7. Pojem křivky

Úmluva. *Všechny metrické prostory, které budeme v dalším vyšetřovat, mají spočetnou bázi.*

Jak se ukazuje, slovo „křivka“ má v různých matematických disciplínách různý význam, protože každá disciplína definici přizpůsobuje svým specifickým potřebám. V elementární analytické geometrii se mezi křivky počítají kuželosečky a další křivky vzniklé zpravidla jistými jednoduchými geometrickými operacemi: lemniskata a obecněji Cassiniho křivky vznikají podobným způsobem jako elipsa, na základě elementárních geometrických úvah vznikají např. epicykloidy a hypocykloidy (např. kardioida a asteroida), různé závitnice a spirály atd. Některé křivky jsou souvislé, jiné nesouvislé (jako hyperbola); některé jsou kompaktní (kružnice, elipsa, lemniskata), jiné ne (parabola, Archimedova spirála). Pokud je mi známo, obecnou definici křivky analytická geometrie neposkytuje.

Ve fyzice se křivkou často nazývá trajektorie pohybujícího se bodu a např. silokřivka má slovo křivka přímo v názvu. Protože křivka definovaná jako spojitý obraz kompaktního jednorozměrného intervalu může být i čtverec (s vnitřkem), je k požadavku spojitosti pohybu zřejmě nutné přidat další vhodné předpoklady.

Obecná topologie zkoumá křivky jako bodové množiny s jistými vlastnostmi. Velmi obecná je Menger - Urysonova definice a jednoduchá je i Cantorova definice rovinné křivky; budeme o nich mluvit později. Definic můžeme ovšem vyslovit celou řadu podle toho, jaké vlastnosti preferujeme nebo potřebujeme.

Základním požadavkem v topologii je, aby křivka byla množina topologicky invariantní. Dali bychom asi také přednost definicím, které operují jen s „vnitřními“ vlastnostmi příslušné množiny, před definicemi založenými na jejích „vnějších“ vlastnostech, tedy – zhruba řečeno – na vztazích množiny a prostoru, v němž tato množina leží. Každá množina má své „globální“ („integrální“) vlastnosti a vlastnosti lokální. Protože nám v dalším půjde spíše o lokální vlastnosti, nebude podstatným omezením, budeme-li se zabývat jen kontinuy, místo abychom studovali např. prostory, které se dají rozložit na konečně mnoho uzavřených souvislých lokálně kompaktních množin. Globální vlastnosti posledně jmenovaných prostorů jsou proti globálním vlastnostem kontinuí obvykle mnohem složitější.

S některými množinami, které bychom mohli považovat za křivky, jsme se již setkali. Nebude proto naškodu, sepsat několik jednoduchých vlastností množin, o kterých bychom snad byli ochotni mluvit jako o křivkách, a zkontrolovat, které typy nám známých množin tyto vlastnosti mají:

V1. Vlastní kontinuum obsažené v křivce je křivka.

V2. Souvislá množina, která je sjednocením konečně mnoha křivek, je křivka.

V3. Čtverec (s vnitřkem), kruh, krychle, apod. nejsou křivky.

V4. Mezi křivky patří

V4A. oblouky;

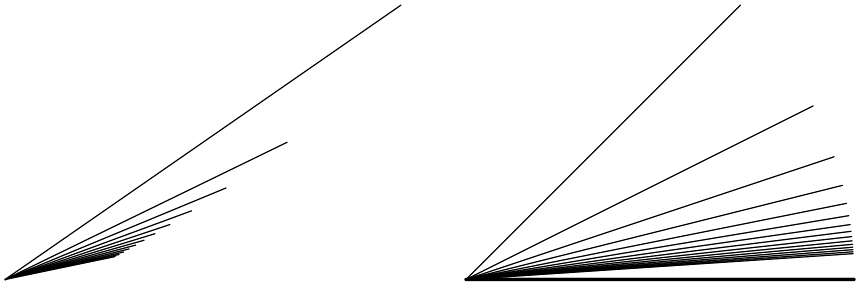
V4B. uzávěr grafu funkce $\sin(1/x)$, $0 < |x| \le 1$;

V4C. kontinuum složené ze spočetně mnoha úseček vycházejících z jednoho bodu (viz obr. 15, v němž se levé kontinuum skládá z úseček, jejichž délka konverguje k nule, zatímco v kontinuu vpravo jsou všechny úsečky stejně dlouhé);

V4D. kontinuum řídké v rovině, složené z úseček vycházejících z jednoho bodu (srov. s obr. 11, kde je úseček nespočetně mnoho).

