# 8. Rozvětvování kontinuí

Je-li $P$ kontinuum dimenze 1, existují ke každému bodu $p \in P$ libovolně malá okolí $U(p)$, která mají hranici dimenze 0, tedy totálně nesouvislou (srov. s větou 7.4). Množina $H(U(p))$ je kompaktní, a je tedy buď konečná, nebo nekonečná spočetná, nebo má mohutnost kontinua. Body $p \in P$ lze proto klasifikovat podle toho, kolik bodů obsahují množiny $H(U(p))$. Příslušné definice vyslovíme nejen pro kontinua, ale obecněji pro separabilní metrické prostory. *Mohutnost množiny* $M$ *označíme* $\operatorname{card} M$; $\aleph$ resp. $\mathfrak{c}$ bude mohutnost nekonečných spočetných množin resp. mohutnost kontinua.

**Úmluva.** K množině všech celých nezáporných čísel a právě uvedených dvou mohutností přidáme ještě ordinální číslo $\omega$ a vzniklou množinu

(1) $$\mathfrak{C} := \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq 0\} \cup \{\omega, \aleph, \mathfrak{c}\}$$

uspořádáme takto: v oboru celých čísel ponecháme obvyklé uspořádání, za nimi bude následovat $\omega$, pak $\aleph$, a nakonec $\mathfrak{c}$.

**Definice 8.1.**. Nechť $P$ je separabilní metrický prostor a nechť $p \in P$.

1. Je-li $n$ celé nezáporné číslo, budeme psát $\operatorname{ord}_p P \leq n$, existují-li libovolně malá okolí $U(p)$ tak, že $\operatorname{card} H(U(p)) \leq n$. Je-li $\operatorname{ord}_p P \leq n$, ale není $\operatorname{ord}_p P \leq n-1$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = n$.

2. Budeme psát $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, existují-li libovolně malá okolí $U(p)$, jejichž hranice obsahuje jen konečný počet bod; je-li $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, ale není $\operatorname{ord}_p P = n$ pro žádné celé číslo $n \geq 0$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = \omega$.

3. Existují-li libovolně malá okolí $U(p)$ tak, že $\operatorname{card} H(U(p)) = \aleph$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$. Je-li $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$, ale není $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = \aleph$.

4. Není-li $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$.

5. Je-li $m \in \mathfrak{C}$ a $\operatorname{ord}_p P \leq m$ pro každé $p \in P$, budeme psát $\operatorname{ord} P \leq m$; je-li $\operatorname{ord} P \leq m$ a není-li $\operatorname{ord} P \leq m'$ pro žádné $m' \in \mathfrak{C}$, $m' < m$, budeme psát $\operatorname{ord} P = m$.

6. Číslo $\operatorname{ord}_p P$ (resp. $\operatorname{ord} P$) se nazývá **řád rozvětvení prostoru** $P$ **v bodě** $p$ (resp. **řád rozvětvení prostoru** $P$).

**Poznámka 8.1.** Pojem řádu rozvětvení je topologický. Je-li $P$ kompaktní prostor, je $\operatorname{ord}_p P$ některé z čísel z $\mathfrak{C}$. Rovnost $\operatorname{ord}_p P = 0$ je ekvivalentní s rovností $\dim_p P = 0$, tedy s podmínkou, že existují libovolně malá okolí $U(p)$ s prázdnou hranicí.

**Poznámka 8.2.** Rovnost $\operatorname{ord}_p P = \omega$ znamená, že existují okolí $U_n(p)$, jejichž průměr je menší než $1/n$ a jejichž hranice obsahují jen konečný počtu $s_n$ bodů, přičemž množina $\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ není omezená. [28])

Tento řád rozvětvení má např. počátek v kontinuu, které je sjednocením úseček spojujících počátek s body $(\cos(1/n)/n, \sin(1/n)/n)$, $n \in \mathbb{N}$, jejichž vzdálenost od počátku konverguje k nule. (Srov. s kontinuem na obr. 15 vlevo.)

**Definice 8.2.** Body $p \in P$, v nichž je

(2) $$\operatorname{ord}_p P \left\{\begin{matrix} = 1 \\ = 2 \\ > 2 \\ \leq \omega \\ \leq \aleph \\ > \aleph \end{matrix}\right\}, \quad \text{se nazývají} \quad \left\{\begin{matrix} \textbf{krajní body} \\ \textbf{obyčejné body} \\ \textbf{body rozvětvení} \\ \textbf{regulární body} \\ \textbf{racionální body} \\ \textbf{iracionální body} \end{matrix}\right\} \quad \text{prostoru } P.$$

Prostor, který má jen regulární (resp. racionální) body, se nazývá **regulární** (resp. **racionální**). V opačném případě se nazývá **iregulární** (resp. **iracionální**). [29])

**Příklady 8.1.** 1. Oblouk $ab$ má dva krajní body $a, b$, ostatní body jsou obyčejné.

[28]) Velmi zhruba řečeno: Jak okolí $U_n(p)$ zmenšujeme, počet bodů množiny $H(U_n(p))$ roste nade všechny meze.

[29]) Všechny tyto pojmy jsou topologické. V topologické literatuře se zpravidla neříká „krajní bod“, ale „koncový bod“; název „krajní bod“ je však v souladu s terminologií užívanou pro intervaly a obecněji pro uspořádané množiny, u nichž musíme rozlišovat mezi počátečním a koncovým bodem.

2. Kružnice má jen obyčejné body.

3. Pro kontinuum $P$, které je sjednocením (konečného počtu) $n$ úseček $a_k b_k$ majících společný jen krajní bod $a_1 = \ldots, a_n$, má tento bod řád rozvětvení rovný $n$; body $b_n$ jsou krajní body kontinua $P$, ostatní jeho body jsou obyčejné.

4. Jak jsme již řekli, pro kontinuum $P$, které je sjednocením (nekonečně mnoha) úseček $a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, které mají společný jen krajní bod $a = a_1 = a_2 = \ldots$ a jejichž topologická limita je jednobodová (takže jejich průměry konvergují k nule), je $a$ bodem rozvětvení řádu $\omega$; body $b_n$ jsou krajní, ostatní body kontinua $P$ jsou obyčejné.

5. Sjednocení posloupnosti úseček $L_n$ s krajními body $(0,0)$ a $(1,1/n)$ s úsečkou $L$ s krajními body $(0,0)$ a $(1,0)$ je kontinuum, které má v každém bodě $x \in L$ řád rozvětvení $\aleph$. (Srov. s obr. 15 vpravo.)

6. Je-li $P$ sjednocení úseček spojujících bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ se všemi body Cantorova diskontinua, je $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$ pro každé $p \in P$. (Srov. s obr. 11.)

7. Je-li $P$ uzávěr grafu funkce $\sin(1/x)$, kde $x \neq 0$, je $\operatorname{ord}_p P = \aleph$ pro každé $p \in \langle (0,-1); (0,1) \rangle$; ostatní body jsou obyčejné. [30])

8. Je-li $P_1$ kontinuum z příkladu 4.6, je jistě zřejmé, že řád rozvětvení každého bodu $p \in P_1$ ležícího v otevřené horní polorovině je jedno z čísel 1, 2, 3. Bod $p = (p_1, 0) \in P_1$ má řád rozvětvení 3, je-li $p_1$ dyadicky racionální číslo z intervalu $(0,1)$; pro ostatní body na ose x je $\operatorname{ord}_x P = 2$. V kontinuum $P_2$ z téhož příkladu přibudou ještě body s řádem rozvětvení 4. Body kontinua $P = P_1 \cup P_2$ ležící na ose x mají řád rozvětvení $\aleph$.

