícím příkladu ukážeme, že *existují kontinua P, P_1, P_2 tak, že zatímco ani P_1, ani P_2 žádné kontinuum konvergence neobsahuje, v $P = P_1 \cup P_2$ takové kontinuum existuje.*

Příklad 4.6. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $m \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}\}$ nechť $T(n,m)$ je sjednocení úsečky $\langle (m/2^n, 0); (m/2^n, 1/2^n) \rangle$ s úsečkou s krajními body $(m/2^n \pm 1/2^{(n+1)}, 1/2^n)$; nechť $Q := \langle 0,1 \rangle \times \langle 0, 1/2 \rangle$ a $L : \langle 0,1 \rangle \times 0$. V žádném z kontinuí

$$P_1 := L \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{m=1}^{2^{n-1}} T(n, 2m-1) \Big), \quad P_2 := L \cup \Big(Q \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{m=1}^{2^{n-1}} T(n, 2m) \Big) \Big) \tag{23}$$

pak neleží žádné kontinuum konvergence, ale úsečka L je kontinuem konvergence kontinua $P := P_1 \cup P_2$. (Viz obr. 10.)

Věta 4.7. *Každý bod p kontinua P, v němž P není lokálně souvislé, leží v nějakém kontinuu konvergence kontinua P.*

D ů k a z . Není-li P lokálně souvislé v bodě p, existuje okolí $U := U(p)$ tak, že p neleží uvnitř kontinua $K_0 := \operatorname{komp}_p \overline{U}$.

Zvolme pevně $\varepsilon_1 \in (0,1)$ a buď $U_1 := U(p, \varepsilon_1)$. Protože $U_1 \not\subset K_0$, existuje bod $p_1 \in U_1 - K_0$; položme $K_1 := \operatorname{komp}_{p_1} \overline{U}$. Protože K_0 a K_1 jsou komponenty téže množiny, je buď $K_0 = K_1$, nebo $K_0 \cap K_1 = \emptyset$; protože $p_1 \in K_1 - K_0$, je $K_0 \cap K_1 = \emptyset$. Podle Janiszewského věty 4.1 je kromě toho $K_1 \cap H(U) \neq \emptyset$.

Nechť $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ je tak malé, že okolí $U_2 := U(p, \varepsilon_2)$ je disjunktní s K_1; zvolme $p_2 \in U_2 - K_0$ a položme $K_2 := \operatorname{komp}_{p_2} \overline{U}$. Pak je $K_2 \cap (K_0 \cup K_1) = \emptyset$, $K_2 \cap H(U) \neq \emptyset$.

Jistě nemusíme provádět formálně indukci, abychom nahlédli, že tento postup vede k posloupnosti $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ disjunktních kontinuí, čísel $\varepsilon_n \in (0, 1/n)$, okolí $U_n := U(p, \varepsilon_n) \not\subset K_0$ a bodů $p_n \in U_n - K_0$, pro něž platí:

