Elementy teorie Lebesgueovy míry a integrálu

Ilja Černý

Původně interní text pro studenty učitelského studia na PF TU v Liberci
(páté, upravené a doplněné vydání)

Sázeno systémem $\mathcal{AMS}$-TeX, rozsah 74 stran

O B S A H

L I T E R A T U R A

[1] Jarník, V.: Diferenciální počet II, 3. vydání, Academia, Praha 1976 (cituje se jako DII)
[2] Jarník, V.: Integrální počet II, 3. vydání, Academia, Praha 1984 (cituje se jako JII)
[3] Natanson, I. P.: Theory of Functions of a Real Variable, Ungar, New York 1964
[4] Rudin, W.: Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha 1977
[5] Saks, S.: Théorie de l'intégrale, Monografje matematyczne, Warszawa 1933
[6] Sikorski, R.: Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných, Academia, Praha 1973
[7] Černý, I.: Úvod do inteligentního kalkulu (1000 příkladů z elementární analýzy), Academia, Praha 2002
[8] Černý, I.: Úvod do inteligentního kalkulu 2 (1000 příkladů z pokročilejší analýzy), Academia, Praha 2005

Poslední dvě knihy jsou bezplatně k dispozici na Internetu.

Liberec – únor 1999, Praha – říjen 2014

Proč Lebesgueův integrál?

Proto, že jde o integrál, který má v porovnání s jinými druhy integrálu (především s integrálem Riemannovým) daleko jednodušší vlastnosti, takže se s ním nesrovnatelně lépe pracuje.[1]) Na jeho optimální definici a vlastnostech se pracuje více než sto let. Od začátku dvacátého století, kdy byl definován, prošel dlouhou řadou úprav směřujících k jeho zjednodušení. Ani jeho současné definice nejsou bohužel příliš jednoduché, ale čtenář má na vybranou dvě možnosti: Riemannův integrál s celkem snadnou a rychlou definicí, ale s vlastnostmi v porovnání s integrálem Lebesgueovým neporovnatelně horšími (což podstatně znesnadňuje práci s ním), nebo seznámení se s (komplikovanější a delší) definicí Lebesgueova integrálu, což je však jednorázový akt vyvážený tím, že aplikace (výpočty, ale i „teoretické úvahy") může pak provádět daleko snadněji po celý zbytek svého života. Nestojí to zato?

V čemž se vlastně oba integrály liší? Uvedeme tři příklady:

1. Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí je relativně malá, integrační obor musí být „po geometrické stránce" poměrně jednoduchý a omezený, integrovatelná funkce musí být omezená a v jistém smyslu „blízká" spojité funkci. Integračním oborem Lebesgueova integrálu z nezáporné funkce může být jakákoli množina, „s níž se lze v praxi setkat" – nelze integrovat, zhruba řečeno, jen přes množiny, k jejichž konstrukci je nutný tzv. axiom výběru. Podobně je tomu s lebesgueovskou integrovatelností funkcí: Spojité nezáporné funkce jsou integrovatelné, (bodové) limity takových funkcí, tj. funkce 1. Baireovy třídy, také, limity posloupností funkcí 1. třídy také, atd. *Neintegrovatelnou nezápornou funkci nemůžeme při běžných aplikacích potkat.* Obor funkcí, které mají Lebesgueův integrál, je nesrovnatelně rozsáhlejší, než je obor funkcí integrovatelných riemannovsky.

2. Dvě základní věty o výpočtu vícerozměrného integrálu, a to *Fubiniho věta* o převedení vícerozměrného integrálu na sled dvou méněrozměrných integrálů a *věta o substituci*, která leckdy dovoluje převést integrál, který nedovedeme spočítat přímo, na integrál, jehož výpočet je možný, jsou pro Riemannův integrál prakticky nepoužitelné: Existence integrálu např. přes čtverec není postačující podmínkou existence jednorozměrných integrálů (přes intervaly), na něž bychom chtěli integrál převést. Narozdíl od toho zaručuje existence dvojrozměrného Lebesgueova integrálu existenci obou integrálů jednorozměrných. Mnohé jednoduché substituce mohou převádět omezený interval na neomezený (např. substituce tg převádí interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ na $\mathbb{R}$), ale Riemannův integrál přes neomezený interval neexistuje. Pro Lebesgueův integrál není neomezenost integračního oboru (a neomezenost integrandu) nutnou podmínkou existence. Splňuje-li substituce patřičné podmínky, nemusíme u Lebesgueova integrálu ověřovat existenci *před* substitucí; stačí, když existuje integrál *po* substituci.

