6. Ireducibilní a nerozložitelná kontinua

Definice 6.1. Množina F se nazývá **ireducibilní vzhledem k množinovému systému** $\mathfrak{S}$, je-li $F \in \mathfrak{S}$ a platí-li implikace

$$X \subsetneq F \Rightarrow X \notin \mathfrak{S}. \tag{1}$$

Věta 6.1. (Brouwerova redukční věta.) *Nechť P je prostor se spočetnou bází a nechť $\mathfrak{S}$ je množinový systém s těmito vlastnostmi:*

1. *Každá množina $F \in \mathfrak{S}$ je uzavřenou podmnožinou prostoru P.*
2. *Je-li $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost množin z $\mathfrak{S}$, je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{S}$.*

Pak každá množina $F \in \mathfrak{S}$ obsahuje množinu F^* ireducibilní vzhledem k systému $\mathfrak{S}$.

Důkaz. Nechť $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ je báze P a nechť $F \in \mathfrak{S}$. Položme $F_0 = F$ a předpokládejme, že pro některé $n \in \mathbb{N}$ je již sestrojena množina F_{n-1}. Mohou nastat jen dvě situace:

A. Existuje množina $H \in \mathfrak{S}$ tak, že $H \subset F_{n-1} - U_n$; pak jednu takovou množinu H vybereme a položíme $F_n = H$.

B. Žádná množina $H \in \mathfrak{S}$ splňující podmínku $H \subset F_{n-1} - U_n$, neexistuje; pak položíme $F_n = F_{n-1}$.

Dokažme, že množina

$$F^* := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \tag{2}$$

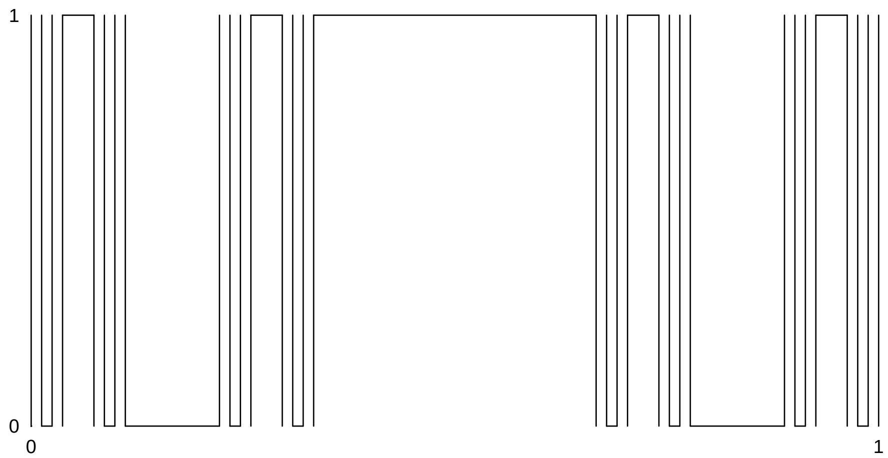
je pak hledaná ireducibilní množina:

Protože uzavřené množiny F_n tvoří nerostoucí posloupnost, je $F^* \in \mathfrak{S}$ podle předpokladu 2 věty; navíc je $F^* \subset F$. Předpokládejme, že nějaká množina $X \subsetneq F^*$ je prvkem $\mathfrak{S}$; protože X je pak uzavřená množina, existuje U_n tak, že $U_n \cap F^* \neq \emptyset = U_n \cap X$. Z toho plyne, že $X \subset F^* - U_n \subset F_{n-1} - U_n$, takže (podle pravidla A konstrukce) je $F_n \cap U_n = \emptyset$. Tím spíše je tedy $F^* \cap U_n = \emptyset$ – spor.

Definice 6.2. Jsou-li a, b dva různé body kontinua P, říkáme, že P je **ireducibilní mezi body** a, b, neexistuje-li žádné kontinuum $K \subsetneq P$ obsahující oba body a, b. Říkáme, že **kontinuum** P **je ireducibilní**, existují-li v P dva různé body, mezi nimiž je P ireducibilní. [19])

Příklady 6.1. 1. Kontinuum složené z úsečky u s krajními body $(0, \pm 1)$ a z grafu funkce $\sin(1/x)$, $x \in (0, 1\rangle$ je ireducibilní mezi bodem $(1, \sin 1)$ a kterýmkoli bodem úsečky u.