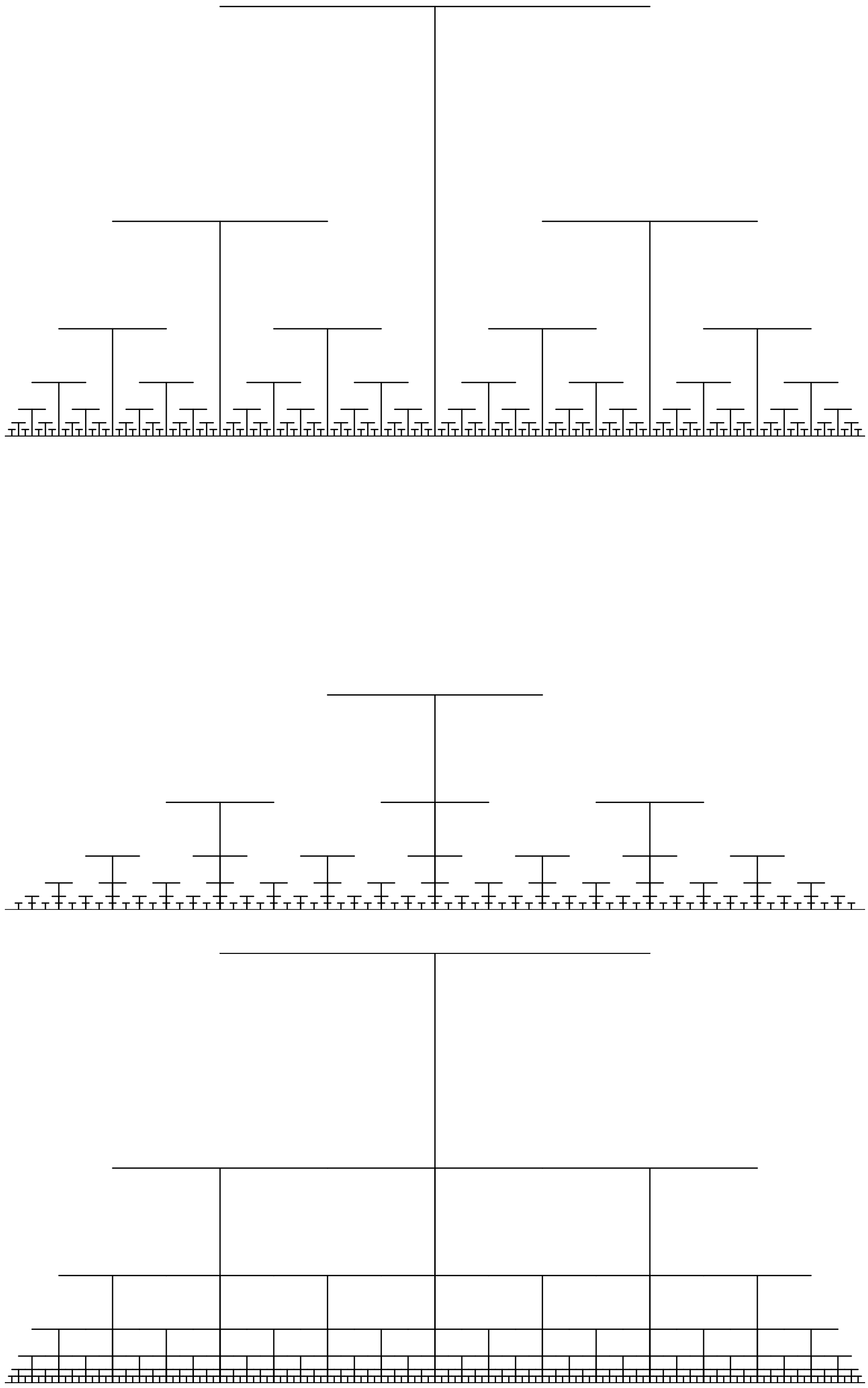
$$p_n \in K_n \subset \overline{U} \quad \text{a} \quad K_n \cap H(U) \neq \emptyset \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}.$$

Podle věty 1.2 lze z posloupnosti $\{K_n\}$ vybrat konvergentní posloupnost $\{K_{n_i}\}$; ukažme, že její limita K je hledané kontinuum konvergence: Protože K obsahuje bod $p = \lim p_{n_i}$ a protíná $H(U)$, je to vlastní kontinuum; protože $K \subset K_0$, je $K \cap K_n = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

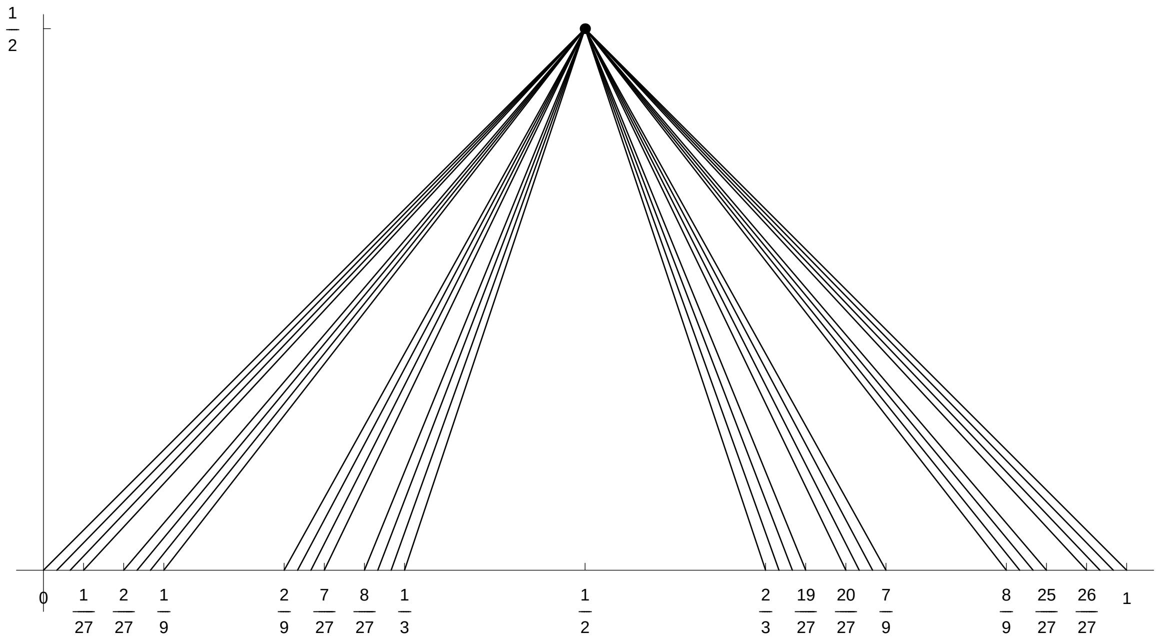
Věta 4.8. *Každý bod p kontinua P, v němž P není lokálně souvislé, je obsažen ve vlastním kontinuu $K \subset P$, v jehož žádném bodě není P lokálně souvislé.*