3. I v aplikacích matematiky v jiných oborech potřebujeme provádět *limitní přechody* „za znamením integrálu". To u Riemannova integrálu naráží na skutečnost, že limitním přechodem může z integrovatelných funkcí snadno vzniknout funkce neintegrovatelná. U Lebesgueova integrálu jsou limitní přechody za znamením integrálu možné za velmi obecných (a tedy dobře ověřitelných) předpokladů. Typickým příkladem je toto jednoduché tvrzení, jehož přesné a obecnější znění najde čtenář v oddílu 5: *Každou řadu spojitých nezáporných funkcí lze integrovat člen po členu.*

Další argumenty pro preferenci Lebesgueova integrálu najde čtenář např. v oddílu 7 pojednávajícím o tzv. Hilbertově prostoru $\mathcal{L}^2$, který má „rozumné" vlastnosti jen v případě, že je definován na základě Lebesgueova integrálu.

*****

Učební text o Lebesgueově integrálu, který čtenářům tímto nabízím, se snaží definovat (přes měřitelnost množin a funkcí) integrál co nejpřímější cestou. Cílem bylo naučit studenty „kvalifikovaně zacházet" s integrálem, zejména s integrálem vícerozměrným. Text je stručný (protože jeho obsahu byl na učitelském studiu Technické univerzity v Liberci věnován jen jeden semestr), ale doufám, že dostatečně srozumitelný pro čtenáře, který má za sebou základní průpravu z diferenciálního počtu jedné i několika proměnných, z integrálního počtu jedné proměnné a přiměřené znalosti z obecné teorie množin, hlavně z metrických vlastností podmnožin eukleidovských prostorů. Není to text k četbě v dopravních prostředcích; každou řádku je třeba promýšlet, snažit se pochopit příslušné myšlenkové pochody a hlavně umět samostatně reprodukovat již nastudovanou látku. Pouhým čtením se nikdo

[1]) Obracím se jen na čtenáře, kteří se nedomnívají, že každý integrál, který napíší, existuje, a každou operaci s ním, kterou potřebují, lze (bez jakýchkoli předpokladů) provést.

matematiku ještě nenaučil; nutný je aktivní přístup. Doporučuji proto části, jejichž důkazy jsem čtenáři záměrně přenechal (abych jej přiměl ke spolupráci), poctivě do všech detailů promyslit. Ne všechny věty bylo možné v jednosemestrovém kurzu dokázat. Důkazy jsem však vynechával jen tam, kde důkaz není nutnou podmínkou pochopení příslušného tvrzení. Platí to zejména o Fubiniho větě a větě o substituci, které lze správně aplikovat i bez znalosti jejich důkazů. Čtenáři, který chce uvedené výsledky „jen“ aplikovat, absence některých důkazů patrně nebude vadit; čtenáře, který nemá rád věty bez důkazů, odkazuji na příslušných místech na dostupnou literaturu.

Text obsahuje pár ilustračních příkladů. Chce-li se čtenář zdokonalit ve výpočetní technice Lebesgueova integrálu, má k dispozici řadu učebnic a sbírek příkladů. Dovoluji si upozornit zejména na Jarníkův Integrální počet 2, kde je výpočetní technice věnována celá kapitola VII. Na internetu jsou uloženy k volnému stažení i sbírky příkladů [7] a [8], v nichž čtenář najde i řadu obrázků křivek a ploch, o nichž je řeč v dodatku k oddílu 6 (lemniskata, Descartesův list, atd.)

Oddíl 7 věnovaný základním poznatkům o Hilbertově prostoru *není* pokračováním „početní techniky“ Lebesgueova integrálu (i když se tato technika v tomto oddílu bohatě využívá). Čtenář, který se zajímá jen o to, „jak se s Lebesgueovým integrálem počítá“, ji proto může vynechat. Rád bych však poznamenal, že Hilbertův prostor je nejbližším, ale nekonečněrozměrným „příbuzným“ eukleidovských prostorů, které v jistém smyslu všechny obsahuje. Je nedílnou součástí funkcionální analýzy a potřebují jej nejen matematici, ale např. i (kvantoví) fyzici. Může být zajímavý i pro čtenáře, které zajímá, zdali v nekonečněrozměrném prostoru platí např. analogie Pythagorovy věty.