2. Kontinuum z příkladu 4.4 (obr. 8) je ireducibilní mezi počátkem a kterýmkoli bodem jednotkové kružnice.



Obr. 13

[19]) Oba pojmy jsou topologické.

3. Nechť Δ je Cantorovo diskontinuum a $J(i_1, \dots, i_n)$, $n \geq 0$, nechť jsou jeho (omezené) styčné intervaly. P nechť je sjednocení všech úseček $\langle (x,0); (x,1) \rangle$, kde $x \in \Delta$, s úsečkami $\langle (a,1); (b,1) \rangle$, kde $(a,b) = J(i_1, \dots, i_n)$, n sudé, a s úsečkami $\langle (a,0); (b,0) \rangle$, kde $(a,b) = J(i_1, \dots, i_n)$, n liché. Pak je P kontinuum ireducibilní mezi každými dvěma body $A \in \langle (0,0); (0,1) \rangle$, $B \in \langle (1,0); (1,1) \rangle$. Viz obr. 13.

Věta 6.2. *Pro každé kontinuum P obsahující body $a \neq b$ existuje kontinuum $K \subset P$ ireducibilní mezi a, b.*

D ů k a z . Stačí aplikovat Brouwerovu redukční větu 6.1, v níž za $\mathfrak{S}$ zvolíme systém všech kontinuí $K \subset P$ obsahujících množinu $\{a, b\}$. Podmínka 2 této věty platí, protože průnik nerostoucí posloupnosti kontinuí (obsahujících body a, b) je kontinuum (obsahující body a, b).

Věta 6.3. *Žádné kontinuum P ireducibilní mezi body a, b není sjednocením dvou kontinuí A, B obsahujících bod a a různých od P.*

D ů k a z . Kdyby kontinuum P bylo sjednocením kontinuí A, B různých od P a obsahujících bod a, ležel by bod b v jednom z kontinuí A, B, což vzhledem k předpokladu $A \neq P \neq B$ odporuje ireducibilitě kontinua P mezi body a, b.

Věta 6.4. *Nechť P je kontinuum ireducibilní mezi body a, b a nechť $C \subset P$ je kontinuum; pak platí:*

1. *Obsahuje-li kontinuum C jeden bodů a, b, je $P - C$ souvislá množina.*

2. *Je-li množina $P - C$ nesouvislá, je sjednocením dvou disjunktních oblastí, z nichž jedna obsahuje bod a, druhá bod b.*

D ů k a z . Ad 1. Je-li množina $P - C$ nesouvislá, existuje rozklad $P - C = A \cup B$ na dvě disjunktní, otevřené a neprázdné množiny A, B. Množiny $A \cup C$, $B \cup C$ jsou pak podle věty 2.2 kontinua; obě jsou neprázdná, různá od P a jejich sjednocením je P. Podle věty 6.3 leží bod a jen v jedné z nich, takže nemůže ležet v C. Protože ve větě 6.3 můžeme místo a napsat b, neleží v C ani bod b.

Ad 2. Jeden z bodů a, b leží tedy v A, druhý v B, a označení lze jistě zvolit tak, že $a \in A$, $b \in B$. Protože $A \cup C$ je kontinuum obsahující bod a, plyne z první části věty, v níž C nahradíme množinou $A \cup C$, že (otevřená) množina $P - (A \cup C) = B$ je souvislá; z podobných důvodů platí totéž o množině A.

Věta 6.5. *K tomu, aby kontinuum K bylo obloukem ab, je nutné a stačí, aby bylo lokálně souvislé a ireducibilní mezi a, b.*

D ů k a z . Pro oblouk ab je podmínka zřejmě splněna. Je-li K lokálně souvislé kontinuum, lze body a, b podle věty 5.5 spojit obloukem $C \subset K$. Protože K je ireducibilní mezi a, b, je $C = K$.

Věta 6.6. *Je-li P ireducibilní kontinuum a bod $p \in P$ leží v nějakém kontinuu kondenzace $K \subset P$, není kontinuum P lokálně souvislé v bodě p.*[20])

D ů k a z . Nechť P je ireducibilní mezi body a, b. Jsou dvě možnosti: 1. $a \neq p \neq b$, 2. $p \in \{a, b\}$.