Poznámka 7.1. Ukažme nejdříve, že podmínky V1 – V4 *nesplňuje* žádné z dále uvedených kontinuí; to bude motivací pro hledání uspokojivější definice křivky.

A. *Spojitý obraz úsečky* je podle věty 5.1 totéž co lokálně souvislé kontinuum. Podmínka V1 není splněna, protože existují lokálně souvislá kontinua, která nejsou lokálně souvislá dědičně. Na rozdíl od dědičně lokálně souvislých kontinuí mají (podle věty 3.2) lokálně souvislá kontinua vlastnost V2. Lokálně souvislá kontinua nesplňují (na rozdíl od kontinuí lokálně souvislých dědičně) podmínku V3, protože mezi ně patří čtverec, kruh i krychle. Mezi lokálně souvislá kontinua patří oblouky, takže podmínka V4A je splněna; podmínka V4B splněna není, podmínky V4C a V4D obecně také ne. (Kontinuum složené z konečného počtu úseček lokálně souvislé je a totéž platí i kontinuu složeném z nekonečně mnoha úseček $\langle(0,0);(1/n,1/n^2)\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Kontinuum složené z úsečky $\langle(0,0);(1,0)\rangle$ a úseček $\langle(0,0);(1,1/n)\rangle$ však lokálně souvislé není.)



Obr. 15

B. *Spojitý prostý obraz úsečky* (neboli její homeomorfní obraz) je oblouk. Splňuje sice podmínky V1 a V3, ale sjednocení konečného počtu oblouků nemusí být oblouk a množina uvedená sub V4B obloukem také není. Je-li počet úseček ≥ 2, ani množiny uvedené sub V4C a V4D oblouky nejsou.

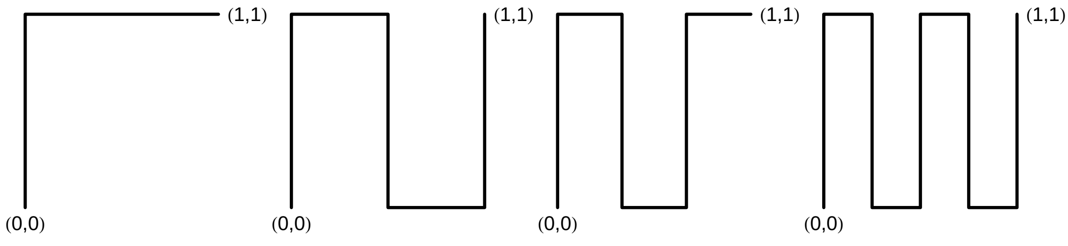
C. *Ireducibilní kontinuum* nemá zřejmě vlastnost V1, protože subkontinuum ireducibilního kontinua může být reducibilní. (Kontinuum z obr. 8 je ireducibilní mezi počátkem a kterýmkoli bodem jednotkové kružnice, ale tato kružnice je reducibilní.) Nemá ani vlastnost V2, protože sjednocením dvou oblouků ab, které kromě bodů a, b nemají žádné body společné, je topologická kružnice, která (na rozdíl od oblouků) není ireducibilní. Čtverec (s vnitřkem) není sice ireducibilní kontinuum, ale existují ireducibilní kontinua, která čtverec obsahují.

Příklad 7.1. Buď $Q := \langle 0,1\rangle^2$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $L_n \subset Q$ jakýkoli oblouk s krajními body $(0,0)$ a $(1,1)$, od kterého má každý bod $(x,y) \in Q$ vzdálenost $\leq 1/n$. (Viz obr. 16, na němž jsou nakresleny příklady oblouků $L_1, \dots, L_4$.) Označme $Q^* := Q \times \{0\}$, $M_n := L_n \times \{1/n\}$; N_{2n-1} nechť je úsečka s krajními body $(1,1,1/(2n-1))$, $(1,1,1/2n)$, zatímco N_{2n} je úsečka s krajními body $(0,0,1/2n)$, $(0,0,1/(2n+1))$. Pak je

$$K := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \cup Q^* \tag{2}$$

kontinuum obsahující čtverec Q^* a ireducibilní mezi bodem $(0,0,1)$ a každým bodem $(x,y,0) \in Q^*$. $\square$

Oblouky i množina z podmínky V4B jsou ireducibilní kontinua, množiny z podmínek V4C a V4D nejsou ireducibilní, jsou-li sjednocením více než dvou úseček.