Některá označení

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-,\ \mathbb{R}^p,\ \mathbb{R}^*$$

znamenají po řadě množinu všech přirozených, celých, racionálních, iracionáních čísel, množinu všech (konečných) kladných a všech (konečných) záporných čísel a p-rozměrný eukleidovský prostor (s kartézskou metrikou); $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Je-li $\mathcal{P}$ nějaký systém množin, značíme $\bigcup \mathcal{P}$ sjednocení všech množin tohoto systému. $U(x, \varepsilon)$ je epsilonové okolí bodu x; znak $U(x)$ užíváme pro označení (kruhových) okolí bodu x.

Derivace f' vektorové funkce $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ několika proměnných je matice, jejímiž členy jsou parciální derivace funkcí f_i podle jednotlivých proměnných. (Viz např. [6] nebo [8], str. 95.)

Další znaky jsou vysvětleny v textu příslušných oddílů.

Poděkování

Srdečně děkuji panu doc. RNDr. Pavlu Pyrihovi z katedry matematické analýzy na MFF UK za zařazení tohoto textu na Internet.

0. Některé důležité pojmy a věty

Metrický prostor X se nazývá **kompaktní**, je-li možné z každé posloupnosti bodů $x_n \in X$ vybrat posloupnost, která v X konverguje. Podmnožina M metrického prostoru X se nazývá **kompaktní**, je-li kompaktní *jakožto podprostor* prostoru X, tj. je-li možné z každé posloupnosti bodů $x_n \in M$ vybrat posloupnost, která má limitu v M. [2])

Jak známo,

(1) *množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.* $\square$

Je-li $\mathcal{P}$ nějaký systém množin, užívejme symbol $\cup\mathcal{P}$ pro *sjednocení* všech množin tohoto systému. Platí tato velice důležitá

Borelova věta. *Je-li X kompaktní metrický prostor a je-li $\mathcal{P}$ systém otevřených množin, pro něž je $\cup\mathcal{P} = X$, existuje konečný systém $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ tak, že $\cup\mathcal{P}_1 = X$.*

D ů k a z . 1. Dokažme nejdříve, že z kompaktnosti prostoru (X, ρ) plyne, že

(2) *pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje konečná množina $K \subset X$ tak, že* $X = \bigcup_{x \in K} U(x, \varepsilon)\,.$

Postupujme nepřímo, tj. předpokládejme, že existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tak, že pro žádnou konečnou množinu $K \subset X$ *není* $X = \bigcup_{x\in K} U(x, \varepsilon)$, a dokažme, že X pak není kompaktní. Protože prvky každé konečné množiny lze seřadit do posloupnosti a protože $y \notin U(x, \varepsilon)$ je totéž co $\rho(y, x) \geq \varepsilon$, můžeme ekvivalentně říci, že pro každou (konečnou) posloupnost bodů $x_1, \dots, x_n$ z X existuje bod $x_{n+1} \in X$ tak, že $\rho(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ pro $j = 1, \dots, n$.

Má-li prostor X tuto vlastnost, není prázdný, a můžeme v něm tedy zvolit nějaký bod x_1. Jsou-li již pro některé $n \in \mathbb{N}$ sestrojeny body $x_1, \dots, x_n$ tak, že $1 \leq i < j \leq n \Rightarrow \rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, existuje podle předpokladu bod $x_{n+1} \in X$ tak, že $\rho(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ pro každé $i = 1, \dots, n$.

Tím je indukcí sestrojena posloupnost bodů $x_n \in X$, pro niž platí implikace: $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Nejen tato posloupnost, ale ani žádná posloupnost z ní vybraná není cauchyovská; tím spíše ovšem není konvergentní. Prostor X není kompaktní.

2. Buď X kompaktní prostor; pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $K_n \subset X$ konečná množina, pro niž je $X = \bigcup_{x\in K_n} U(x, 1/n)$. Předpokládejme, že je dán nějaký systém $\mathcal{P}$ otevřených podmnožin prostoru X, pro který je $\cup\mathcal{P} = X$. Dokážeme-li, že

(3) *existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $x \in K_n$ existuje $G_x \in \mathcal{P}$ tak, že* $U(x, 1/n) \subset G_x$,

bude Borelova věta dokázána, protože systém $\mathcal{P}_1$ všech $G_x \in \mathcal{P}$, kde $x \in K_n$, je konečný a splňuje zřejmě podmínku $\cup\mathcal{P}_1 = X$.