9. **Trojúhelníkové kontinuum Sierpińského** je definováno takto: Nechť $T$ je uzavřený rovnostranný trojúhelník s vrcholy $a, b, c$. Rozdělme jej spojnicemi středů stran na čtyři trojúhelníky a vnitřek toho z nich, který neobsahuje žádný vrchol trojúhelníku $T$, odstraňme; zbudou tři uzavřené trojúhelníky $T(i_1)$, $0 \leq i_1 \leq 2$. Rozdělme každý trojúhelník $T(i_1)$ spojnicemi středů stran na čtyři trojúhelníky a vnitřek toho z nich, který neobsahuje žádný vrchol trojúhelníku $T(i_1)$, odstraňme; pro každé $i_1$ zbudou tři trojúhelníky $T(i_1, i_2)$, $0 \leq i_2 \leq 2$. Pokračujeme-li takto do nekonečna, získáme v $n$-tém kroku $3^n$ uzavřených (rovnostranných) trojúhelníků $T(i_1, \ldots, i_n)$, kde $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1,2\}^n$; označíme-li $T^n$ jejich sjednocení, je $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost kontinuí. Jejich průnik

$$P := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1,2\}^n} T(i_1, \ldots, i_n) \tag{3}$$

je Sierpińského trojúhelníkové kontinuum (jinak též **Sierpińského trojúhelníková křivka**). Je zřejmé, že je to kontinuum řídké v rovině, tedy *Cantorova křivka*.

Ve vrcholech trojúhelníku $T$ má $P$ řád rozvětvení 2, ve vrcholech každého z vynechaných trojúhelníků řád 4, v ostatních bodech řád 3.

Poznamenejme, že každé posloupnosti $\{i_n\}$, kde $0 \leq i_n \leq 2$, odpovídá právě jeden bod Sierpińského křivky; je to jediný bod průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T(i_1, \ldots, i_n) . \tag{4}$$

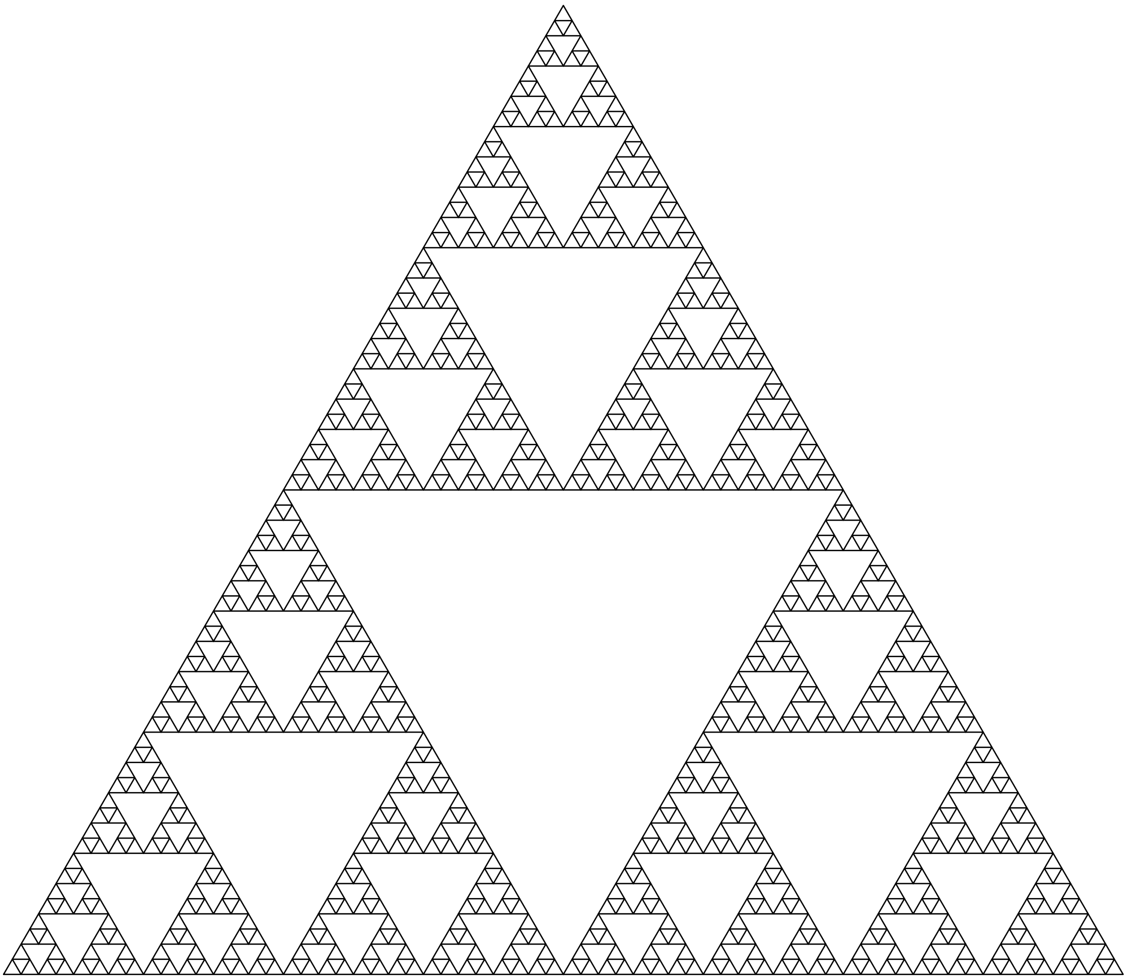
Analogicky jako má Cantorovo diskontinuum body 1. a 2. druhu, obsahuje Sierpińského křivka nejen hranice všech trojúhelníků $T(i_1, \ldots, i_n)$, ale nespočetně mnoho dalších bodů. Hranice trojúhelníků $T(i_1, \ldots, i_n)$ jsou (spolu s $H(T)$) nakresleny na obr.19 pro $n = 1, \ldots, 5$.

Sierpińského křivku $P$ obsaženou v rovině xy můžeme vhodným homeomorfním zobrazením přemístit na sféru tak, aby obrazy $A, B, C$ ležely na rovníku a obrazy ostatních bodů v otevřené horní polosféře. Znamená-li $P^*$ obraz kontinua $P$ při takovéto transformaci a je-li $P^{**}$ množina symetrická s $P^*$ vzhledem k rovníkové rovině, má kontinuum $P^* \cup P^{**}$ v bodech $A, B, C$ řád 4. *Každý bod tohoto kontinua má tedy řád rozvětvení* 3 *nebo* 4*; neleží v něm žádné obyčejné body* (*a samozřejmě ani žádné krajní body*).

**Cvičení.** *Najděte spojité zobrazení $f$ intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na Sierpińského trojúhelníkovou křivku.* (Tím bude zároveň dokázáno, že toto kontinuum je lokálně souvislé).

---

[30]) $P$ v tomto případě není kontinuum, protože jde o neomezenou množinu.



Obr. 19. Vytváření Sierpińského trojúhelníkové křivky

N á v o d : Umluvme se, že označení trojúhelníků $T(i)$ je zvoleno tak, že $T(0)$ leží v $T$ vlevo dole, $T(1)$ nahoře, $T(2)$ vpravo dole. Podobně postupujme pro obecné $n$: Hodnotám $i_{n+1} = 0, 1, 2$ nechť v trojúhelníku $T(i_1, \dots, i_n)$ odpovídá po řadě trojúhelník $T(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$ ležící vlevo dole, nahoře, vpravo dole.