Ad 1. Můžeme navíc předpokládat, že $K \subset P - \{a, b\}$, neboť podle důsledku 1 Janiszewského věty 4.1 lze K v případě potřeby patřičně zmenšit. Označíme-li

$$A = \operatorname{konst}_a(P - K), \quad B = \operatorname{konst}_b(P - K), \tag{3}$$

je (podle věty 4.1)

$$\overline{A} \cap K \neq \emptyset \neq \overline{B} \cap K, \tag{4}$$

takže $\overline{A} \cup K \cup \overline{B} \subset P$ je kontinuum; protože obsahuje body a, b (mezi nimiž je P ireducibilní), je identické s P. Protože $P - K \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ a protože K je řídké v P, plyne z toho, že $P = \overline{P - K} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \subset P$, takže

$$P = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{5}$$

1a. Vyšetřme nejdříve případ, kdy $p \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap K$, a předpokládejme, že P je lokálně souvislé v bodě p. Buď $U(p)$ tak malé, že $K - \overline{U(p)} \neq \emptyset$, a nechť $C := \overline{\operatorname{komp}_p U(p)}$. Pak je C kontinuum obsahující bod p uvnitř a $K - C \neq \emptyset$. Protože $p \in \overline{A} \cap \overline{B}$, je $A \cap \operatorname{Int} C \neq \emptyset \neq B \cap \operatorname{Int} C$, a z definice konstituanty plyne existence kontinuí $K_1 \subset A$, $K_2 \subset B$, pro něž je $a \in K_1$, $b \in K_2$, $K_1 \cap \operatorname{Int} C \neq \emptyset \neq K_2 \cap \operatorname{Int} C$. Množina $K_1 \cup C \cup K_2 \subset P$ je pak kontinuum obsahující body a, b, a protože P je mezi těmito body ireducibilní, je

[20]) Podle věty 4.7 pak bod p leží na nějakém kontinuu konvergence kontinua P.

$K_1 \cup C \cup K_2 = P$. To však je spor, protože množiny A, B, a tím spíše kontinua K_1, K_2, jsou disjunktní s K, takže $K - (K_1 \cup C \cup K_2) = K - C \neq \emptyset$.

1b. Předpokládejme nyní, že $p \in \overline{A} \cap K - \overline{B}$; případ $p \in \overline{B} \cap K - \overline{A}$ je zcela analogický. Číslo $\rho := \frac{1}{2}\rho(p, \overline{B})$ je pak kladné a množina $K_0 := \operatorname{komp}_p(K \cap \overline{U(p,\rho)})$ je podle Janiszewského věty 4.1 vlastní kontinuum obsahující bod p a disjunktní s $\overline{B}$.

Předpokládejme, že kontinuum P je lokálně souvislé v bodě p. Pak existuje kontinuum C tak, že $p \in \operatorname{Int} C$, $K_0 - C \neq \emptyset$. Podle definice množiny A existuje kontinuum $K_1 \subset A$ obsahující spolu s bodem a i nějaký bod $x \in A \cap \operatorname{Int} C$. Množina $K_1 \cup C \cup K \cup \overline{B} \subset P$ je kontinuum obsahující oba body a, b, protože každá z množin K_1, C, K, $\overline{B}$ je kontinuum a $a \in K_1$, $x \in K_1 \cap C$, $p \in C \cap K$, $K \cap \overline{B}$, $b \in B$. Protože P je ireducibilní mezi body a, b, je $K_1 \cup C \cup K \cup \overline{B} = P$. Kdyby otevřená množina $P - (K_1 \cup C \cup \overline{B}) \subset K$ byla neprázdná, měla by množina K vnitřní body, což odporuje její řídkosti; je tedy $K_1 \cup C \cup \overline{B} = P$. Protože $K_0 \cap K_1 \subset K_0 \cap A = \emptyset$ a $K_0 \cap \overline{B} = \emptyset$, je

$$\emptyset = K_0 - P = K_0 - (K_1 \cup C \cup \overline{B}) = K_0 - C \neq \emptyset,$$

což je spor.

Tím je věta dokázána za dodatečného předpokladu, že $a \neq p \neq b$.