Důkaz provedeme sporem: Jestliže podmínka (3) neplatí, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ bod $x_n \in K_n$ tak, že *pro žádné $G \in \mathcal{P}$ není $U(x_n, 1/n) \subset G$*. Protože prostor X je kompaktní, existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ a bod $x \in X$ tak, že $x_{n_k} \to x$. Protože $\cup\mathcal{P} = X$, existuje $G \in \mathcal{P}$ tak, že $x \in G$; protože G je otevřená množina, existuje $\delta \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(x, \delta) \subset G$. Jistě existuje k tak velké, že je $1/n_k < \delta/2$ a zároveň $\rho(x_{n_k}, x) < \delta/2$.

Potom však

$$y \in U(x_{n_k}, 1/n_k) \Rightarrow \rho(y, x) \leq \rho(y, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \delta \Rightarrow y \in U(x, \delta) \subset G,$$

takže $U(x_{n_k}, 1/n_k) \subset G \in \mathcal{P}$; to však je ve sporu s tím, jak byly vybrány body x_n.

---

[2]) Splňuje-li $M \subset X$ *slabší* podmínku, že z každé posloupnosti bodů $x_n \in M$ lze vybrat posloupnost s limitou v X, říkáme, že M je *relativně kompaktní* nebo také *totálně omezená*. Tento obecnější pojem nebudeme potřebovat a upozorňujeme na něj zejména proto, abychom v definici kompaktnosti M nezapomínali, že žádáme, aby limita posloupnosti vybrané z posloupnosti bodů $x_n \in M$ ležela v M! Poznamenejme ještě, že v eukleidovských prostorech je totální omezenost množiny totéž co její omezenost; rozdílné jsou tyto dva pojmy např. ve všech *nekonečněrozměrných* normovaných lineárních prostorech.

Tím je Borelova věta dokázána. $\square$

O systému $\mathcal{P}$ množin, pro něž množina $\cup\mathcal{P}$ obsahuje množinu M, se říká, že tuto množinu **pokrývá** nebo že je **pokrytím** této množiny. Je zřejmé, že právě dokázanou verzi Borelovy věty lze modifikovat např. takto:

Borelova věta (2. verze). *Je-li kompaktní podmnožina M (libovolného) metrického prostoru X pokryta systémem $\mathcal{P}$ množin otevřených v X, existuje konečný systém $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$, který také pokrývá M.*

D ů k a z provedeme tak, že systém $\mathcal{P}$ nahradíme systémem $\mathcal{P}^* := \{G \cap M;\ G \in \mathcal{P}\}$ množin otevřených v M a s množinou M zacházíme jako se samostatným prostorem. Je-li sjednocením množin $G_1 \cap M, \ldots, G_n \cap M$ z $\mathcal{P}^*$ množina M, je $M \subset G_1 \cup \cdots \cup G_n$. $\square$

Množina M se nazývá **spočetná**, existuje-li prosté zobrazení $\varphi : M \to \mathbb{N}$. Jinými slovy, M je spočetná množina, je-li možné všechny její prvky srovnat do (konečné nebo nekonečné, event. prázdné) posloupnosti. Ještě jinak: M je spočetná právě tehdy, když je buď konečná, nebo existuje prosté zobrazení $\mathbb{N}$ na M.

Snadno se dokáží tato tvrzení:

(4) *Každá část spočetné množiny je spočetná*;

(5) *sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetné*;

(6) *kartézský součin konečného počtu spočetných množin je spočetný*;

(7) *obraz při jakémkoli zobrazení spočetné množiny je spočetný*.

Dokažme však, že

(8) *interval $\langle 0, 1)$ není spočetný*.

D ů k a z . Předpokládejme opak; pak existuje posloupnost, jejímiž členy jsou všechna čísla z $\langle 0, 1)$, a každé takové číslo lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru dekadického zlomku tvaru $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, předpokládáme-li, že mezi ciframi *nejsou* od určitého indexu samé devítky. Nahradíme-li každé číslo z $\langle 0, 1)$ takovýmto jeho dekadickým zlomkem, dostaneme posloupnost

$$
\begin{array}{c}
0, a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \ldots \\
0, a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0, a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{9}
$$

dekadických zlomků reprezentujících všechna čísla z intervalu $\langle 0, 1)$. Definujeme-li však $a_n := 5$, není-li $a_{nn} = 5$, a $a_n := 1$, je-li $a_{nn} = 5$, je zřejmé, že číslo x, jehož dekadický zlomek je $0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$, leží v $(0, 1)$, ale není rovno žádnému číslu z (9), neboť se od n-tého čísla v (9) liší n-tou cifrou za desetinnou čárkou.

