5. Lokálně souvislá kontinua

Definice 5.1. Dyadickým systémem nazveme systém množin, v němž je každému $n \in \mathbb{N}$ a každé n-tici $(i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n$ přiřazena jistá množina $A(i_1, \dots, i_n)$ tak, že platí:

A. pro každé n je $A(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}) \subset A(i_1, \dots, i_n)$;

B. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A(i_1, \dots, i_n) = 0$;

C. uspořádáme-li při pevném n systém 2^n množin $A(i_1, \dots, i_n)$ lexikograficky, tvoří řetěz.

Poznámka 5.1. Ukažme, že *je-li každá z množin $A(i_1, \dots, i_n)$ kontinuum, je kontinuem i množina*

(1) $$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} A(i_1, \dots, i_n).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

(2) $$\delta_n = \max\{\operatorname{diam} A(i_1, \dots, i_n);\ (i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n\}$$

a dokažme, že z podmínek A, B plyne, že $\delta_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Postupujme nepřímo: Není-li $\delta_n \to 0$, existuje kladné číslo η a posloupnost $\{i_{n_k}\}$ vybraná z $\{i_n\}$ tak, že pro každé k je $\delta_{n_k} \ge \eta$; pro každé k existuje v důsledku toho množina $A(i_1, \dots, i_{n_k})$ s průměrem $\ge \eta$. Z podmínky A plyne ihned implikace

$$n \le n_k \Rightarrow \delta_n \ge \delta_{n_k} \ge \eta;$$

protože $n_k \to \infty$, je $\operatorname{diam} A(i_1, \dots, i_n) \ge \eta$ pro každé n, takže není splněna podmínka B.

Protože množina

(3) $$A_n := \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} A(i_1, \dots, i_n).$$

je (podle C a (2)) $2\delta_n$-sřetězená, stačí aplikovat větu 2.4 (s $P = A_1$ a $\varepsilon_n = 2\delta_n$) a uvážit, že (podle poznámky 1.8) je $A = \operatorname{Lim} A_n$. Množina A je tedy souvislá a jako průnik posloupnosti kompaktních množin je kompaktní. Je tedy skutečně kontinuem.

Dyadickým kontinuem nazýváme každou množinu tvaru (1), kde množiny $A(i_1, \dots, i_n)$ tvoří dyadický systém kontinuí.

Věta 5.1. *Pro každé neprázdné kontinuum P jsou ekvivalentní tyto podmínky:*

I. *P je dyadické kontinuum.*

II. *P je lokálně souvislé kontinuum.*

III. *P je spojitý obraz intervalu $\langle 0,1 \rangle$.*

IV. *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozklad P na konečně mnoho kontinuí o průměrech $< \varepsilon$.*

D ů k a z . I $\Rightarrow$ III. Nechť P je dyadické kontinuum. Číslu

(4) $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}$$

přiřaďme bod

(5) $$f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(i_1, \dots, i_n)$$

a ukažme, že toto přiřazení je *korektní*.

Je-li číslo x dyadicky racionální, má dva dyadické rozvoje:

(6) $$0.i_1 \dots i_{n-1}0111\dots \equiv 0.i_1 \dots i_{n-1}1000\dots.$$

Znamená-li symbol $\prec$ „před“ v lexikografickém uspořádání z podmínky C, jsou skupiny

(7) $$\begin{aligned} \{i_1 \dots i_{n-1}0\} &\prec \{i_1 \dots i_{n-1}1\}, \\ \{i_1 \dots i_{n-1}01\} &\prec \{i_1 \dots i_{n-1}10\}, \\ \{i_1 \dots i_{n-1}011\} &\prec \{i_1 \dots i_{n-1}100\}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$n, n+1, n+2\dots$ čísel napsané v téže řádce lexikograficky sousední, takže se dvojice příslušných množin $A(\dots)$ protínají.

Vzhledem k tomu, že $\delta_n \to 0$, jsou (jednobodové) množiny

$$A(i_1) \cap \dots \cap A(i_1 \dots i_{n-1}) \cap A(i_1 \dots i_{n-1}0) \cap A(i_1 \dots i_{n-1}01) \cap A(i_1 \dots i_{n-1}011) \cap \dots,$$
$$A(i_1) \cap \dots \cap A(i_1 \dots i_{n-1}) \cap A(i_1 \dots i_{n-1}1) \cap A(i_1 \dots i_{n-1}10) \cap A(i_1 \dots i_{n-1}100) \cap \dots$$

identické. Definice funkce f je tedy skutečně korektní.