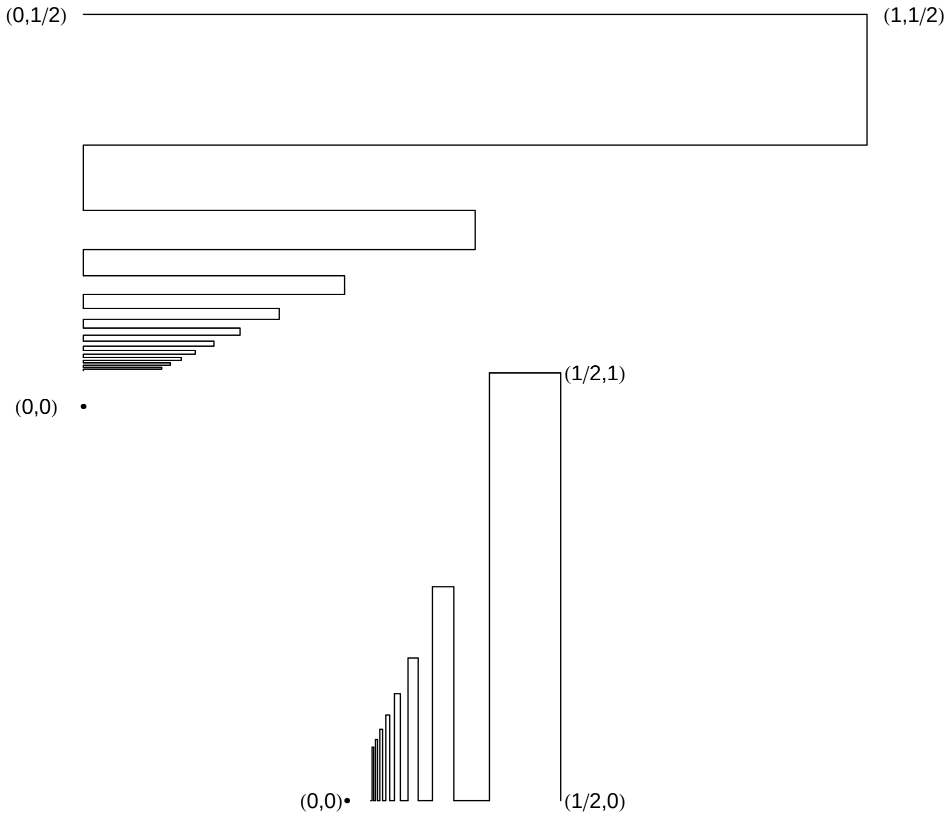


Obr. 16. Jak např. mohou vypadat oblouky $L_1, \dots, L_4$

D. *Ireducibilní lokálně souvislá kontinua* jsou podle věty 6.5 oblouky.

E. *Kontinua řídká v prostoru* P mají *všechny* vlastnosti uvedené nahoře, je-li $P = \mathbb{R}^2$. Je-li však např. $P = \mathbb{R}^3$, je v P řídký např. každý čtverec, v $P = \mathbb{R}^4$ např. každá (trojrozměrná) krychle. Je-li P obecný metrický prostor, nelze kontinua řídká v P žádným univerzálním způsobem ani charakterizovat.

F. *Kontinua složená z konečného počtu oblouků vycházejících z jednoho bodu* tvoří patrně příliš úzkou třídu kontinuí. Splňují podmínky V2, V3, V4A, ale kontinuum V4B není sjednocením konečného počtu oblouků, stejně jako kontinua V4C a V4D, jsou-li sjednocením nekonečně mnoha úseček se společným krajním bodem. Je možná poněkud překvapující, že *nemají vlastnost* V1. V následujícím příkladu sestrojíme v rovině *dva oblouky* L, M, *které vycházejí z počátku a pro něž kontinuum* $K : L \cup M$ *obsahuje* nekonečně *mnoha oblouků* O_n *vycházejících z počátku, který je jejich jediným společným bodem.*