Tím je nespočetnost intervalu $\langle 0, 1)$ dokázána; z toho, co bylo řečeno, snadno plyne, že obecněji

(10) *každý jednorozměrný interval je nespočetný*. $\square$

Protože prvky každé spočetné množiny lze „očíslovat" přirozenými čísly n buď od 1 do jistého celého čísla $q \geq 0$ nebo do nekonečna, není žádným omezením obecnosti, budeme-li předpokládat, že se tak stalo. V souvislosti s tím budeme užívat symbolů

$$\sum_n a_n\,, \quad \bigcup_n M_n\,, \quad \bigcap_n M_n \tag{11}$$

pro součet spočetně mnoha čísel a_n a pro sjednocení resp. průnik spočetně mnoha množin M_n. Poznamenejme, že se v dalším budou vyskytovat jen absolutně konvergentní číselné řady (mezi něž budeme počítat i všechny konečné řady konečných čísel, v tom i řadu prázdnou) a řady s nezápornými, ne nutně konečnými členy; každá z uvedených řad má přesně definovaný součet, nezávislý na pořadí sčítanců. Součet řady $\sum_n a_n$ s nezápornými členy a_n je vždy nezáporný. Není-li řada s nezápornými členy prázdná, je její součet roven $\sup\{\sum_{n\in K} a_n\,;\ K\subset\mathbb{N}$ je konečná množina$\}$. Konvergentní řady mají konečné součty, divergentní řady (s nezápornými členy) součet $+\infty$. Speciálně: Je-li některý člen řady s nezápornými členy roven $+\infty$, řada diverguje; prázdná řada má součet 0.

1. Intervaly a jejich konečná sjednocení

Jsou-li M, N dvě podmnožiny nějakého metrického prostoru, označme podle Sakse [3])

(1) $$M \odot N := \overline{\operatorname{int}(M\cap N)}\,, \quad M \ominus N := \overline{\operatorname{int}(M - N)}\,.$$

Budeme říkat, že množiny M, N **se překrývají**, je-li $M\odot N \neq \emptyset$; protože $\operatorname{int}(M\cap N) = \operatorname{int} M \cap \operatorname{int} N$, je to totéž, jako když řekneme, že M, N mají společné některé vnitřní body.

Intervalem v $\mathbb{R}^p$ neboli **p-rozměrným intervalem** budeme rozumět kartézský součin tvaru

(2) $$I = I_1 \times \cdots \times I_p\,,$$

kde I_k jsou jednorozměrné intervaly.

Jak snadno nahlédneme, je interval (2) omezený resp. otevřený resp. kompaktní právě tehdy, když totéž platí pro všechny intervaly I_k.

Umluvme se, že slovo **interval** bude znamenat *kompaktní p-rozměrný* interval, pokud nebude výslovně uvedeno něco jiného nebo pokud to nebude ze situace jednoznačně vyplývat. (Pokud nebudeme mít na mysli jen kompaktní intervaly, budeme zpravidla mluvit o „obecných intervalech".)

Je jistě zřejmé, že

(3) *průnik dvou překrývajících se intervalů I, J je interval*.

Podrobněji: Je-li $I = I_1\times\cdots\times I_p$, $J = J_1\times\cdots\times J_p$, je $I\cap J = K_1\times\cdots\times K_p$, kde $K_j = I_j\cap J_j$ pro $j = 1,\ldots,p$.

Spíše než překrývající se intervaly nás budou v dalším zajímat **nepřekrývající se** intervaly nebo obecnější množiny, tedy dvojice množin, které nemají žádný společný vnitřní bod. Obecněji budeme říkat, že $\mathcal{P}$ je **systém nepřekrývajících se množin**, jestliže se žádné dvě různé množiny z $\mathcal{P}$ nepřekrývají; budeme pak též říkat, že **množiny systému $\mathcal{P}$ se nepřekrývají**.

Důležitým příkladem systému nepřekrývajících se intervalů je *dělení* p-rozměrného intervalu:

Buď dán (kompaktní) interval (2) a nechť interval I_j má krajní body $a^j < b^j$; předpokládejme, že pro každé $j = 1,\ldots,p$ je dáno nějaké dělení

(4) $$\mathcal{D}_j \ :\ a^j = x_0^j < x_1^j < \cdots < x_{n_j}^j = b^j$$

intervalu I_j, a buďte $I_j(k) := \langle x_{k-1}^j, x_k^j\rangle$, $k = 1,\ldots,n_j$, uzavřené intervaly tohoto dělení. Pak budeme systém všech intervalů