Ad 2. Je-li např. $p = a$, lze předpokládat, že $b \notin K$. Protože $\overline{B} \cap K \neq \emptyset$, je $\overline{B} \cup K$ kontinuum obsahující body $a = p$ a b, a je tedy identické s P. Kdyby byla otevřená množina $P - \overline{B} \subset K$ neprázdná, obsahovalo by kontinuum K vnitřní body; je tedy $P = \overline{B}$. Je-li kontinuum P lokálně souvislé v bodě $p = a$, existuje kontinuum C tak, že $a \in \operatorname{Int} C$, $K - C \neq \emptyset$. Protože $B \cap \operatorname{Int} C \neq \emptyset$, existuje kontinuum $K_2 \subset B$ tak, že $b \in K_2$, $K_2 \cap \operatorname{Int} C \neq \emptyset$. Kontinuum $K_2 \cup C$ obsahuje pak oba body a, b, a rovná se tedy P. Protože $K \cap K_2 = \emptyset$, je $\emptyset = K - P = K - (K_2 \cup C) = K - C \neq \emptyset$, což je spor.

Tím je důkaz věty 6.6 dokončen.

Věta 6.7. *Je-li P kontinuum, jsou ekvivalentní tyto tři podmínky:*

1. *P je oblouk.*
2. *P je ireducibilní a neobsahuje žádné kontinuum kondenzace.*
3. *P je ireducibilní a neobsahuje žádné kontinuum konvergence.*

D ů k a z . $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. Je-li P oblouk, je ireducibilní (mezi svými krajními body) a neobsahuje zřejmě žádné řídké vlastní kontinuum, tedy žádné kontinuum kondenzace; tím spíše neobsahuje žádné kontinuum konvergence.

$3 \Rightarrow 1$. Je-li P ireducibilní a neobsahuje žádné kontinuum konvergence, je podle věty 4.9 (dědičně) lokálně souvislé, a je tedy podle věty 6.5 obloukem.

* * *

Definice 6.3. Říkáme, že kontinuum P je **nerozložitelné**, je-li vlastní a má-li tuto vlastnost: Jsou-li K_1, K_2 kontinua, pro něž je $K_1 \cup K_2 = P$, je buď $K_1 = P$, nebo $K_2 = P$.

Poznámka 6.1. *Je-li P nerozložitelné kontinuum, je doplněk $P - K$ každého kontinua $K \subset P$ souvislý.* Kdyby totiž bylo $P - K = A \cup B$, kde A, B jsou disjunktní neprázdné otevřené množiny, byl by $P = (A \cup K) \cup (B \cup K)$ rozklad P na dvě kontinua (srov. s větou 2.2), z nichž žádné se nerovná P.

Definice 6.4. Je-li P kontinuum, nazveme **kompozantou bodu** p **v** P množinu $R_p(P)$ všech bodů $x \in P$, pro něž je P reducibilní mezi p a x. (Jinými slovy: $x \in R_p(P)$, *právě když existuje kontinuum $K_{px} \subsetneq P$ obsahující body p, x.*)

Poznámka 6.2. Doplněk $P - R_p(P)$ kompozanty $R_p(P)$ je identický s množinou všech bodů $q \in P$, pro něž je P ireducibilní mezi p, q. Kompozanta $R_p(P)$ je (jakožto sjednocení jistého systému kontinuí majících společný bod p) souvislá, takže $\overline{R_p(P)}$ *je kontinuum.*

Příklady 6.2. 1. Je-li P oblouk pq je $R_p(P) = P - q$, $R_q(P) = P - p$, $R_x(P) = P$ pro každé $x \in P - \{p, q\}$.

2. Je-li P topologická kružnice, je $R_p(P) = P$ pro každé $p \in P$.

3. Označme

$$us := \langle (0,-1); 0,1) \rangle, \ si := \{(x, \sin(1/x));\ x \in (0,1\rangle\}, \ b := (1, \sin 1)$$

a nechť $P := si \cup us$. Pak je $R_p(P) = P - b$ pro každé $p \in us$ a $R_p(P) = si$ pro každé $p \in si$.

Věta 6.8. *Pro každé vlastní kontinuum P a pro každý bod $p \in P$ je kompozanta $R_p(P)$ hustá v P a existují kontinua $K_n \subsetneq P$ tak, že*

$$R_p(P) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \,. \tag{6}$$

D ů k a z . 1. Zvolme v P nějakou bázi $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprázdných množin U_n a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $V_n := U_n - p$ a

$$K_n := \operatorname{komp}_p(P - V_n). \tag{7}$$

Každá s množin K_n je pak kontinuum různé od P a obsahující bod p, takže $K_n \subset R_p(P)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$; pravá strana rovnosti (6) je tedy částí její levé strany.