Obr. 17a

Příklad 7.2. Nakreslíme-li „běžný jednoduchý“ obrázek dvou rovinných oblouků L, M vycházejících např. z počátku, budou v jejich sjednocení $L \cup M$ existovat nejvýše dva oblouky L', M', jejichž jediným společným bodem je počátek. *Existují však dvojice rovinných oblouků* L, M *s krajním bodem* $(0,0)$, *v jejichž sjednocení existuje nekonečně mnoho oblouků* O_n *s krajním bodem* $(0,0)$, *přičemž* $m \neq n \Rightarrow O_m \cap O_n = (0,0)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme A_n jako sjednocení úseček, jejichž krajními body jsou sousední členy posloupnosti

$$\left(0, \tfrac{1}{2n}\right), \ \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2n}\right), \ \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2n-1}\right), \ \left(0, \tfrac{1}{2n-1}\right), \ \left(0, \tfrac{1}{2n+2}\right); \tag{3}$$

B_n nechť je lomená čára, která vznikne z A_n zrcadlením podle přímky $y = x$. Položme

$$L := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ M := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \ K := L \cup M. \tag{4}$$

Na obr. 17a je nahoře nakreslena lomená čára $A_1 \cup \ldots \cup A_8$, pod ní lomená čára $B_0 \cup \ldots \cup B_8$, na obr. 17b je jejich sjednocení, v němž jsou silnějšími linkami vyznačeny části oblouků $O_1, \ldots, O_4$ obsažených v K a majících jen počátek společný.

O_1 je sjednocení úseček, jejichž krajní body jsou sousední členy (nekonečné) posloupnosti

$$(5_1)\qquad (\tfrac{1}{3},1),\ (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{3}),\ (\tfrac{1}{7},\tfrac{1}{3}),\ (\tfrac{1}{7},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{9},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{9},\tfrac{1}{5}),\ (\tfrac{1}{11},\tfrac{1}{5}),\ \dots,$$

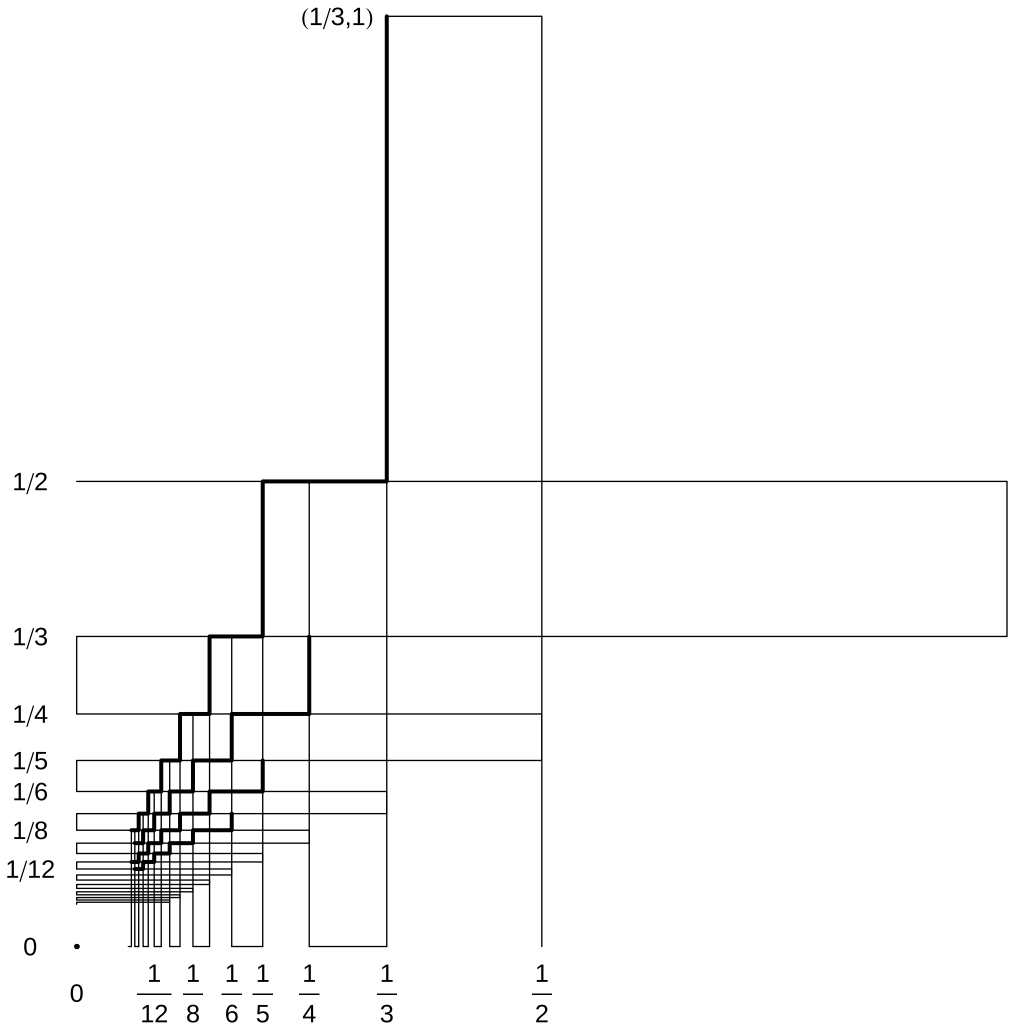
k němuž je přidán počátek; O_1 je zřejmě oblouk.