(5) $$I(k_1,\ldots,k_p) := I_1(k_1)\times\cdots\times I_p(k_p),$$

kde pro $j = 1,\ldots,p$ je $1\le k_j\le n_j$, nazývat **dělením intervalu** I. Je zřejmé, že jde o systém nepřekrývajících se intervalů, jejichž sjednocením je I. $\square$

Jiným příkladem systémů nepřekrývajících se intervalů jsou tzv. *krychlové sítě*:

Je-li $\delta\in\mathbb{R}_+$, nazýváme **krychlovou δ-sítí** (v $\mathbb{R}^p$) systém všech krychlových intervalů tvaru

(6) $$K_\delta(j_1,\ldots,j_p) := \langle j_1\delta,(j_1+1)\delta\rangle\times\cdots\times\langle j_p\delta,(j_p+1)\delta\rangle,\ \ \text{kde}\ \ (j_1,\ldots,j_p)\in\mathbb{Z}^p\,. \quad\square$$

[3]) Kniha [5] Stanisława Sakse neztratila svou výjimečnou hodnotu ani po desetiletích, která uplynula od jejího vydání. Je to první monografie, v níž se soustavně studují různé definice integrálu, tedy např. integrál Riemannův, Newtonův, Lebesgueův, Perronův, Denjoyův, Stieltjesův, Riemann-Stieltjesův, Lebesgue-Stieltjesův, Perron-Stieltjesův, atd., a jejich vzájemné vztahy. *Teorii integrálu* je třeba rozlišovat od *integrálního počtu*; teorie integrálu se zabývá právě naznačenou problematikou, zatímco integrální počet je zaměřen spíše na „početní techniku".

V dalším budeme potřebovat nejen dělení intervalů, ale i jejich konečných systémů:

Buď $\mathcal{K}$ nějaký konečný systém intervalů; každý konečný systém nadrovin tvaru $x_i =$ konst. (kde $1 \le i \le p$), jejichž sjednocení obsahuje všechny $(p-1)$-rozměrné stěny všech intervalů z $\mathcal{K}$ [4]), rozdělí $\mathbb{R}^p$ na konečný počet uzavřených intervalů, z nichž některé jsou omezené, jiné ne. Ty z nich, které jsou obsaženy v $\cup\mathcal{K}$, jsou nutně omezené, tedy kompaktní, a tvoří nepřekrývající se systém $\mathcal{R}$ intervalů s touto důležitou vlastností:

Pro každý interval $I \in \mathcal{K}$ tvoří systém $\mathcal{R}(I)$ všech intervalů z $\mathcal{R}$, které jsou v I obsaženy, jeho dělení.

Systém $\mathcal{R}$ nazveme **simultánním dělením intervalů** z $\mathcal{K}$.

V předcházejícím textu jsme simultánní dělení nejen definovali, ale zároveň jsme dokázali, že

(7) *pro každý konečný systém $\mathcal{K}$ intervalů existuje simultánní dělení intervalů z $\mathcal{K}$.* $\square$

Jak snadno nahlédneme, platí toto tvrzení:

Věta 1.1. 1. *Jsou-li $I = I_1 \times \cdots \times I_p$, $J = J_1 \times \cdots \times J_p$ dva intervaly, jejichž sjednocením je interval $K = K_1 \times \cdots \times K_p$, a je-li kromě toho $I \ne K \ne J$, existuje index j tak, že $I_j \ne K_j \ne J_j$, $K_j = I_j \cup J_j$, zatímco $I_k = J_k = K_k$ pro všechna $k \ne j$.*
2. *Jestliže se intervaly I, J navíc nepřekrývají, platí totéž o intervalech I_j, J_j. Podrobněji: Je-li $I_j = \langle a, b\rangle$, $J_j = \langle c, d\rangle$, je buď $b = c$ a $K_j = \langle a, d\rangle$, nebo $d = a$ a $K_j = \langle c, b\rangle$.*

Věta 1.2. *Jsou-li I, J dva intervaly, je množina $I \ominus J$ sjednocením jistého konečného systému nepřekrývajících se intervalů.* [5])

D ů k a z . Pro $p = 1$ tvrzení zřejmě platí. Platí-li tvrzení pro jisté $p \in \mathbb{N}$ a jsou-li $I = I^* \times I^{**}$, $J = J^* \times J^{**}$ dva $(p+1)$-rozměrné intervaly, přičemž intervaly s jednou hvězdičkou jsou jednorozměrné, intervaly s dvěma hvězdičkami p-rozměrné, užijeme rozklad

$$I \ominus J = ((I^* \ominus J^*) \times I^{**}) \cup ((I^* \odot J^*) \times (I^{**} \ominus J^{**})).$$

(Vnitřek intervalu vztahujeme vždy k eukleidovskému prostoru té dimenze, kterou má tento interval.)