Spojitost f plyne snadno z této úvahy: Jsou-li čísla x' a x'' obsažena v intervalu $\langle m/2^n, (m+1)/2^n \rangle$, jsou oba body $f(x')$ a $f(x'')$ obsaženy v jedné z množin $A(i_1, \dots, i_n)$, takže

$$\rho(f(x'), f(x'')) \le \operatorname{diam} A(i_1, \dots, i_n) \le \delta_n .$$

III $\Rightarrow$ IV. Je-li f spojité zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ na P, je f stejnoměrně spojité a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že

$$0 \le m \le 2^n - 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{diam} f(\langle m/2^n, (m+1)/2^n \rangle) < \varepsilon ,$$

přičemž množiny $f(\langle m/2^n, (m+1)/2^n \rangle)$ jsou kontinua.

IV $\Rightarrow$ II. Nechť $p \in P$, kde P má vlastnost IV, a nechť $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují kontinua $A_1, \dots, A_s$ tak, že $P = A_1 \cup \dots \cup A_s$, přičemž $\operatorname{diam} A_i < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro $i = 1, \dots, n$. Označme $I := \{i;\ p \in A_i\}$ a $J := \{i;\ p \notin A_i\}$; pak je $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ kontinuum o průměru ε, a protože $\rho(p, \bigcup_{i \in J} A_i) > 0$, je $p \in \operatorname{Int} A$. P je tedy lokálně souvislé v bodě p.

II $\Rightarrow$ IV. Je-li P lokálně souvislé kontinuum, existuje ke každému $x \in P$ souvislé okolí $U(x)$ o průměru $< \varepsilon$. Protože P je kompaktní, existují podle Borelovy věty body $x_1, \dots, x_s$ tak, že $P = \bigcup_{i=1}^{s} U(x_i)$. Množiny $A_i = \overline{U(x_i)}$ jsou pak kontinua o průměrech $< \varepsilon$, jejichž sjednocením je P.

IV $\Rightarrow$ I. K důkazu budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení:

Lemma 5.1. *Nechť P má vlastnost IV. Pak pro každé kontinuum $C \subset P$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje kontinuum $K \subset U(C, \varepsilon)$, které obsahuje C a které lze pro každé $\eta > 0$ rozložit na konečný počet kontinuí o průměrech $< \eta$.*

D ů k a z . Podle předpokladu existuje konečná posloupnost $C(1), \dots, C(s)$ kontinuí, jejichž sjednocením je P a která mají průměry menší než $\frac{1}{4}\varepsilon$. Jistě lze předpokládat, že kontinua $C(i)$ byla očíslována tak, že $1 \le i \le s_1 \Rightarrow C \cap C(i) \neq \emptyset$, zatímco $s_1 < i \le s \Rightarrow C \cap C(i) = \emptyset$. Pak je

$$K_1 := \bigcup_{i=1}^{s_1} C(i) \tag{8_1}$$

kontinuum a $C \subset K_1 \subset U(C, \frac{1}{4}\varepsilon)$.

Jsou-li sestrojena kontinua $C(i_1, \dots, i_n)$ $(1 \le i_1 \le s_1, \dots, 1 \le i_n \le s_n)$ o průměrech $< \varepsilon/2^{n+1}$ a je-li

$$K_n := \bigcup_{i_1, \dots, i_n} C(i_1, \dots, i_n), \tag{8_n}$$

sestrojíme kontinua $C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$ $(1 \le i_{n+1} \le s_{n+1})$ takto: Rozložíme P na konečný počet kontinuí $X_1, \dots, X_r$ o průměrech $\varepsilon/2^{n+2}$ a pro každé kontinuum $C(i_1, \dots, i_n)$ najdeme všechna X_j, která $C(i_1, \dots, i_n)$ protínají; označíme je $C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$. Můžeme přitom předpokládat, že počet s_{n+1} kontinuí $C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$ je stejný pro všechna kontinua $C(i_1, \dots, i_n)$, protože nepředpokládáme, že jsou navzájem různá. Označíme-li pak $K_{n+1} := \bigcup_{i_1, \dots, i_n, i_{n+1}} C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$, je K_{n+1} kontinuum a $K_n \subset K_{n+1} \subset U(K_n, \varepsilon/2^{n+2})$.