Podobně vznikne O_2 z posloupnosti

$$(5_2)\qquad (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{3}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{5}),\ (\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{5}),\ (\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{6}),\ (\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{6}),\ (\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{7}),\ \dots$$

a O_n pro obecné n z posloupnosti o členech

$$(5_n)\qquad (\tfrac{1}{n+2},\tfrac{1}{2n-1}),\ (\tfrac{1}{n+2},\tfrac{1}{2n}),(\tfrac{1}{n+4},\tfrac{1}{2n}),\ (\tfrac{1}{n+4},\tfrac{1}{2n+1}),\dots,(\tfrac{1}{n+2+2k},\tfrac{1}{2n-1+k}),\ (\tfrac{1}{n+2k},\tfrac{1}{2n+k}),\dots.$$



Obr. 17b

G. *Kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha oblouků vycházejících z jednoho bodu* nesplňuje, jak ukazuje následující příklad, podmínku V1:

Příklad 7.3. Užívejme stejné označení jako při konstrukci Cantorova diskontinua Δ v kapitole 0 a pro každý z intervalů[21]) $\langle 0,1\rangle$, $\Delta(k_1)$, $\Delta(k_1,k_2)$, $\dots$, $\Delta(k_1,\dots,k_n)$, $\dots$ (kde $k_n\in\{0,1\}$) vytvořme přidáním

[21]) které budeme pro stručnost zápisu ztotožňovat s odpovídajícími úsečkami na ose x v rovině xy

dvou úseček ležících v horní polorovině rovnostranný trojúhelník; takto vytvořené trojúhelníky označme

$$T,\, T(k_1),\, T(k_1, k_2),\, \ldots,\, T(k_1, \ldots, k_n),\, \ldots . \tag{6'}$$

Vrcholy těchto trojúhelníků ležící v horní otevřené polorovině značme

$$v,\, v(k_1),\, v(k_1, k_2),\, \ldots,\, v(k_1, \ldots, k_n),\, \ldots, \tag{6''}$$

$u(k_1)$ nechť je úsečka s krajními body $v, v(k_1)$, pro $n > 1$ nechť $u(k_1, \ldots, k_n)$ značí úsečku s krajními body $v(k_1, \ldots, k_{n-1}), v(k_1, \ldots, k_n)$. Pro každý bod $x \in \Delta$ existuje právě jedna posloupnost k_n, kde $k_n \in \{0, 1\}$, tak, že $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} k_n/3^n$, a $L(x) := \bigcup_{n=1}^{\infty} u(k_1, \ldots, k_n) \cup x$ je oblouk s krajními body v, x. Pro body x 1. druhu [22]) je příslušná posloupnost $\{k_n\}$ stacionární, takže existuje p tak, že $\bigcup_{n=p+1}^{\infty} \cup x$ je úsečka s krajními body $v(k_1, \ldots, k_p)$ a x. Z toho plyne, že oblouk $L(x)$ je sjednocením konečného počtu úseček.

Množina

$$K := T \cup \bigcup_{(k_1,\ldots,k_n) \in \{0,1\}^n} T(k_1, \ldots, k_n) = \langle 0, 1\rangle \cup \bigcup_{x \text{ je 1. druhu}} L(x) \tag{7}$$