Obráceně: Je-li $x \in R_p(P)$, $x \neq p$, existuje kontinuum $K_{px} \subsetneq P$ obsahující body p a x. Je-li $y \in P - K_{px}$, existuje V_n tak, že $y \in V_n \subset P - K_{px}$. Potom však je $K_{px} \subset \operatorname{komp}_p(P - V_n) = K_n$, takže levá strana rovnosti (6) je obsažena v její pravé straně. Tím je rovnost (6) dokázána.

2. Kdyby kontinuum $\overline{R_p(P)}$ nebylo rovno celému P, existovalo by podle důsledku 2 Janiszewského věty 4.1 kontinuum K tak, že $\overline{R_p(P)} \subsetneq K \subsetneq P$, a P by pak bylo reducibilní mezi p a každým bodem $x \in K - R_p(P)$, což je ve sporu s definicí $R_p(P)$.

Věta 6.9. *Je-li C kompozanta kontinua P, je množina $P - C$ souvislá.*

D ů k a z . Podle předpokladu je $C = R_p(P)$ pro vhodné $p \in P$. Stačí vyšetřit případ, kdy $C \neq P$, tj. kdy existuje bod $q \in P$ tak, že P je ireducibilní mezi p, q.

Předpokládejme, že $P - C = M \cup N$, kde M, N jsou neprázdné oddělené množiny, jejichž označení je zvoleno tak, že $q \in M$. Z oddělenosti množin M, N (a z normality metrických prostorů) plyne existence otevřené množiny $G \supset M$, jejíž uzávěr je disjunktní s N. Pak je $H(G) \cap (M \cup N) = (\overline{G} - G) \cap (M \cup N) = \emptyset$, takže $H(G) \subset C$. Označíme-li $K := \operatorname{komp}_q \overline{G}$, plyne z podmínek $N \neq \emptyset$, $\overline{G} \cap N = \emptyset$, že $G \neq P$; podle Janiszewského věty 4.1 je tedy $K \cap H(G) \neq \emptyset$. Zvolíme-li v této množině bod a, je $a \in C$, takže existuje kontinuum $Q \subset C$ obsahující body p, a. Protože kontinuum K obsahuje body q, a, je $Q \cup K$ kontinuum obsahující body p, q. Protože P je mezi těmito body ireducibilní, je $Q \cup K = P$, takže $N \subset Q \cup K$; to spolu s implikacemi

$$Q \subset C \Rightarrow Q \cap N \subset C \cap N = \emptyset, \quad K \subset \overline{G},\ \overline{G} \cap N = \emptyset \Rightarrow K \cap N = \emptyset$$

ukazuje, že $N = \emptyset$, což je spor, který dokazuje větu 6.9.

Věta 6.10. *K tomu, aby vlastní kontinuum P bylo nerozložitelné, je nutné a stačí, aby každé kontinuum $K \subsetneq P$ bylo řídké v P.*

D ů k a z . 1. Předpokládejme, že každé kontinuum $K \subset P$ různé od P je v P řídké a nechť $P = K_1 \cup K_2$, kde K_1, K_2 jsou kontinua; máme dokázat, že pak je buď $K_1 = P$, nebo $K_2 = P$. Je-li však $K_1 \neq P$, je K_1 podle předpokladu řídké v P, z čehož plyne, že $K_2 = P$.

2. Nechť naopak existuje kontinuum $K \subsetneq P$, které není v P řídké (takže $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$); máme dokázat, že P lze pak rozložit na dvě kontinua, z nichž žádné není identické s P.

Je-li množina $P - K$ souvislá, je $\overline{P - K}$ kontinuum disjunktní s $\operatorname{Int} K$, tedy různé od P. Hledaným rozkladem je tedy rozklad $P = K \cup \overline{P - K}$.

Není-li množina $P - K$ souvislá, je $P - K = A \cup B$, kde A, B jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny. Podle věty 2.2 jsou množiny $K_1 := A \cup K$, $K_2 := B \cup K$ kontinua, přičemž $K_1 \neq P \neq K_2$. Hledaným rozkladem je proto rozklad $P = K_1 \cup K_2$.