Řetěz $T(0), T(1), T(2)$ má tu vlastnost, že jeho první člen $T(0)$ obsahuje bod $(0,0)$, poslední člen $T(2)$ bod $(1,0)$. Podobnou vlastnost má i řetěz

$$T(0,0),\ T(0,2),\ T(0,1),\ T(1,0),\ T(1,1),\ T(1,2),\ T(3,1),\ T(3,0),\ T(3,2)$$

a čtenář jistě najde algoritmus, jak podobný řetěz sestavit z trojúhelníků $T(i_1, \dots, i_n)$ pro obecné $n$.

Rozdělme interval $\langle 0, 1\rangle$ na tři stejně dlouhé intervaly $I(0) = \langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, $I(1) = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$, $I(2) = \langle \frac{2}{3}, 1\rangle$. Jsou-li již sestrojeny intervaly $I(i_1, \dots, i_n$, kde $(i_1, \dots, i_n) \in \{0,1,2\}^n$, rozdělme každý z nich na tři stejně dlouhé uzavřené intervaly $I(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$, a to tak, že číslu $i_{n+1} = 0, 1, 2$ odpovídá po řadě levý, prostřední a pravý interval.

Pro každou posloupnost $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $i_n \in \{0,1,2\}$ pro každé $n$, je průnik

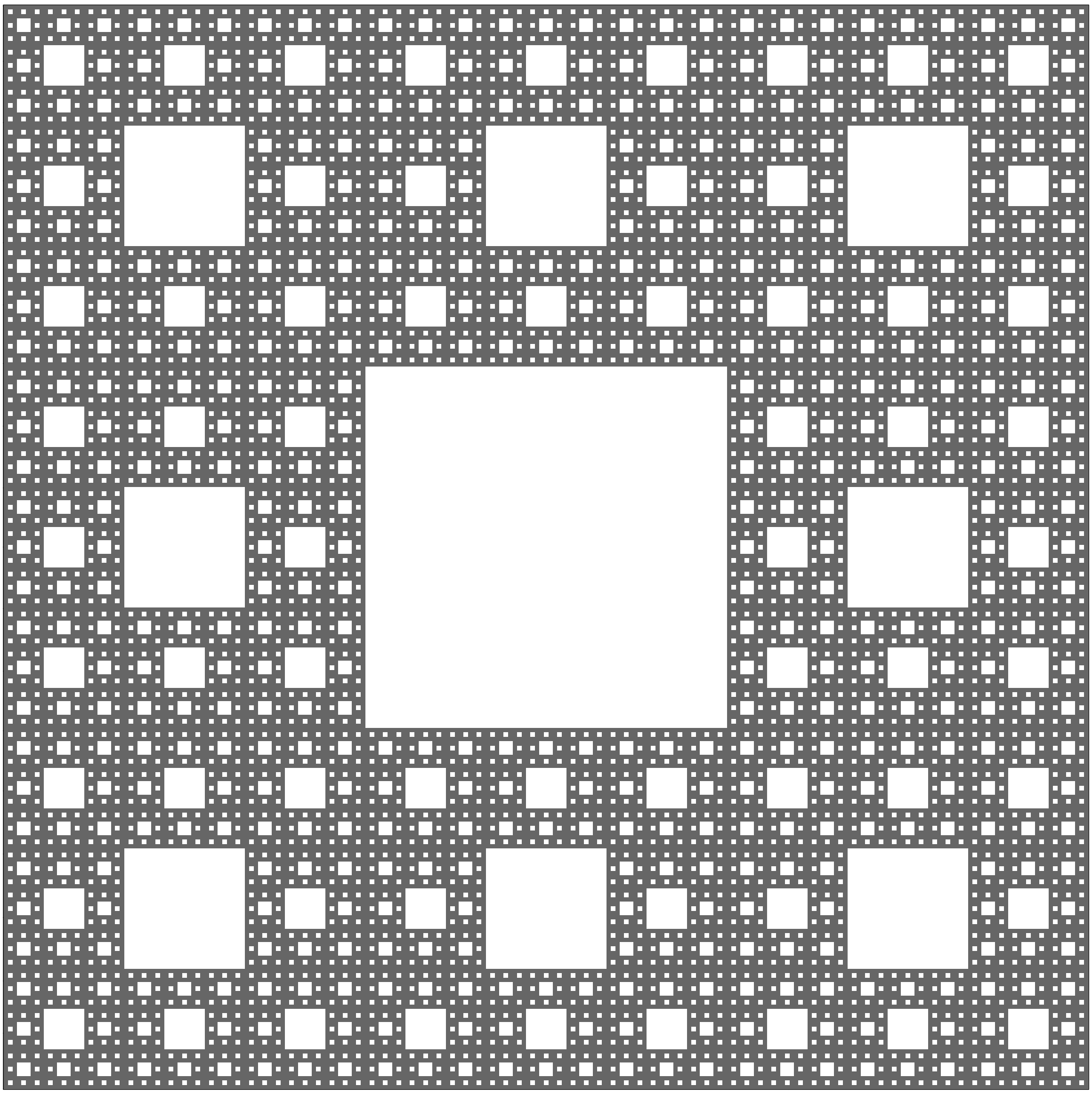
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(i_1, \dots, i_n) \tag{5}$$

jednobodový; příslušný bod označme $x(\{i_n\})$ a definujme $f(x(\{i_n\}))$ jako jediný bod průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T(i_1, \dots, i_n)\,. \tag{6}$$

Snadno se nahlédne, že definice je korektní, takže definuje jisté zobrazení $f : \langle 0,1\rangle \to_{\text{na}} P$; ani důkaz spojitosti této funkce není obtížný.

**Cvičení.** Pro každý bod $p \in P$ různý od vrcholů $a, b, c$ trojúhelníka $T$ najděte oblouky $ap$, $bp$ a $cp$ obsažené v $P$, jejichž jediným společným bodem je $p$.



Obr. 20. Vytváření Sierpińského koberce

10. **Univerzální Sierpińského křivka** (nebo též **Sierpińského koberec**) se zkonstruuje takto: Jednotkový čtverec $Q := \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ rozdělíme úsečkami rovnoběžnými s jeho stranami na devět shodných čtverců a vnitřek prostředního čtverce vynecháme; tím získáme 8 shodných čtverců $Q(i_1)$, $0 \le i_1 \le 7$. Analogickou operací provedenou s každým čtvercem $Q(i_1)$ získáme $8^2$ čtverců $Q(i_1, i_2) \subset Q(i_1)$, $0 \le i_2 \le 7$, atd. do nekonečna. Označíme-li

$$Q^n := \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,\dots,7\}^n} Q(i_1, i_2, \dots, i_n) \tag{7}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, je univerzální křivka definována jako průnik všech $Q^n$:

$$Q^\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^n . \tag{8}$$

(Viz obr. 20, kde je nakreslen průnik $Q^1 \cap \ldots \cap Q^5$).