Označme konečně

$$K_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n , \quad K := \overline{K_\infty} \tag{9}$$

a dokažme, že K je hledané kontinuum.

Indukcí dokážeme, že $C \subset K_n \subset U(C, \frac{1}{2}\varepsilon)$ pro každé n; z toho ihned plyne, že $C \subset K_\infty \subset U(C, \frac{1}{2}\varepsilon)$, takže $C \subset K \subset U(C, \varepsilon)$.

Buď dáno $\eta > 0$ a zvolme n tak, že $\varepsilon / 2^{n-1} < \eta$. Položíme-li

$$A(i_1, \dots, i_n) = \overline{C(i_1, \dots, i_n) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_{n+1}, \dots, i_{n+k}} C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_{n+k})}\,, \tag{10}$$

jsou množiny $A(i_1, \dots, i_n)$ kontinua, jejichž sjednocením je K, přičemž

$$\operatorname{diam} A(i_1, \dots, i_n) \le \operatorname{diam} C(i_1, \dots, i_n) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam} C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_{n+k}) < \eta\,. \tag{11}$$

Tím je lemma 5.1 dokázáno.

Lemma 5.2. *Je-li kontinuum P sjednocením neprázdných kontinuí $P_1, \dots, P_n$, existuje řetěz kontinuí $Q_1, \dots, Q_r$ tak, že každé Q_j je rovno některému P_i, každé P_i je rovno některému Q_j, přičemž $Q_1 = P_1$, $Q_r = P_n$.*

D ů k a z . Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tvrzení platí, je-li P sjednocením n (neprázdných) kontinuí, a předpokládejme, že P je sjednocení (neprázdných) kontinuí $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$. Podle předpokladu existuje řetěz $Q_1, \dots, Q_r$ kontinuí s nahoře uvedenými vlastnostmi. Protože P je souvislá množina, existuje k tak, že $Q_k \cap P_{n+1} \neq \emptyset$. Snadno pak nahlédneme, že posloupnost

$$Q_1, \dots, Q_r, Q_{r-1}, \dots, Q_k, P_{n+1}$$

je řetěz splňující všechny žádané podmínky.

Tím je dokázáno i lemma 5.2 a můžeme přikročit k důkazu implikace IV $\Rightarrow$ I; tím dokončíme důkaz věty 5.2.

Podle předpokladu existuje posloupnost $P(0), \dots, P(s)$ neprázdných kontinuí o průměrech < 1, jejichž sjednocením je kontinuum P. Podle lemmat 1 a 2 lze předpokládat, že každé z nich má vlastnost IV a že posloupnost $\{P(k)\}_{k=0}^{s}$ je řetěz; protože jej lze libovolně prodloužit tím, že $P(s+1), P(s+2), \dots$ definujeme jako $P(s)$, můžeme předpokládat, že počet členů posloupnosti je číslo tvaru $2^{n(1)}$, kde $n(1) \in \mathbb{N}$, tj. že posloupnost má tvar

$$P(0), P(1), \dots, P(2^{n(1)} - 1)\,. \tag{12}$$

Předpokládejme, že pro jisté $j \in \mathbb{N}$ a jisté $n(j) \in \mathbb{N}$ jsou sestrojena neprázdná kontinua

$$P(k_1, \dots, k_j)\,, \ \text{ kde } \ 0 \le k_m < 2^{n(j)} \ \text{ pro } \ m = 1, \dots, j\,, \tag{13}$$

jejichž sjednocením je P, která mají vlastnost IV a průměry $< 1/j$; předpokládejme konečně, že při lexikografickém uspořádání tvoří řetěz.

Pak existuje $n(j+1) \in \mathbb{N}$ a neprázdná kontinua

$$P(k_1, \dots, k_j, k_{j+1})\,, \ 0 \le k_{j+1} < 2^{n(j+1)}, \tag{14}$$

tak, že pro každou j-tici $(k_1, \dots, k_j)$ je

$$P(k_1, \dots, k_j) = \bigcup_{k_{j+1}} P(k_1, \dots, k_j, k_{j+1})\,, \tag{15}$$

že každé kontinuum (14) má vlastnost IV a průměr $< 1/(j+1)$, přičemž systém všech kontinuí (14) tvoří při lexikografickém uspořádání řetěz.