Věta 6.11. *Je-li P nerozložitelné kontinuum, platí tato tvrzení:*

1. *Pro každé dva body p, q z P je*

$$\text{buď } R_p(P) = R_q(P), \text{ nebo } R_p(P) \cap R_q(P) = \emptyset. \tag{8}$$

2. *Systém všech kompozant kontinua P je nespočetný.*

3. *Existuje nespočetná množina $M \subset P$ tak, že P je ireducibilní mezi každými dvěma body $x \neq y$ z M.*

Obráceně:

4. *Obsahuje-li ireducibilní kontinuum P dvě disjunktní kompozanty, je nerozložitelné.*

5. *Obsahuje-li kontinuum P alespoň tři různé body x, y, z tak, že P je ireducibilní mezi x, y, mezi x, z i mezi y, z, je P nerozložitelné.*

D ů k a z . 1. Předpokládejme, že $R_p(P) \cap R_q(P) \neq \emptyset$, a dokažme nejdříve inkluzi

$$R_p(P) \subset R_q(P) . \tag{9}$$

Je-li $y \in R_p(P)$, je P reducibilní mezi body p, y, a existuje tedy kontinuum $K_{py} \subsetneq P$ obsahující tyto body. Zvolíme-li pevně nějaký bod $x \in R_p(P) \cap R_q(P)$, existuje kontinuum $K_{px} \subsetneq P$ obsahující body p, x a kontinuum $K_{qx} \subsetneq P$ obsahující body q, x. Množina $K_{qy} := K_{qx} \cup K_{px} \cup K_{py}$ je pak kontinuum obsahující body q, y; protože žádné z kontinuí vpravo není rovné P, je podle věty 6.10 řídké v P, a totéž tedy platí i o K_{qy}. Je proto $K_{qy} \neq P$ a bod y tedy leží v $R_q(P)$. Inkluze (9) je dokázána.

Protože obrácenou inkluzi dostaneme záměnou bodů p, q, je $R_p(P) = R_q(P)$. Tím je tvrzení 1 dokázáno.

2. Podle věty 6.8 je každá kompozanta $R_p(P)$ sjednocením spočetně mnoha kontinuí $K_n \neq P$, tedy (podle věty 6.10) kontinuí řídkých v P. Každá kompozanta je tedy množinou 1. kategorie. Protože P je 2. kategorie a protože je sjednocením všech svých kompozant, musí být těchto kompozant nespočetně mnoho.

3. Hledanou množinou je zřejmě množina M, která má s každou kompozantou společný právě jeden bod.

4. Dokažme, že *je-li rozložitelné kontinuum P ireducibilní mezi body $a \neq b$, nejsou žádné dvě kompozanty kontinua P disjunktní.*

Předpokládáme, že existují kontinua K_1, K_2 tak, že $K_1 \neq P \neq K_2$ a $K_1 \cup K_2 = P$; protože P je kontinuum, je $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Oba body a, b neleží v jedné z množin K_1, K_2, protože P je mezi nimi body a, b ireducibilní; zvolme označení tak, že $a \in K_1$, $b \in K_2$. Nechť p, q jsou (libovolné) dva body z P a nechť $C_1 := R_p(P)$, $C_2 := R_q(P)$ jsou příslušné kompozanty. Je-li označení zvoleno tak, že $p \in K_1$, je $K_1 \subset C_1$.

Je-li $q \in K_1$, je $K_1 \subset C_2$, takže $\emptyset \neq K_1 \subset C_1 \cap C_2$. Je-li $q \in K_2$, je $K_2 \subset C_2$ a $\emptyset \neq K_1 \cap K_2 \subset C_1 \cap C_2$.

5. Předpokládejme opět, že P je rozložitelné a užívejme označení ze 4. části důkazu. Jsou-li x, y, z tři různé body z P, leží aspoň dva z nich v jedné z množin K_i, z čehož plyne, že P je mezi těmito dvěma body reducibilní.

Poznámka 6.3. Zatím nevíme, zdali nerozložitelná kontinua vůbec existují; předcházející dvě věty naznačují, že pokud ano, budou mít asi velmi složitou strukturu. Jedno z nejjednodušších nerozložitelných kontinuí sestrojil polský matematik B. Knaster (Fundamenta Mathematicae 3, 1922, str. 209); popíšeme zde jeho konstrukci a nakreslíme velmi neúplný obrázek jedné kompozanty tohoto kontinua.