Je zřejmé, že je to kontinuum řídké v rovině, tedy Cantorova křivka; platí přitom dvě důležitá tvrzení, z nichž dokážeme pouze druhé:

1. *Každou Cantorovu křivku lze homeomorfně zobrazit do $Q^\infty$.* [31])

2. *Řád rozvětvení množiny $Q^\infty$ je roven $\mathfrak{c}$ v každém bodě $p \in Q^\infty$.* [32])

D ů k a z . Pro stručnost pišme $P := Q^\infty$ a $P$ pak považujme za samostatný prostor. [33]) Kdyby existoval bod $p \in P$ tak, že $\operatorname{ord}_p < \mathfrak{c}$, měl by libovolně malá okolí $U(p)$ se spočetnou hranicí. Protože hranice je uzavřená množina, která roztíná $P$ mezi vnitřkem a vnějškem příslušné množiny, stačí ukázat, že *pro každou uzavřenou spočetnou množinu $A \subset P$ je množina $P - A$ souvislá.* Předpokládejme, že

$$P - A = G_1 \cup G_2 , \ \text{kde } G_1, G_2 \text{ jsou disjunktní otevřené množiny;} \tag{9}$$

máme dokázat, že jedna z množin $G_i$ je prázdná.

Označme

$$B(x) := \{(x, y);\ y \in \langle 0, 1\rangle\}, \quad C(y) := \{(x, y);\ x \in \langle 0, 1\rangle\} \tag{10}$$

a buď

$$X := \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ B(x) \subset P - A\}, \quad Y := \{y \in \langle 0, 1\rangle;\ C(y) \subset P - A\}. \tag{11}$$

Zvolme na okamžik pevně nějaký bod $x_0 \in X$. Pak je $B(x_0) \cap A = \emptyset$, a protože $B(x_0)$ je souvislá část množiny $P - A$, leží celá buď v $G_1$, nebo v $G_2$. Předpokládejme, že označení bylo zvoleno tak, že $B(x_0) \subset G_1$. Každá úsečka $C(y)$, kde $y \in Y$, leží také buď v $G_1$, nebo v $G_2$; protože protíná úsečku $B(x_0)$, a tedy i množinu $G_1$, je $C(y) \subset G_1$ pro všechna $y \in Y$. Každá úsečka $B(x)$, $x \in X$, protíná každou úsečku $C(y)$, $y \in Y$, a leží tedy z podobných důvodů také v $G_1$. Tím je dokázáno, že

$$Z := \bigcup_{x \in X} B(x) \cup \bigcup_{y \in Y} C(y) \subset G_1 . \tag{12}$$

Protože množina $A$ je spočetná, je množina $Z$ hustá v $P$, takže $P = \overline{Z} \subset \overline{G_1} \subset P - G_2$. Množina $G_2$ je tedy prázdná.

**Cvičení.** Podobně jako v případě Sierpińského trojúhelníkové křivky zkonstruujte *spojité zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na Sierpińského univerzální křivku.* □

11. *Je-li $P$ nerozložitelné kontinuum, je $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$ pro každé $p \in P$.*

D ů k a z . Je-li $U(p)$ okolí, pro něž je $P - \overline{U(p)} \neq \emptyset$, protíná každá kompozanta $K$ prostoru $p$ jak $U(p)$, tak i $P - \overline{U(p)}$, neboť je (podle věty 6.8) hustá v $P$. V důsledku toho je i $K \cap H(U(p)) \neq \emptyset$. Protože v $P$ existuje nespočetně mnoho disjunktních kompozant (viz větu 6.11), je množina $H(U(p))$ nespočetná, a má tedy mohutnost $\mathfrak{c}$.

12. Nechť $P$ je kontinuum složené z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ osy $x$ a půlkružnic

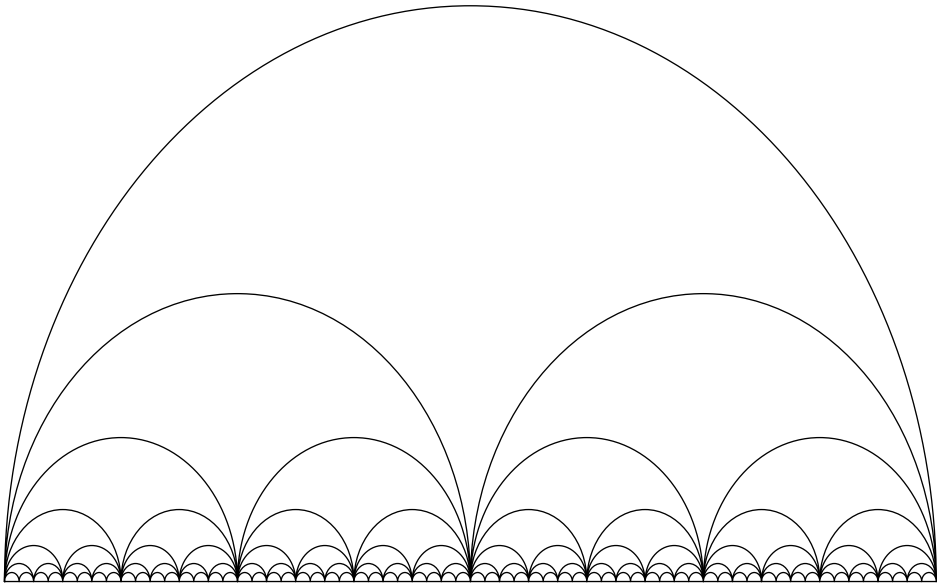
$$\Big(x - \frac{2m-1}{2^n}\Big)^2 + y^2 = \frac{1}{4^n} , \ y \geq 0 , \tag{13}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $1 \leq m \leq 2^{n-1}$. Pak je $\operatorname{ord}_p P = \omega$, je-li $p = (r, 0)$, kde $r \in \langle 0, 1\rangle$ je dyadicky racionální, a $\operatorname{ord}_p P = 2$ pro ostatní body $p \in P$. (Viz obr. 21.)

[31]) Proto se této Sierpińského křivce říká *univerzální*. Konstrukci univerzální křivky spolu s důkazem uvedeného tvrzení uveřejnil Sierpiński v článku v Comptes Rendus, Paris, 162 (1916), str. 629.

[32]) Viz Uryson: O Kantorovych mnogoobrazijach, část II, kap. I, §4, příklad 11.

[33]) To znamená, že slovy okolí, hranice atd. rozumíme okolí, hranice atd. v $P$.



Obr. 21. Vytváření křivky z příkladů 8.1, část 12

13. Kontinuum $P$ nechť se skládá z úsečky $V_0 := \langle (0,0); (1,0) \rangle$ na ose x, ze svislých úseček $S(n,k)$ a z vodorovných úseček $V(n,k)$, kde

$$S(n,k) := \Big\langle \Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\Big); \Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big) \Big\rangle, \quad V(n,k) := \Big\langle \Big(\frac{4k+1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big); \Big(\frac{4k+3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big) \Big\rangle \tag{14}$$

a kde $n \geq 0$, $0 \leq k < 2^n$. (Viz obr. 22.) Funkce $\operatorname{ord}_p P$ nabývá těchto hodnot:

$$\operatorname{ord}_p P = \begin{cases} 2, \text{ je-li buď } p = (0,0), \text{ nebo } p = (1,0), \\ 4, \text{ je-li } p = (x,0), \text{ kde } x \in (0,1) \text{ je dyadicky racionální číslo}, \\ 3, \text{ je-li } p = (x,0), \text{ kde } x \in (0,1) \text{ není dyadicky racionální číslo}; \\ 3, \text{ je-li } p \text{ průsečík } S(n,j) \text{ s } V(n,k), \\ 2 \text{ v ostatních bodech množiny } P - V_0. \end{cases} \tag{15}$$

14. *Každé racionální vlastní kontinuum je křivka,* protože každá neprázdná spočetná množina má dimenzi 0.