Z kontinuí $P(k_1, \dots, k_j)$, $j \in \mathbb{N}$, lze snadno vytvořit dyadický systém, který má všechny vlastnosti z definice 5.1:

Je-li $0 \le k_1 < 2^{n(1)}$, je

$$k_1 = \sum_{i=1}^{n(1)} 2^{n(1)-i} a(i)\,, \tag{16}$$

kde čísla $a(i) \in \{0, 1\}$ jsou jednoznačně určena číslem k_1. Platí-li rovnost (16), označme

$$A(a(1), a(2), \dots, a(n(1))) := P(k_1)\,. \tag{17}$$ [16])

[16]) V podstatě jsme tedy místo čísla k_1 napsaného dekadicky užili jeho dyadický zápis $a(1)a(2)\dots a(n(1))$ a pro větší přehlednost jsme mezi dyadické cifry napsali čárky. Místo P jsme napsali A, abychom vyloučili nedorozumění.

Definujme nyní

$$
\begin{aligned}
A(a(1),\dots,a(n(1)-1)) &:= \bigcup_{q(1)\in\{0,1\}} A(a(1),\dots,a(n(1)-1),q(1)),\\
A(a(1),\dots,a(n(1)-2)) &:= \bigcup_{\{q(2),q(1)\}\in\{0,1\}^2} A(a(1),\dots,a(n(1)-2),q(2),q(1)),\\
&\ \ \vdots\\
A(a(1),\dots,a(n(1)-k)) &:= \bigcup_{\{q(k),\dots,q(1)\}\in\{0,1\}^k} A(a(1),\dots,a(n(1)-k),q(k),\dots,q(1)),\\
&\ \ \vdots\\
A(a(1),a(2)) &:= \bigcup_{\{q(n(1)-2),\dots,q(1)\}\in\{0,1\}^{n(1)-2}} A(a(1),a(2),q(n(1)-2),\dots,q(1)).\\
A(a(1)) &:= \bigcup_{\{q(n(1)-1),\dots,q(1)\}\in\{0,1\}^{n(1)-1}} A(a(1),q(n(1)-1),\dots,q(1)).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Jinými slovy, čteme-li zdola nahoru: Množinu všech dyadických čísel od $00\dots0$ do $11\dots1$ jsme rozdělili na dva stejně početné úseky od $00\dots0$ do $011\dots1$ a od $10\dots0$ do $11\dots1$ a sjednocení všech množin $A(a(1),\dots,a(n(1)))$ odpovídajících prvnímu (resp. druhému) úseku jsme označili $A(0)$ (resp. $A(1)$). Pak jsme každý ze jmenovaných úseků rozdělili napůl a příslušná sjednocení množin $A(a(1),\dots,a(n(1)))$ jsme pojmenovali $A(0,0), A(0,1), A(1,0), A(1,1)$ atd.

Čísla k_2, pro něž je $0 \le k_2 < 2^{n(2)}$, napíšeme v dyadickém tvaru

$$k_2 = \sum_{i=1}^{n(2)} 2^{n(2)-i} a(n(1)+i), \tag{16'}$$

kde $a(n(1)+i) \in \{0,1\}$, položíme

$$A(a(1),\dots,a(n(1)),\dots,a(n(1)+n(2))) := P(k_1,k_2) \tag{17'}$$

a podobně jako jsme v (18) definovali množiny $A(a(1),\dots,a(k))$ pro $k=1,\dots,n(1)$, vytvoříme množiny $A(a(1),\dots,a(n(1)),a(n(1)+1)),\dots,a(n(1)+k))$ pro $k=1,\dots,n(2)$.

Pokračujeme-li takto dál, získáme žádaný dyadický systém z definice 5.1 (kde ovšem místo A napíšeme P).

Poznámka 5.2. Protože (neprázdná) lokálně souvislá kontinua jsou (podle právě dokázané věty) totožná se spojitými obrazy úseček, platí toto důležité tvrzení:

Věta 5.2. *Spojitý obraz lokálně souvislého kontinua je lokálně souvislé kontinuum.*

Poznámka 5.3. Z věty 5.1 a lemmatu 5.1 plyne ihned další tvrzení:

Věta 5.3. *Je-li P lokálně souvislé kontinuum a $C \subset P$ libovolné kontinuum, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ lokálně souvislé kontinuum $K \subset P$ tak, že $C \subset K \subset U(C,\varepsilon)$.*

Definice 5.2. Říkáme, že řetěz množin $A_0,\dots,A_s$ spojující body a,b je **ireducibilní**, jestliže nastane jedna z těchto situací:

1. $s=0$, $\{a,b\} \subset A_0$;
2. $s=1$, $a \in A_0 - A_1$, $b \in A_1 - A_0$;
3. $s>1$ a pro každé dva indexy i,j z $\{0,1,\dots,s\}$, pro něž je $|i-j|>1$, jsou množiny A_i, A_j disjunktní.