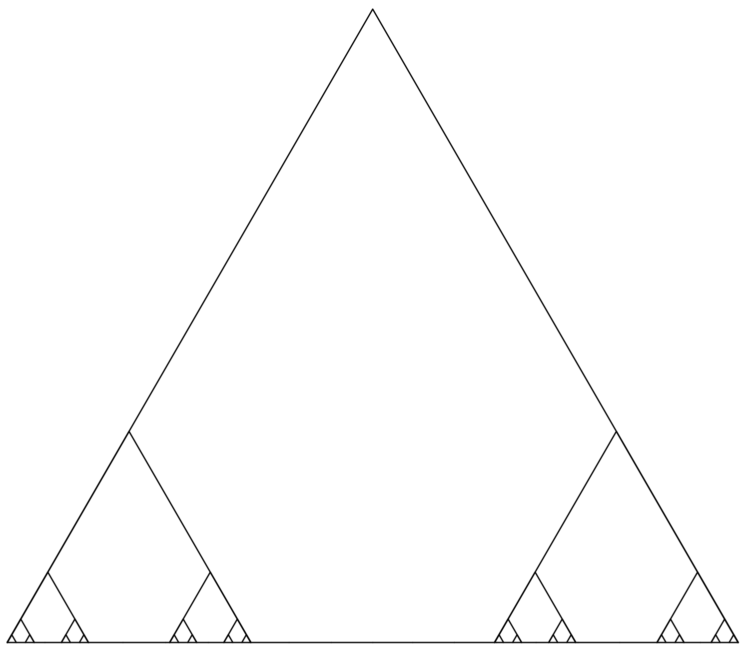
je kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha oblouků s krajními body v, x, kde $x \in \Delta$ je 1. druhu.

Označme (jako v kapitole 0) $J, J(i_1), J(i_1, i_2), \ldots$ omezené styčné intervaly diskontinua Δ a položme

$$K^* := K - \Big(J \cup \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1\}^n} J(i_1, \ldots, i_n)\Big). \tag{7'}$$

Množina K^* je kontinuum, které nelze napsat jako sjednocení spočetně mnoha oblouků s krajním bodem v, protože $\Delta \subset K^*$ a jediným obloukem v K^* spojujícím bod v s bodem $x \in \Delta$ je $L(x)$.

Kontinuum K, které je sjednocením spočetně mnoha oblouků se společným krajním bodem splňuje podmínky V2, V4A, V4C. Protože oblouk je množina řídká v rovině, nemůže K být např. čtverec. Podmínka V4B splněna není, a protože kontinuum z obr. 11 není sjednocením spočetně mnoho úseček, není splněna ani podmínka V4C.



Obr. 18

[22]) k nimž nyní počítejme i body 0 a 1

* * *

Poznámka 7.2. K tomu, abychom mohli vyslovit definici křivky podle Mengera a Urysona, potřebujeme pojem tzv. *malé induktivní dimenze.* Obecnou definici dimenze spolu s nejzákladnějšími větami o prostorech dimenze 0 a 1, které budeme potřebovat, lze nalézt např. v Kuratowského knihách Topologie I a II. Pro informaci čtenáře zde uvedeme jen tuto definici; potřebné netriviální věty vyslovíme bez důkazu.

Definice 7.1. Pro každý prostor P a pro každý bod $p \in P$ definujeme **dimenzi** $\dim P$ **prostoru** P a **dimenzi** $\dim_p P$ **prostoru** P **v bodě** p indukcí takto:

1. $\dim \emptyset = -1$.

2. Je-li $n \geq -1$ celé číslo, znamená nerovnost $\dim_p P \leq n+1$ existenci libovolně malých okolí $U(p)$, pro něž je $\dim H(U(p)) \leq n$. Je-li $n \geq 0$, je $\dim_p P = n$, platí-li nerovnost $\dim_p P \leq n$, ale nerovnost $\dim_p P \leq n-1$ neplatí.

3. Je-li $P \neq \emptyset$, je $\dim P := \sup\{\dim_p P;\ p \in P\}$. (Speciálně: Je-li množina $\{\dim_p P;\ p \in P\}$ shora neomezená, je $\dim P = +\infty$.)

Poznámka 7.3. Čísla $\dim P$ a $\dim_p P$ jsou zatím definována jen v případě, že P je (separabilní) metrický prostor. Analogická čísla dostaneme pro podmnožiny M prostoru P, považujeme-li je za jeho podprostory. Slovo okolí a hranice pak ovšem znamenají okolí a hranici v M. Zatímco okolí v M jsou totožná s průniky okolí v P s množinou M, s hranicí množiny A v M je to složitější:

Pozor však! *Hranice $H_M(A)$ množiny A v M není obecně rovna $H(A) \cap M$!* (Příklad: Je-li $P = \mathbb{R}$ a je-li $A = M$ množina všech racionálních čísel, je $H(A) = \mathbb{R}$, tedy $H(A) \cap M = A$, zatímco $H_M(A) = \emptyset$.) Vztah mezi hranicí v P a v M je obecně dán rovnostmi

$$H_M(A) = \overline{A}^M \cap \overline{M - A}^M = M \cap \overline{A} \cap \overline{M - A}. \tag{8}$$