* * *

**Definice 8.3.** Je-li $\mathfrak{S} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nějaký neprázdný systém otevřených množin prostoru $P$ budeme říkat, že $p \in P$ je $\mathfrak{S}$-**regulární bod**, existují-li libovolně malá okolí $G_\alpha \in \mathfrak{S}$ bodu $p$. V opačném případě se bod $p$ nazývá $\mathfrak{S}$-**iregulární**.

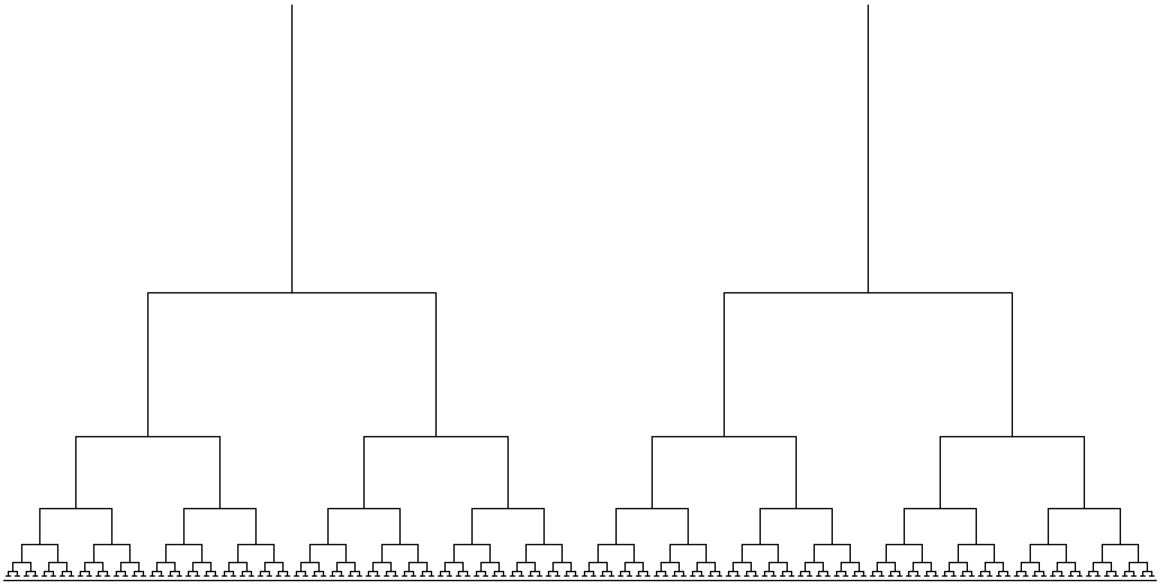
**Příklady 8.2** 1. Je-li $\mathfrak{S}$ systém všech obojetných podmnožin prostoru $P$, jsou $\mathfrak{S}$-regulárními body právě všechny body $p \in P$, v nichž je $\dim_p P = 0$.

2. Je-li $\mathfrak{S}$ systém všech otevřených podmnožin prostoru $P$, které mají konečnou hranici, jsou $\mathfrak{S}$-regulární právě všechny body $p \in P$, v nichž je $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, neboli právě všechny body, v nichž je $P$ regulární podle definice 8.2.

**Věta 8.1.** *Množina všech $\mathfrak{S}$-regulárních bodů je typu $G_\delta$, množina všech $\mathfrak{S}$-iregulárních bodů typu $F_\sigma$.*

D ů k a z . Je-li $M$ množina všech $\mathfrak{S}$-regulárních bodů, existují pro každé $x \in M$ množiny $G_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že

$$x \in G_n(x) \in \mathfrak{S}, \quad \operatorname{diam} G_n(x) < \frac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$



Obr. 22. Vytváření křivky z příkladů 8.1, část 13

Snadno nahlédneme, že

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x \in M} G_n(x);$$

vpravo je přitom množina typu $G_\delta$. Množina $P - M$ všech $\mathfrak{S}$-iregulárních bodů je proto typu $F_\sigma$.

**Věta 8.2.** *Nechť $P$ je kompaktní prostor a systém $\mathfrak{S}$ otevřených množin $G \subset P$ nechť má tyto vlastnosti:*

A. *Je-li $G \in \mathfrak{S}$ a je-li $G_1$ otevřená množina, pro niž je $H(G_1) \subset H(G)$, je i $G_1 \in \mathfrak{S}$.*

B. *Je-li $G_1 \in \mathfrak{S}$, $G_2 \in \mathfrak{S}$, je i $G_1 \cup G_2 \in \mathfrak{S}$.*

*Potom je každý $\mathfrak{S}$-iregulární bod $p \in P$ obsažen ve vlastním kontinuu $K_p$, které obsahuje pouze $\mathfrak{S}$-iregulární body.*

D ů k a z . Je-li $p \in P$, označme

(17)
$$K_p = \{x \in P;\ x \in G \in \mathfrak{S} \Rightarrow p \in \overline{G}\}$$

a dokažme tato tvrzení:

1. $K_p = p \Rightarrow p$ je $\mathfrak{S}$-regulární bod.
2. $p \neq q \in K_p \Rightarrow q$ je $\mathfrak{S}$-iregulární bod.
3. $K_p$ je uzavřená množina.
4. $K_p$ je souvislá množina.

Z nich ihned plyne tvrzení věty, protože $K_p$ je (pro každý bod $p \in P$) množina obsahující bod $p$; podle tvrzení 3 a 4 je to kontinuum, které je pro každý $\mathfrak{S}$-iregulární bod vlastní podle tvrzení 1.

Ad 1. Nechť $K_p = p$ a nechť $U$ je libovolné okolí bodu $p$. Protože $K_p = p$, neleží žádný bod $x \in H(U)$ v $K_p$ a lze mu proto přiřadit okolí $G(x) \in \mathfrak{S}$, pro něž je $p \notin \overline{G(x)}$. Protože $H(U)$ je kompaktní množina, lze ze systému těchto okolí vybrat konečnou posloupnost $G_1, \ldots, G_s$ tak, že $H(U) \subset G := \bigcup_{i=1}^{s} G_i$. Uzávěr množiny $G$ přitom neobsahuje bod $p$ a podle předpokladu B je $G \in \mathfrak{S}$.

Je-li $V = U - \overline{G}$, je $p \in V$ a

$$H(V) = H(U \cap \operatorname{Ext} G) \subset (H(U) \cap \overline{\operatorname{Ext} G})) \cup (\overline{U} \cap H(\operatorname{Ext} G)) \subset H(G),$$

protože $H(U) \cap \overline{\operatorname{Ext} G} \subset G \cap \overline{\operatorname{Ext} G} = \emptyset$ a $H(\operatorname{Ext} G) \subset H(G)$; podle předpokladu A je tedy $V \in \mathfrak{S}$.

Dokázali jsme tedy, že pro každé okolí $U$ bodu $p$ existuje okolí $V \subset U$ tohoto bodu tak, že $V \in \mathfrak{S}$; bod $p$ je tedy $\mathfrak{S}$-regulární.

Ad 2. Nechť $p \neq q \in K_p$; kdyby bod $q$ byl $\mathfrak{S}$-regulární, existovalo by okolí $U(q) \in \mathfrak{S}$ tak, že $p \notin \overline{U(q)}$. To však odporuje definici (17) množiny $K_p$.