Poznámka 5.4. Řetěz $A_0,\dots,A_s$ je ireducibilním řetězem spojujícím body a,b, právě když platí: Je-li $0 \le i_1 < \dots < i_r \le s$ a $r<s$, není posloupnost $A_{i_1},\dots,A_{i_r}$ řetěz spojující body a,b.[17])

[17]) Buď to není řetěz, nebo nespojuje body a,b.

Lemma 5.3. *Každý řetěz $A_0, \dots, A_s$ množin spojující body a, b, obsahuje ireducibilní podřetěz spojující tyto body.*

D ů k a z . Je-li uvedený řetěz ireducibilní, není co dokazovat; není-li ireducibilní a je-li $s > 1$, existují indexy i, j tak, že $0 \le i < i + 1 < j \le s$ a že $A_i \cap A_j \ne \emptyset$. Vynecháme-li z původního řetězu množiny $A_{i+1}, \dots, A_{j-1}$, dostaneme řetěz $A_0^1, \dots, A_t^1$, který spojuje body a, b, ale je kratší než řetěz původní. Není-li tento kratší řetěz ireducibilní a je-li $t > 1$, lze opakovat operaci, kterou jsme zkrátili původní řetěz.

Po konečném počtu kroků dostaneme buď ireducibilní řetěz tvaru $A_0^m, \dots, A_u^m$, kde $u > 1$, který spojuje body a, b, nebo řetěz tvaru A_0^m, A_1^m, kde $a \in A_0^m$, $b \in A_1^m$. Tento řetěz je buď ireducibilní, nebo je $b \in A_0^m$ a vynecháme množinu A_1^m, nebo je $a \in A_1^m$, a vynecháme množinu A_0^m.

Lemma 5.4. *Je-li souvislý prostor P pokryt nějakým systémem $\mathfrak{S} = \{\Omega(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ oblastí, lze každé dva body a, b z P spojit ireducibilním řetězem*

$$\Omega(\alpha_0), \dots, \Omega(\alpha_s) \tag{19}$$

oblastí z $\mathfrak{S}$.

D ů k a z . Buď M množina všech bodů $x \in P$, které lze spojit s bodem a řetězem oblastí z $\mathfrak{S}$. Množina M je pak otevřená: Je-li $x \in M$, existuje řetěz tvaru (19), který spojuje body a, x; tentýž řetěz spojuje s bodem a i každý bod $y \in \Omega_{\alpha_s}$, takže $\Omega(\alpha_s) \subset M$.

Množina M je i uzavřená: Je-li $x \in \overline{M}$, existuje $\alpha \in A$ tak, že $x \in \Omega(\alpha)$; toto $\Omega(\alpha)$ obsahuje nějaký bod $y \in M$. Je-li (19) řetěz spojující body a, y, je $\Omega(\alpha_0), \dots, \Omega(\alpha_s), \Omega(\alpha)$ řetěz spojující body a, x, takže $x \in M$.

Protože každá oblast $\Omega(\alpha)$ obsahující bod a je řetězem spojujícím bod a s kterýmkoli bodem $x \in \Omega(\alpha)$, je $M \ne \emptyset$.

Protože prostor P je souvislý, je tedy $M = P$, tj. každý bod $b \in P$ lze spojit s bodem a řetězem oblastí z $\mathfrak{S}$. Abychom dokončili důkaz lemmatu 5.4, stačí už jen aplikovat lemma 5.3.