Je-li množina A otevřená v M (speciálně: je-li A okolí v M nějakého bodu z M), existuje otevřená množina $B \subset P$ tak, že $A = B \cap M$; pak je

$$H_M(A) = \overline{A}^M - A = \overline{A} \cap M - A = \overline{B \cap M} \cap M - B \cap M \subset \overline{B} - B = H(B). \tag{9}$$

Indukcí lze odtud celkem snadno dokázat, že $\dim_p M \leq \dim_p P$ pro každé $p \in M$; z toho ihned plyne, že $\dim P \leq n \Rightarrow \dim M \leq n$. Nám budou stačit dvě slabší tvrzení:

Věta 7.1. *Je-li $p \in M \subset P$, platí implikace*

$$\dim_p P = 0 \Rightarrow \dim_p M = 0, \quad \dim_p P = 1 \Rightarrow \dim_p M \leq 1. \tag{10}$$

Je-li $M \subset P$, platí implikace

$$\dim P = 0 \Rightarrow \dim M \leq 0, \quad \dim P = 1 \Rightarrow \dim M \leq 1. \tag{11}$$

D ů k a z . Je-li $\dim_p P = 0$, existují libovolně malá okolí B bodu p, pro něž je $H(B) = \emptyset$; podle (9) mají pak okolí $B \cap M$ bodu $p \in M$ také prázdnou hranici v M. Tím jsou dokázány první implikace v (10) a v (11).

Dále: Je-li $\dim_p P \leq 1$, existují libovolně malá okolí B bodu p, pro něž je $\dim H(B) \leq 0$; vzhledem k (9) a k tomu, co jsme již dokázali, je $\dim H_M(B \cap M) \leq 0$. Z toho plyne, že $\dim_p M \leq 1$; platí tedy i druhé implikace v (10) a v (11).

Věta 7.2. *Je-li $p \in M \subset P$, je podmínka $\dim_p M = 0$ ekvivalentní s existencí libovolně malých okolí $U(p)$, pro něž je $M \cap H(U(p)) = \emptyset$. Podmínka $\dim_p M \leq 1$ je pak ekvivalentní s existencí libovolně malých okolí $U(p)$, pro něž je $\dim (M \cap H(U(p))) \leq 0$.*

Poznámka 7.4. Právě zavedené pojmy jsou topologické. Jinými slovy: *Je-li $M \subset P$ a je-li $f : M \to R$ homeomorfní zobrazení, je $\dim_p M = \dim_{f(p)} f(M)$ pro každé $p \in M$ a $\dim M = \dim f(M)$.*

Poznámka 7.5. Prostor P má dimenzi 0 v bodě $p \in P$, existují-li libovolně malá okolí $U(p)$, jejichž hranice je prázdná;[23]) prostor $P \neq \emptyset$ má dimenzi 0, má-li dimenzi 0 v každém bodě $p \in P$.

[23]) Připomeňme, že množina má prázdnou hranici, právě když je obojetná.

Příklady 7.4. 1. *Každý neprázdný spočetný prostor P má dimenzi* 0, protože každý bod $p \in P$ má dokonce libovolně malá *sférická* okolí s prázdnou hranicí. To je zřejmé v případě jednobodového prostoru P; obsahuje-li P aspoň dva různé body, stačí poloměr volit tak, aby nebyl roven žádnému z čísel $\rho(p,x)$, kde $p \neq x \in P$.

2. *Množina M všech iracionálních čísel má také dimenzi* 0, protože pro každé iracionální číslo p existují racionální čísla r_1, r_2 tak, že $r_1 < p < r_2$ a že rozdíl $r_2 - r_1$ je libovolně malý. Okolí $(r_1, r_2) \cap M$ bodu p má pak v M prázdnou hranici.

3. *Cantorovo diskontinuum má dimenzi* 0, protože pro každý jeho bod p existuje interval libovolně malé délky, jehož krajní body leží ve vhodných styčných intervalech. (Připomeňme, že sjednocení všech styčných intervalů včetně intervalů $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$ je husté v $\mathbb{R}$.)