Ad 3. Nechť $x_n \in K_p$ (pro každé $n \in \mathbb{N}$), $x_n \to x$ a nechť $G \in \mathfrak{S}$ je nějaké okolí bodu $x$; pak je $G$ také okolím některého z bodů $x_n$, a odtud plyne, že $p \in \overline{G}$. Je tedy $x \in K_p$.

Ad 4. Předpokládejme, že $K_p = F_1 \cup F_2$, kde $F_1$, $F_2$ jsou kompaktní, disjunktní množiny, přičemž $p \in F_1$; dokažme, že $F_2 = \emptyset$.

Z normality prostoru $P$ plyne existence otevřené množiny $U \supset F_2$, pro niž je $\overline{U} \cap F_1 = \emptyset$. Odtud plyne, že

$$H(U) \cap K_p = H(U) \cap (F_1 \cup F_2) = (H(U) \cap F_1) \cup (H(U) \cap F_2) = \emptyset,$$

takže stejně jako v důkazu tvrzení 1 existuje otevřená množina $G \in \mathfrak{S}$, pro niž je $H(U) \subset G$, $p \notin \overline{G}$.

Označíme-li $W = U \cup G$, je $H(W) \subset H(U) \cup H(G)$. Protože $\overline{U} = U \cup H(U) \subset U \cup G = W$, je $H(W) \cap H(U) = \emptyset$, takže $H(W) \subset H(G)$. Podle předpokladu A odtud plyne, že $W \in \mathfrak{S}$. Protože $\overline{W} = \overline{U} \cup \overline{G}$ neobsahuje bod $p$, je $K_p \cap W = \emptyset$, a tím spíše je $F_2 \cap W = \emptyset$. Protože však $F_2 \subset U \subset W$, je $F_2 = \emptyset$, jak jsme měli dokázat.

**Označení.** Pro každý prostor $P$ a každé $n \in \mathfrak{C}$ označme

$$P^{[n]} = \{x \in P;\ \operatorname{ord}_p P \leq n\}. \quad \square \tag{18}$$

Z předcházejících dvou vět plyne toto závažné tvrzení:

**Věta 8.3.** *Je-li $P$ kompaktní prostor, platí tato dvě tvrzení:*

1. *Všechny množiny $P^{[n]}$, kde $n \in \mathfrak{C}$, jsou typu $G_\delta$, zatímco množiny $P - P^{[n]}$ jsou typu $F_\sigma$. Speciálně: Je-li $P$ kontinuum, je množina $P^{[1]}$ všech jeho krajních bodů typu $G_\delta$.*

2. *Každý iregulární (resp. iracionální) bod $p \in P$ leží v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$, jehož všechny body jsou iregulární (resp. iracionální).*

D ů k a z . 1. Je-li $n \neq \omega$, definujme $\mathfrak{S}$ jako systém všech otevřených množin $G \subset P$, pro něž je $\operatorname{card} H(G) \leq n$; je-li $n = \omega$, nechť $\mathfrak{S}$ znamená systém všech otevřených množin $G \subset P$, jejichž hranice je konečná. V obou případech jsou pak $\mathfrak{S}$-regulární body právě všechny body z $P^{[n]}$. Podle věty 8.1 je tato množiny typu $G_\delta$, takže její doplněk je typu $F_\sigma$.

Je-li $P$ nevlastní kontinuum, je tvrzení o krajních bodech triviální; je-li $P$ vlastní kontinuum, je $P^{[0]} = \emptyset$ a $P^{[1]}$ je množina všech jeho krajních bodů.

2. Definujme $\mathfrak{S}$ jako systém všech otevřených množin $G \subset P$, které mají konečné (resp. spočetné) hranice. Snadno se ukáže, že $\mathfrak{S}$ má vlastnosti A, B z věty 8.2, a $\mathfrak{S}$-iregulární jsou právě všechny iregulární (resp. iracionální) body. Stačí tedy aplikovat větu 8.2.

**Věta 8.4.** *Každý kompaktní totálně nesouvislý prostor $P$ má dimenzi* 0.

D ů k a z . Buď $\mathfrak{S}$ systém všech obojetných množin prostoru $P$. Uvažme, že $\mathfrak{S}$-regulární jsou právě ty body $p \in P$, v nichž je $\dim_p P = 0$, a aplikujme větu 8.2. Kdyby v $P$ existoval nějaký $\mathfrak{S}$-iregulární bod, ležel by podle věty 8.3 v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$ (obsahujícím jen $\mathfrak{S}$-iregulární body); protože v totálně nesouvislém kompaktním prostoru $P$ žádná vlastní kontinua neexistují, jsou všechny jeho body $\mathfrak{S}$-regulární. Je tedy $\dim_p P = 0$ pro každé $p \in P$, tj. $\dim P = 0$.

Protože v $P$ neexistují žádná vlastní kontinua, je $\mathfrak{S}$-regulární každý bod $p \in P$.

**Věta 8.5.** *Vlastní kontinuum $P \subset \mathbb{R}^2$ je Cantorovou křivkou, právě když má dimenzi* 1.

D ů k a z . 1. Není-li $P$ řídké v rovině, obsahuje nějaký kruh, a má tedy dimenzi 2 (podle věty 7.6, protože otevřené kruhy jsou homeomorfní s rovinou).

2. Obráceně: Je-li $\dim P = 2$, existuje $p \in P$ tak, že $\dim_p P = 2$; lze jistě předpokládat, že $p = (0, 0)$. Nechť $K_r$ znamená kružnici o středu $p$ a poloměru $r > 0$. Z podmínky $\dim_p P = 2$ plyne existence takového $R > 0$, že

$$0 < r \leq 2R \Rightarrow H(U(p, r)) = K_r \cap P \text{ má dimenzi } 1; \tag{19}$$

množina $K_r \cap P$ není tedy totálně nesouvislá, a podle věty 8.4 obsahuje nějaké vlastní kontinuum, tedy nějaký (kruhový) oblouk. Nechť je to oblouk

$$N(r;\varphi_1,\varphi_2) := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi);\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}. \tag{20}$$

Označíme-li ještě

$$M(\varphi_1,\varphi_2) := \{r \in \langle R, 2R\rangle;\ N(r;\varphi_1,\varphi_2) \subset K_r \cap P\}, \tag{21}$$

je

$$\langle R, 2R\rangle = \bigcup_{\substack{\varphi_1<\varphi_2 \\ \varphi_1,\varphi_2 \text{ jsou racionální}}} M(\varphi_1,\varphi_2). \tag{22}$$

Protože $\langle R, 2R\rangle$ je množina druhé kategorie, nejsou všechny množiny $M(\varphi_1,\varphi_2)$ řídké; protože jsou uzavřené, obsahuje některá z nich nějaký interval $\langle r_1, r_2\rangle \subset \langle R, 2R\rangle$. Potom je příslušná množina $\langle r_1, r_2\rangle \times \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$ částí $P$, a kontinuum $P$ tedy není v rovině řídké.

**Věta 8.6.** *Je-li $P$ kontinuum ireducibilní mezi body $p, q$, je $\operatorname{ord}_x P > 1$ pro každý bod $x \in P$ různý od bodů $p, q$.*

D ů k a z . Předpokládejme, že existuje bod $x \in P$ různý od bodů $p, q$, pro něž je $\operatorname{ord}_x P = 1$. Takový bod má okolí $U = U(x)$, pro něž je $(p \cup q) \cap U = \emptyset$, přičemž $H(U) = y$ je jednobodová množina. Pak je $P - y = U \cup (P - \overline{U})$, kde množiny vpravo jsou oddělené. Podle věty 2.2 je $P - U$ kontinuum obsahující oba body $p, q$ a různé od $P$, takže $P$ není ireducibilní mezi $p$ a $q$.