Definice 5.3. Říkáme, že řetěz $A_0, \dots, A_s$ (kde $s \ge 0$) vlastních kontinuí spojující body a, b je **regulární**, je-li ireducibilní a platí-li tyto dvě podmínky:

A. $a \in A_0$, $b \in A_s$;

B. $1 \le i \le s \Rightarrow A_{i-1} \cap A_i$ je jednobodová množina.

Věta 5.4. *Každé dva body $a \ne b$ lokálně souvislého kontinua P lze pro každé $\varepsilon > 0$ spojit regulárním řetězem lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< \varepsilon$.*

D ů k a z . Označme M množinu všech bodů, které lze s bodem a spojit uvedeným způsobem a ukažme nejdříve, že M je otevřená množina:

Je-li $x \in M$ a $\varepsilon > 0$, existuje regulární řetěz $A_0, \dots, A_s$ lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< \varepsilon$, který spojuje body a, x. Buď $\eta \in (0, \varepsilon - \operatorname{diam} A_s)$; podle důsledku 1 Janiszewského věty 4.1 a podle věty 5.3 existuje lokálně souvislé kontinuum K o průměru $< \eta$, obsahující bod x uvnitř a disjunktní s $A_0 \cup \ldots \cup A_{s-1}$. Posloupnost $A_0, \dots, A_s \cup K$ je pak regulární řetěz spojující bod a s každým bodem $y \in \operatorname{Int} K$; $\operatorname{Int} K$ je tedy okolí bodu x obsažené v M.

Dokažme, že množina M je uzavřená: Nechť $x \in \overline{M}$ a nechť K je lokálně souvislé kontinuum, pro něž je $x \in \operatorname{Int} K$, $\operatorname{diam} K < \varepsilon$; zvolme pevně bod $y \in M \cap \operatorname{Int} K$. Pak existuje regulární řetěz lokálně souvislých kontinuí $A_0, \dots, A_s$ spojující body a, y, přičemž $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ pro $i = 0, \dots, s$. Nechť k je nejmenší index, pro nějž je $K \cap A_k \ne \emptyset$. Je buď $x \in A_k$, a tedy $x \in M$, nebo je $x \in K - A_k$. V tom případě nechť f je spojité zobrazení $\langle 0, 1 \rangle$ na K (srov. s větou 5.1) a $u \in \langle 0, 1 \rangle$ takové číslo, že $x = f(u)$. Množina $f_{-1}(A_k)$ je uzavřená v $\langle 0, 1 \rangle$ a neobsahuje u; u leží tedy v některém styčném intervalu (v_1, v_2) k této množině. Označíme-li $A_{k+1}^* = f(\langle v_1, u \rangle)$, je A_{k+1}^* lokálně souvislé kontinuum obsahující bod x a mající s A_k jediný společný bod $f(v_1)$. Protože $A_{k+1}^* \subset K$, je $A_{k+1}^* \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}) = \emptyset$ a $\operatorname{diam} A_{k+1}^* < \varepsilon$. Systém kontinuí $A_1, \dots, A_k, A_{k+1}^*$ je regulární řetěz lokálně souvislých kontinuí průměru $< \varepsilon$, spojující a a x. Je tedy $x \in M$.

Protože množina M je zřejmě neprázdná, je $M = P$ a věta 5.4 je dokázána.

Věta 5.5. (Mazurkiewicz – Moore – Menger.) *Je-li P lokálně souvislé kontinuum, lze každé dva různé body a, b z P spojit obloukem ležícím v P.* [18])

[18]) Prostory, v nichž lze každé dva různé body spojit obloukem, se nazývají *obloukově souvislé* (*arcwise connected*).

D ů k a z . Spojme v P (podle předcházející věty) body a a b regulárním řetězem Ř(1) lokálně souvislých kontinuí

$$A^1(0), A^1(1), \dots, A^1(s_1) \tag{20_1}$$

o průměrech < 1 a označme $p^1(i) := A^1(i-1) \cap A^1(i)$ pro $i = 1, \dots, s_1$.

Je-li pro některé $n \in \mathbb{N}$ sestrojen regulární řetěz Ř(n) lokálně souvislých kontinuí

$$A^n(0), A^n(1), \dots, A^n(s_n) \tag{20_n}$$

o průměrech $< 1/n$, který spojuje body a, b, označme $p^n(i) := A^n(i-1) \cap A^n(i)$ pro $i = 1, \dots, s_n$ a sestrojme řetěz Ř$(n+1)$ spojením $s_n + 1$ dílčích regulárních řetězů lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< 1/(n+1)$ takto:

Řetěz $A^{n+1}(0), \dots, A^{n+1}(r_1)$ spojuje body $a, p^n(1)$ v kontinuu $A^n(0)$,
řetěz $A^{n+1}(r_1+1), \dots, A^{n+1}(r_2)$ spojuje body $p^n(1), p^n(2)$ v kontinuu $A^n(1)$,
....
řetěz $A^{n+1}(r_{s_n}+1), \dots, A^{n+1}(s_{n+1})$ spojuje body $p^n(s_n), b$ v kontinuu $A^n(s_n)$.