Indukcí větu 1.2 snadno zobecníme:

Věta 1.3. *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li I_k, $0 \le k \le n$, intervaly, je množina $I_0 \ominus (I_1 \cup \cdots \cup I_n)$ sjednocením jistého konečného systému nepřekrývajících se intervalů.*

Označme $\mathcal{A}_p$ systém všech podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$, které lze napsat jako sjednocení nějakého konečného systému (kompaktních p-rozměrných) intervalů. [6])

Snadným důsledkem toho, co jsme zatím o intervalech řekli, je toto tvrzení:

Věta 1.4. 1. *Každá množina $A \in \mathcal{A}_p$ je sjednocením jistého konečného systému nepřekrývajících se intervalů.* 2. *Je-li $A \in \mathcal{A}_p$, $B \in \mathcal{A}_p$, jsou i množiny $A \cup B$, $A \odot B$ a $A \ominus B$ prvky systému $\mathcal{A}_p$.*

2. Lebesgueova vnější míra

Délku neboli **jednorozměrnou Lebesgueovu míru** (kompaktního) jednorozměrného intervalu I s krajními body $a < b$ definujeme jako číslo

(1) $$\mu_1(I) := b - a.$$

[4]) Nadroviny jsou tedy rovnoběžné se souřadnými nadrovinami v $\mathbb{R}^p$; mezi prvky uvedeného systému jsou všechny nadroviny, které vzniknou „prodloužením“ jednotlivých stěn intervalů I_j.

[5]) To zahrnuje i případ, kdy je množina $I \ominus J$ prázdná; pak je samozřejmě i příslušný systém nepřekrývajících se intervalů prázdný. (Prázdné systémy by nebylo vhodné vylučovat, protože hrají obdobnou roli jako prázdná množina.)

[6]) Do $\mathcal{A}_p$ patří i $\emptyset$, protože je sjednocením prázdného systému intervalů.

p-**rozměrným objemem** neboli p-**rozměrnou Lebesgueovou mírou** (kompaktního) p-rozměrného intervalu

$$I = I_1 \times \cdots \times I_p\,, \tag{2}$$

kde I_k jsou (kompaktní) jednorozměrné intervaly, rozumíme součin

$$\mu_p\,(I) := \mu_1(I_1)\cdots\mu_1(I_p)\,. \tag{3}$$

Místo μ_p budeme psát μ všude tam, kde bude zřejmé, že dimenze je p; tam, kde by hrozilo nedorozumění, užijeme podrobnější označení s indexem.

Je patrné, že $\mu\,(I)$ je vždy konečné kladné číslo. Snadno také nahlédneme, že platí:

(4) *Je-li $\mathcal{K}$ dělení intervalu I, je $\mu\,(I)$ rovno součtu měr všech intervalů z $\mathcal{K}$.* □

Již jsme se umluvili, že pokud budeme mluvit o „intervalu" (bez dalších vysvětlení), budeme mít na mysli *kompaktní p-rozměrný interval*. Protože žádnou jinou než *Lebesgueovu* míru zavádět nebudeme, budeme zpravidla i toto slovo vynechávat a mluvit pouze o *míře.* Jistě také nebude vadit, budeme-li místo $\mathcal{A}_p$ užívat stručnější symbol $\mathcal{A}$.

Nyní *rozšíříme definici míry* tím, že ji budeme definovat na celém systému $\mathcal{A}$: Protože každá množina $A \in \mathcal{A}$ je disjunktním sjednocením jistého konečného systému $\mathcal{K} = \{I^1, \ldots, I^n\}$ nepřekrývajících se intervalů, je „přirozené" položit

$$\mu_p\,(A) := \sum_{j=1}^{n} \mu\,(I^j)\,. \tag{5}$$

Nesmíme ovšem zapomenout ověřit, že *tato definice je korektní*, tj. dokázat toto tvrzení:

(5*) *Pro každé dva konečné systémy $\{I^j\}$, $\{J^k\}$ nepřekrývajících se intervalů splňující podmínku $\bigcup_j I^j = \bigcup_k J^k$ je $\sum_j \mu\,(I^j) = \sum_k \mu\,(J^k)$.*

D k a z je však snadný; sestrojíme simultánní dělení $\mathcal{R}$ všech intervalů I^j a J^k a uvážíme, že oba součty v (5*) se rovnají součtu měr všech intervalů z $\mathcal{R}$, které jsou obsaženy ve sjednocení $\bigcup_j I^j = \bigcup_k J^k$. □