**Věta 8.7.** *Je-li $P$ kontinuum, je množina $P - P^{[1]}$ semikontinuum, a totéž platí o každé množině $P - M$, kde $M \subset P^{[1]}$. Množina $P^{[1]}$ má dimenzi $\le 0$, množina $P - P^{[1]}$ je hustá v $P$.*

D ů k a z . Nechť body $p, q$ leží v množině $P - M$, kde $M \subset P^{[1]}$. Podle věty 6.2 existuje kontinuum $C \subset P$ ireducibilní mezi body $p, q$, podle věty 4.2 je $\operatorname{ord}_x C > 1$ pro každé $x \in C - (p \cup q)$, a tím spíše je pak $\operatorname{ord}_x P > 1$, takže $x \in P - M$. Je tedy $C \subset P - M$; $P - M$ je semikontinuum, protože pro každé dva body $p, q$ v $P - M$ existuje kontinuum $C \subset P - M$, které je obsahuje.

Každý bod $x \in P^{[1]}$ má okolí $U_n$, jejichž průměr konverguje k nule a jejichž hranice $H(U_n) = \{z_n\}$ je jednobodová množina; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{U_n} \ne P$. Zvolme nějaké $y_n \in P - \overline{U_n}$ a $C_n \subset P$ nechť je kontinuum ireducibilní mezi body $x, y_n$. Pak je $H(U(x)) \cap C_n \ne \emptyset$, tj. $z_n \in C_n$; podle věty 8.6 je $\operatorname{ord}_{z_n} C_n > 1$, tedy i $\operatorname{ord}_{z_n} P > 1$. Žádné $z_n$ neleží tedy v $P^{[1]}$, tj. $H(U_n) \cap P^{[1]} = \emptyset$ pro každé $n$. Bod $x \in P^{[1]}$ má tedy libovolně malá okolí $U_n$, jejichž hranice neprotíná $P^{[1]}$; to znamená, že $\dim_x P^{[1]} \le 0$. Protože tato nerovnost platí pro každý bod $x \in P^{[1]}$, je $\dim P^{[1]} \le 0$, jak jsme měli dokázat.

Protože pro každý bod $x \in P^{[1]}$ mají průměry příslušných okolí $U_n$ limitu 0, je bod limitou posloupnosti příslušných bodů $z_n \in P - P^{[1]}$; množina $P - P^{[1]}$ je tedy hustá v $P$.

**Poznámka 8.3.** Jak ukazuje následující příklad, *existují rovinné křivky, pro něž je i množina $P^{[1]}$ hustá v $P$.* Vzhledem k tomu, že podle věty 8.3 je množina $P^{[1]}$ typu $G_\delta$, je pak druhé kategorie (v $P$), takže množina $P - P^{[1]}$ je první kategorie.[33]) V smyslu kategorií je tedy množina všech krajních bodů takové křivky $P$ „daleko robustnější“ než množina všech ostatních bodů z $P$.

**Příklad 8.3.** Definujme nejdříve „operaci $I$“, která k dané úsečce vytvoří jistý nekonečný systém úseček na ní kolmých. Je-li dána úsečka $C = \langle a; b\rangle \subset \mathbb{R}^2$, kde $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, označme

$$ab := (a_2 - b_2, b_1 - a_1) \tag{23}$$

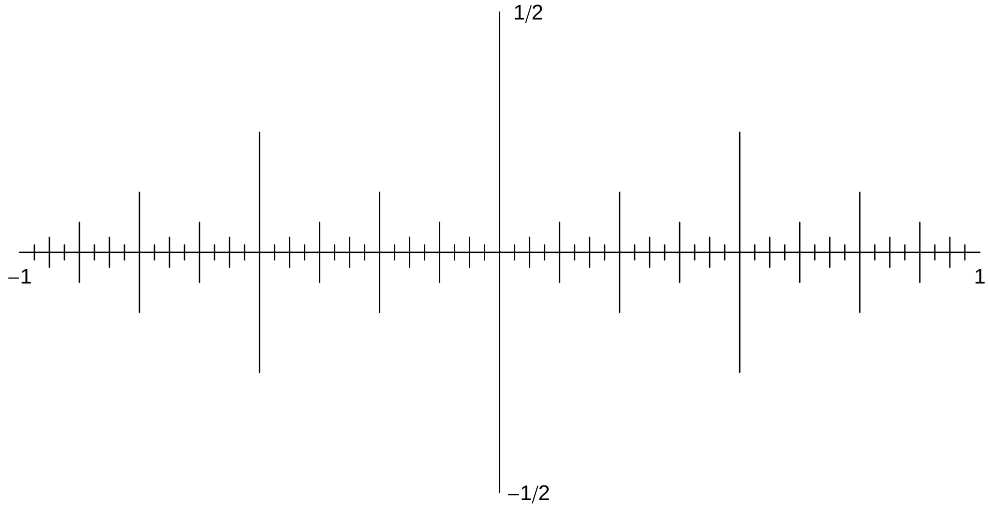
vektor kolmý k $b - a$, jehož délka je rovna délce úsečky $C$.

$I(C)$ nechť je systém všech úseček $u(m, n)$ s krajními body

$$a + \frac{2m-1}{2^n}(b - a) \pm \frac{ab}{2^{n+1}}, \ \text{ kde } 1 \le m \le 2^{n-1} \text{ a } n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Nechť $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$; systém $I_1 := I(C)$ se pak skládá ze všech svislých úseček, které protínají osu x v bodech tvaru $((2m-1)/2^n, 0)$ a jejichž krajní body mají od osy x vzdálenost $1/2^{n+1}$.

[33]) Množina $A$ typu $G_\delta$ hustá v $P$ je průnikem jisté posloupnosti otevřených množin $A_n$ hustých v $P$; doplňky $P - A_n$ množin $A_n$ jsou řídké, jejich sjednocení $P - A$ je množina první kategorie. Typickým příkladem husté množiny typu $G_\delta$ je množina všech iracionálních čísel v $\mathbb{R}$.




Obr. 23a.

Je-li již pro některé $n \in \mathbb{N}$ definován systém $I_n$, buď $I_{n+1}$ sjednocení všech systémů $I(C')$, kde $C' \in I_n$. Množinu $P_n$ definujme jako sjednocení úsečky $\langle a\,; b\rangle$ se všemi úsečkami systémů $I_1, \ldots, I_n$. Na obr. 23b jsou nakresleny všechny úsečky systému $P_3$, jejichž délka je $\geq 2^{-5}$. [34])