Knasterovo nerozložitelné kontinuum je sjednocením všech půlkružnic

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = r^2 , \quad y \geq 0 ,$$

jejichž krajní body leží v Cantorově diskontinuu a všech půlkružnic

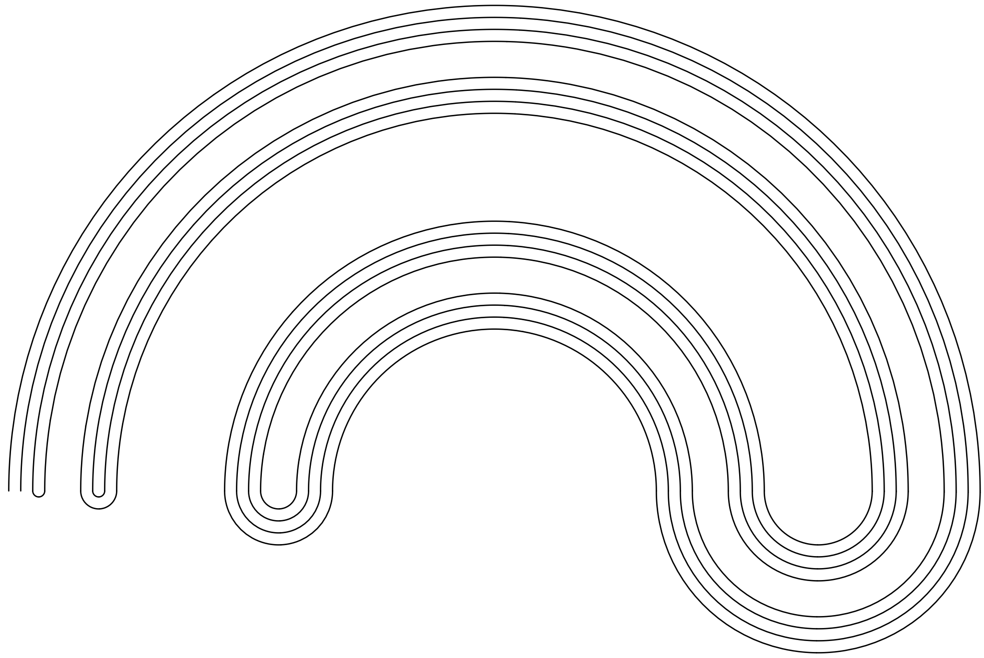
$$\left(x - \frac{5}{2 \cdot 3^n}\right)^2 + y^2 = r^2 , \quad y \leq 0 ,$$

jejichž krajní body leží v Cantorově diskontinuu a zároveň v intervalu $\langle 2/3^n, 1/3^{n-1} \rangle$. (Viz [2], str. 143.) Malá část jeho kompozanty, která prochází všemi body 1. druhu Cantorova diskontinua, je nakreslena na obr. 14. Knasterovo kontinuum obsahuje ovšem podobných kompozant, z nichž žádná již neobsahuje žádný bod 1. druhu, nespočetně mnoho.

Knaster však v témže ročníku 3 časopisu Fundamenta Mathematicae (str. 247) nabídl ještě daleko komplikovanější *dědičně nerozložitelné kontinuum*, tedy kontinuum, jehož žádné vlastní subkontinuum není rozložitelné. Takové kontinuum neobsahuje žádný oblouk, protože oblouk je rozložitelný.

Poznamenejme však, že situace je ještě „*mnohem, mnohem horší, než by se zdálo*“: Lze ukázat, že v prostoru všech neprázdných kontinuí obsažených např. ve čtverci $Q := \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ je funkce

$$\mathrm{d}(A, B) := \max(\max(\{\rho(x, B);\ x \in A\}), \max(\{\rho(y, A);\ y \in B\}))$$



Obr. 14. Nepatrná část Knasterova nerozložitelného kontinua

metrikou.

Polský matematik S. Mazurkiewicz dokázal (Fund. Math. 16 (1930), str. 151), že *při této metrice je množina všech dědičně nerozložitelných kontinuí obsažených v Q množinou* 2. *kategorie a typu* G_δ.

Jak poznamenává Kuratowski (srov. [2], str.145), *je paradoxní, že nejsingulárnější kontinua jsou mezi kontinuy nejčastější.*