D ů k a z . Ukažme, že kontinuum K zkonstruované v důkazu předcházející věty má žádanou vlastnost. Předpokládejme, že kontinuum P je lokálně souvislé v některém bodě $y \in K$. Označíme-li $M := \operatorname{komp}_y \overline{U}$, je $K \subset M$ a $y \in \operatorname{Int} M$; protože $K = \operatorname{Lim} K_{n_i}$, existuje i tak, že $K_{n_i} \cap M \neq \emptyset$. Pak je však množina $M \cup K_{n_i}$ kontinuum obsahující p, což je ve sporu s tím, že K_{n_i} je komponenta množiny $\overline{U}$, která bod p neobsahuje. Tento spor ukazuje, že v žádném bodě kontinua K není kontinuum P lokálně souvislé.

Poznámka 4.12. Neexistují tedy kontinua, která by měla jen jeden bod lokální nesouvislosti nebo obecněji jen spočetně mnoho takových bodů. Naproti tomu existují vlastní kontinua, která mají právě jeden lokální souvislosti. Příkladem takového kontinuum je sjednocení P úseček spojujících bod $p := (1/2, 1/2)$ se všemi body Cantorova diskontinua. Bod p je jediný bod, v němž je kontinuum P lokálně souvislé. (Viz obr. 11.)



Obr. 10. Kontinua P_1, P_2, $P = P_1 \cup P_2$ z příkladu 4.6



Obr. 11. K poznámce 4.12

Definice 4.6. Říkáme, že kontinuum P je **dědičně lokálně souvislé**, je-li každé kontinuum $K \subset P$ lokálně souvislé. [14])

Poznámka 4.13. Třída dědičně lokálně souvislých kontinuí je podstatně užší než třída lokálně souvislých kontinuí. Čtverec je jednoduchým příkladem lokálně souvislého kontinua, které není dědičně lokálně souvislé. Příkladem kontinua řídkého v rovině, které je lokálně, ale ne dědičně lokálně souvislé, je dolní kontinuum z obr. 10.

Věta 4.9. *K tomu, aby kontinuum bylo dědičně lokálně souvislé, je nutné a stačí, aby neobsahovalo žádné kontinuum konvergence.*

D ů k a z . 1. Není-li $K \subset P$ lokálně souvislé, existuje v K podle věty 4.8 kontinuum konvergence; toto kontinuum je kontinuem konvergence i v P.

2. Nechť existuje kontinuum konvergence $K \subset P$; pak je $K = \mathrm{Lim}\, K_n$ pro vhodnou posloupnost disjunktních kontinuí $K_n \subset P$, která jsou navíc disjunktní i s K. Dokažme, že existuje kontinuum $L \subset P$, které obsahuje K a není lokálně souvislé.

Můžeme předpokládat, že samo P je lokálně souvislé (jinak lze klást $L = P$). Zvolme pevně nějaký bod $p \in K$ a buď U tak malé okolí tohoto bodu, že $K - \overline{U} \neq \emptyset$. Označíme-li pak $C := \mathrm{komp}_p\, \overline{U}$, je C kontinuum obsahující bod p uvnitř, přičemž $K - C \neq \emptyset$. Protože $K = \mathrm{Lim}\, K_n$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n \geq n_0 \Rightarrow C \cap K_n \neq \emptyset$. Množina

$$L := C \cup K \cup K_{n_0} \cup K_{n_0+1} \cup \dots \tag{24}$$

je pak zřejmě kontinuum. Kdyby L bylo lokálně souvislé v některém bodě $x \in K - C$, existovalo by kontinuum $D \subset L - C$ a okolí $U(x)$ bodu x tak, že $U(x) \cap L \subset D$. Protože pro skoro všechna n je $U(x) \cap K_n \neq \emptyset$ a protože

$$U(x) \cap L = (U(x) \cap C) \cup (U(x) \cap K) \cup \Big(U(x) \cap \bigcup_{n=n_0}^{\infty} K_n\Big), \tag{25}$$

je

$$D \cap \Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} K_n\Big) \neq \emptyset, \tag{26}$$

[14]) Jde zřejmě o topologický pojem.

tj. existoval by rozklad

$$D = (K \cap D) \cup \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (K_n \cap D), \tag{27}$$

kde $K \cap D \neq \emptyset$ a $K_n \cap D \neq \emptyset$ aspoň pro jedno $n \geq n_0$. To však odporuje Sierpińského větě 4.2.

L tedy není lokálně souvislé v žádném bodě $x \in K - C$.

Poznámka 4.14. Dědičně lokálně souvislé kontinuum může obsahovat kontinua kondenzace. Viz k tomu obr. 6 k příkladu 4.3.