4. $\mathbb{R}$ *a všechny intervaly $M \subset \mathbb{R}$ mají dimenzi* 1: Je-li $M \subset \mathbb{R}$ interval, je-li $p \in M$ a je-li $\varepsilon > 0$ dostatečně malé, má hranice okolí $U_M(p,\varepsilon)$ dimenzi 0. [24])

5. *Každý oblouk má dimenzi* 1: Protože pojem dimenze je topologický a protože kompaktní jednorozměrné intervaly mají dimenzi 1, platí totéž o obloucích.

6. *Každé vlastní kontinuum má dimenzi* ≥ 1. Je-li totiž $p \in P$, kde P je vlastní kontinuum, existuje $q \in P$ různé od p. Je-li průměr nějakého okolí $U(p)$ menší než $\rho(p,q)$, je $H(U(p)) \neq \emptyset$, takže $\dim_p P \geq 1$.

Věta 7.3. *V každém prostoru dimenze 0 existuje spočetná báze složená z obojetných množin. Je-li dáno libovolné $\varepsilon > 0$, lze bázi navíc zvolit tak, že všechny její členy mají průměry menší než ε.*

D ů k a z . Je-li $\dim P = 0$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $n \in \mathbb{N}$ okolí $U_n(p)$ tak, že $H(U_n(p)) = \emptyset$ a $\operatorname{diam} U_n(p) < \varepsilon/(n+1)$. Podle Lindelöfovy věty lze ze systému $\mathfrak{S}_n$ všech těchto okolí $U_n(p)$ vybrat spočetný systém $\mathfrak{S}_n^*$, který pokrývá P. Snadno nahlédneme, že systém $\mathfrak{S} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n^*$ je pak spočetnou bází prostoru P; kromě toho je $\operatorname{diam} U \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ pro každé $U \in \mathfrak{S}$.

Definice 7.2. Říkáme, že prostor $P \neq \emptyset$ je **totálně nesouvislý**, je-li každá jeho komponenta jednobodová.

Věta 7.4. *Má-li prostor P dimenzi 0, je totálně nesouvislý.* [25])

D ů k a z . Má-li prostor P dimenzi 0 a jsou-li p, q dva různé body z P, existuje okolí $U(p)$ tak, že $q \in P - \overline{U(p)}$, $H(U(p)) = \emptyset$. Kdyby existovala souvislá množina $M \subset P$ obsahující oba body p, q, musela by protínat $H(U(p))$, protože množiny $U(p)$ a $P - \overline{U(p)}$ jsou oddělené. Body p, q proto leží v různých komponentách prostoru P.

Definice 7.3 (Menger – Uryson). *Slovo* **křivka** *bude od tohoto okamžiku znamenat kontinuum dimenze* 1.

Věta 7.5 (bez důkazu). [26]) *Kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha křivek, je křivka.*

Poznámka 7.6. Důkaz tvrzení, že eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ má *algebraickou* dimenzi n, tedy že v něm existuje n-tice lineárně nezávislých vektorů, zatímco každá množina složená $n+1$ vektorů je lineárně závislá, je zcela jednoduchý. Tím spíše možná udiví, že důkaz rovnosti $\dim \mathbb{R}^n = n$ elementární není; přijmeme proto tuto skutečnost bez důkazu.

Věta 7.6 (bez důkazu). [27]) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\dim \mathbb{R}^n = n$; dimenze jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$ je rovna $n-1$.*

Poznámka 7.7. Nechť P je křivka. Podle části 6 příkladů 7.4 je $\dim K \geq 1$ pro každé vlastní kontinuum $K \subset P$, podle věty 7.1 je naopak $\dim K \leq 1$. P má tedy vlastnost V1. Podle věty 7.5 má P i vlastnost V2, podle věty 7.6 i vlastnost V3. Oblouky mají dimenzi 1 podle části 5 v příkladech 7.4, a platí tedy V4A. V4C je důsledkem věty 7.5. Vlastnosti V4B a V4D jsou také splněny, protože v 8. kapitole (věta 8.5) dokážeme, že *každé kontinuum řídké v rovině je křivkou i podle definice* 7.3.

Definice 7.4. Vlastní kontinuum řídké v rovině se nazývá **Cantorova křivka.**

---

[24]) Pro vnitřní body intervalu je $H(M)$ dvoubodová, pro jeho hraniční body jednobodová množina.
[25]) Je-li prostor P kompaktní, platí i obrácené tvrzení (viz větu 8.14).
[26]) Důkaz viz [1], §22, I, Théoreme 1.
[27]) Důkaz viz [1], §23, II, 7 (Théoreme fondamental).