Spojením těchto řetězů získáme regulární řetěz

$$A^{n+1}(0), \dots, A^{n+1}(r_1), A^{n+1}(r_1+1) \dots, A^{n+1}(r_2), \dots, A^{n+1}(r_{s_n}+1), \dots, A^{n+1}(s_{n+1}) \tag{20_{n+1}}$$

lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< 1/(n+1)$, který spojuje body a, b.

Označíme-li

$$A^{(n)} = \bigcup_{i=0}^{s_n} A^n(i) \tag{21}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, je $A^{(n)}$ lokálně souvislé kontinuum, přičemž $A^{(n+1)} \subset A^{(n)}$. Dokažme, že *množina*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \tag{22}$$

je oblouk ab:

Podle poznámky 4.2 je C kontinuum. Z konstrukce je zřejmé, že každý bod $p^n(i)$ leží v každé z množin $A^{(k)}$, tedy i v C. Protože bod $p^n(i)$ roztíná $A^{(n)}$ mezi body a, b, roztíná i kontinuum C mezi těmito body.

Množina M všech bodů p_i^n $(i = 1, \dots, s_n, n \in \mathbb{N})$ je zřejmě hustá v C. Dokážeme-li, že kontinuum C je lokálně souvislé, bude naše tvrzení dokázáno, neboť podle věty 3.3 je pak množina $S(a,b) \cup a \cup b$ kompaktní, a tedy splývá s C, protože obsahuje hustou množinu M; odtud pak z věty 3.4 plyne, že C je oblouk.

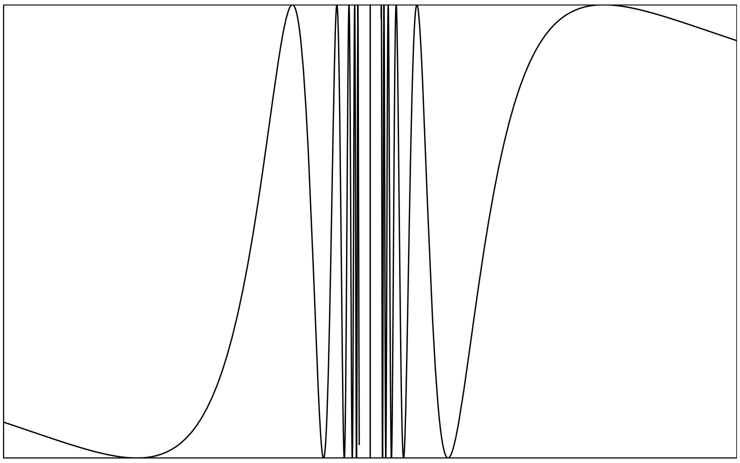
Lokální souvislost C však plyne z věty 5.2, protože řetězy (20_n) lze modifikovat podobně jako v důkazu této věty, část IV $\Rightarrow$ I, tj. lze z nich utvořit dyadický systém s nezměněnými množinami $A^{(n)}$, tedy se stejnou množinou C.

Poznámka 5.5. Větu 5.5 nelze obrátit. Existují kontinua, která nejsou lokálně souvislá a v nichž lze každé dva různé body spojit obloukem. Příkladem takového kontinua je sjednocení uzávěru grafu funkce $\sin(1/x)$, $0 < |x| \le 1$, s hranicí čtverce $\langle -1, 1\rangle^2$. (Viz obr. 12.)

Naproti tomu platí:

Věta 5.6. *K tomu, aby kontinuum P bylo lokálně souvislé, je nutné a stačí, aby pro každý bod $x \in P$ a pro každé jeho okolí $U(x)$ existovalo okolí $V(x)$ tak, že každý bod $y \in V(x) - x$ lze spojit s bodem x obloukem $C_y \subset U(x)$.*

D ů k a z . Je zřejmé, že z podmínky vyslovené ve větě plyne lokální souvislost kontinua P. Podmínka je však i nutná, protože každý bod lokálně souvislého kontinua P je (podle důsledku 1 Janiszewského věty 4.1 a podle vět 5.3 a 5.5) obsažen uvnitř libovolně malých lokálně souvislých kontinuí $K \subset P$.



Obr. 12; z technických důvodů nejsou na osách stejná měřítka