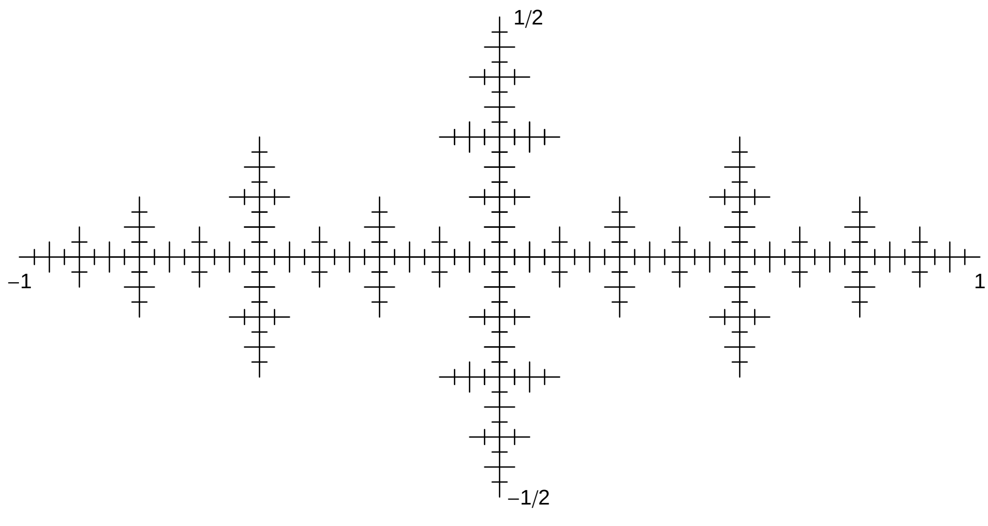
Množiny $P_n$ jsou kontinua tvořící rostoucí posloupnost; sjednocení všech těchto kontinuí je souvislá množina, takže její uzávěr

$$P := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n} \tag{25}$$

je kontinuum. Protože

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^{[1]} \subset P^{[1]} \tag{26}$$

a protože množina vlevo je zřejmě hustá v $P$, platí totéž tím spíše o množině vpravo. [35])




Obr. 23b.

[34]) Systémy $I_n$, kde $n > 3$, žádné takové úsečky neobsahují.

[35]) Podrobný rozbor této křivky najde čtenář v [4], str. 615 – 630. Kromě obyčejných a krajních bodů obsahuje křivka $P$ spočetnou množinu bodů rozvětvení, z nichž každý má řád 4.

**Věta 8.8.** *Je-li $P$ kompaktní prostor, je množina všech jeho iracionálních bodů buď prázdná, nebo iregulární.*

D ů k a z . Máme dokázat implikaci

$$\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c} \Rightarrow \operatorname{ord}_p(P - P^{[\aleph]}) > \omega\,, \tag{27}$$

neboli implikaci

$$\operatorname{ord}_p(P - P^{[\aleph]}) \le \omega \Rightarrow \operatorname{ord}_p P \le \aleph\,. \tag{27'}$$

Premisa implikace (27′) znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $G$ bodu $p$ tak, že $\operatorname{diam} G < \varepsilon$ a že množina $A := H(G) - P^{[\aleph]}$ je konečná. Protože každá konečná množina je typu $G_\delta$, je doplněk $B := H(G) \cap P^{[\aleph]}$ množiny $A$ v $H(G)$ množina typu $F_\sigma$, takže $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, kde množiny $B_n$ jsou uzavřené.

Označme $\mathfrak{S}_n$ systém všech otevřených množin $M$ prostoru $P$, které mají spočetné hranice, průměr $< 1/n$ a pro něž je

$$\rho(p, M) \ge \tfrac{1}{2}\rho(p, H(G))\,. \tag{28}$$

Každý systém $\mathfrak{S}_n$ pokrývá množinu $B$, a tím spíše i každou z množin $B_n$. Podle Borelovy věty lze proto (pro každé $n \in \mathbb{N}$) vybrat konečný systém $\mathfrak{S}'_n \subset \mathfrak{S}_n$, který také pokrývá $B_n$; protože množiny $M$, pro něž je $B_n \cap M = \emptyset$, můžeme ze systémů $\mathfrak{S}'_n$ odstranit, aniž se cokoli podstatného změní, můžeme předpokládat, že $M \in \mathfrak{S}'_n \Rightarrow M \cap B_n \ne \emptyset$.

Seřadíme-li všechny prvky systému $\mathfrak{S}' := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}'_n$ do posloupnosti $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, je $\operatorname{diam}(M_n) \to 0$. Položíme-li

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\,, \quad V := G - \overline{U}\,, \tag{29}$$

je $B \subset U$, $p \in V$ (podle (24)) a $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$. Dokažme, že $H(V)$ je spočetná množina.

Protože $H(V) \subset (H(G) - U) \cup H(U) \subset A \cup H(U)$ a protože množina $A$ je konečná, stačí ukázat, že $H(U)$ je spočetná množina. Je však

$$\overline{U} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} M_k} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \cup H(G)\,, \tag{30}$$

neboť z podmínek $\operatorname{diam} M_n \to 0$, $M_n \cap H(G) \ne \emptyset$ plyne, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} M_k} \subset H(G)\,. \tag{31}$$

Je tedy

$$H(U) = \overline{U} - U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{M_n} - U) \cup (H(G) - U) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H(M_n) \cup A\,, \tag{32}$$

a poslední množina je spočetná.

**Poznámka 8.4.** Poznamenejme, že podle věty 8.3 každý iregulární (resp. iracionální) bod (kompaktního prostoru) $P$ leží v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$ obsahujícím jen iregulární (resp. iracionální) body; pokud tedy není množina všech jeho iracionálních bodů prázdná, je sjednocením jistého (neprázdného) systému vlastních kontinuí, načež i množina všech iregulárních bodů z $P$ má podobnou vlastnost.

Obsahuje-li $P$ aspoň jeden iracionální bod, lze tvrzení věty 8.8 charakterizovat rovností

$$(P - P^{[\aleph]})^{[\omega]} = \emptyset\,. \tag{33}$$

**Poznámka 8.5.** Slovo „iregulární“ *nelze* ve větě 8.8 nahradit slovem „iracionální“, protože existují kompaktní prostory, v nichž množina všech bodů s řádem rozvětvení $\mathfrak{c}$ neobsahuje žádný bod s řádem rozvětvení $\mathfrak{c}$ (takže všechny její body jsou jejími racionálními body).

Příklad kompaktního prostoru s uvedenou vlastností najdeme v [2], str. 209 (bez důkazu). Existují i iracionální křivky $K$, pro něž je $K - K^{[\aleph]}$ racionální – viz např. [3], str. 143 – 148. (Příklady zde neuvádíme, protože značně komplikované jsou nejen příslušné důkazy, ale již sama konstrukce.)

Porovnejme však větu 8.8 s tímto tvrzením:

**Věta 8.9.** *Je-li $P$ iracionální kompaktní prostor a je-li $Q := P - P^{[\aleph]}$, je podprostor $\overline{Q}$ iracionální v každém bodě z $Q$. Jinými slovy:*

$$\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c} \Rightarrow \operatorname{ord}_p \overline{P - P^{[\aleph]}} = \mathfrak{c}. \tag{34}$$

D ů k a z . Nechť $p \in P$ je bod, v němž je podprostor $\overline{Q}$ racionální. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje pak okolí $G$ bodu $p$ tak, že diam $G < \varepsilon$ a že množina $A := H(G) \cap \overline{Q}$ je spočetná; protože je kompaktní, je typu $G_\delta$. Množina $B := H(G) - \overline{Q}$, obsahující jen racionální body prostoru $P$, je v důsledku toho typu $F_\sigma$. Další postup je stejný jako v důkazu věty 8.8 a jako tam se dokáže, že $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$.

Je-li tedy $p$ racionálním bodem podprostoru $\overline{Q}$, je též racionálním bodem prostoru $P$. Je-li bod $p$ iracionálním bodem prostoru $P$, tj. je-li $p \in Q$, tj. $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$, je $p$ iracionálním bodem podprostoru $\overline{Q}$, tj. $\operatorname{ord}_p \overline{Q} = \mathfrak{c}$; právě to jsme měli dokázat.