Rozšíření míry $\mu = \mu_p$ na systém $\mathcal{A}$ je tedy korektní [7]) a můžeme přikročit k odvození některých jejích vlastností; první z nich je jakási *aditivita míry* na systému $\mathcal{A}$ [8]), druhá je její **monotónie**, třetí se nazývá **subaditivita**:

Věta 2.1. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $A_j \in \mathcal{A}$ pro $j = 0, 1, \ldots, n$. Pak platí:*

1. *Je-li $A_0 = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, kde množiny vpravo se nepřekrývají, je*

$$\mu\,(A_0) = \sum_{j=1}^{n} \mu\,(A_j)\,. \tag{6}$$

2. *Je-li $A_0 \subset A_1$, je $\mu\,(A_0) \leq \mu\,(A_1)$.*

---

[7]) Všimněme si, že podobné rozšíření se provádí i v elementární středoškolské geometrii, např. když se definuje obsah mnohoúhelníka: Rozdělíme jej na nepřekrývající se trojúhelníky a jejich obsahy sečteme. Pomineme-li otázku, *odkud víme, že takový rozklad lze provést*, máme i zde problém korektnosti vyslovené definice. Pokud aspoň neřekneme, že „lze dokázat, že tento součet obsahů nezávisí na tom, *jak* jsme mnohoúhelník na trojúhelníky rozložili", předvádíme „vzornou ukázku" výuky nesprávného myšlení. Na střední škole není samozřejmě nutné (a ve většině obdobných situacích to ani není možné) shora uvedenou korektnost *dokazovat*; je však hrubou metodickou i logickou chybou *tajit, že je zde problém.* (Patrně ještě horší chybou je tvrdit, že je nezávislost součtu obsahů trojúhelníků na rozkladu „samozřejmá". Kdyby středoškolská matematika skutečně učila myslet, musel by se některý student zeptat: „Proč je to samozřejmé?")

[8]) Termín *aditivita* (podrobněji *konečná aditivita*) – i když jej Saks užívá právě za situace z následující věty – ponecháme raději pro případ, kdy půjde o konečný systém *disjunktních*, nikoli jen *nepřekrývajících se* množin.

3. *Je-li* $A_0 \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$, *je*

$$\mu\,(A_0) \le \sum_{j=1}^{n} \mu\,(A_j)\,. \tag{7}$$

D ů k a z . Ad 1. Každou z množin A_j, $1 \le j \le n$, napíšeme jako sjednocení konečného systému $\mathcal{K}_j$ nepřekrývajících se intervalů; intervaly systému $\mathcal{K} := \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{K}_j$ se pak též nepřekrývají a jejich sjednocením je A_0. Rovnost (6) tedy platí podle definice míry v $\mathcal{A}$.

Ad 2 a 3. Zřejmě stačí dokázat tvrzení 3, protože tvrzení 2 je jeho speciálním případem.

Každá z množin $A_0, \ldots, A_n$ je sjednocením jistého konečného počtu intervalů. Je-li $\mathcal{R}$ simultánní dělení všech těchto intervalů, je zřejmé, že systém $\mathcal{K}$ všech intervalů z $\mathcal{R}$ obsažených v A_0 je podsystémem systému $\mathcal{K}^*$ všech intervalů z $\mathcal{R}$ obsažených v některé z množin $A_1, \ldots, A_n$. Platnost nerovnosti (7) plyne ihned z toho, že její levá strana je rovna součtu měr všech intervalů z $\mathcal{K}$ a pravá strana součtu měr všech intervalů z $\mathcal{K}^*$. $\square$

Vyhraďme znak $\mathcal{S}$ pro označování spočetných systémů (neboli konečných nebo nekonečných posloupností) kompaktních intervalů; je-li $\mathcal{S} = \{I_n\}$ takový systém, označme

$$\sigma(\mathcal{S}) := \sum_{n} \mu\,(I_n) \tag{8}$$

součet měr všech intervalů $I_n \in \mathcal{S}$. [9])

Platí toto tvrzení:

Věta 2.2. *Pro každou otevřenou množinu* $G \subset \mathbb{R}^p$ *existuje spočetný systém* $\mathcal{S}$ *nepřekrývajících se* (*kompaktních*) *intervalů tak, že* $G = \cup\mathcal{S}$.

D ů k a z . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $\delta_n = 1/2^n$ a buď $\mathcal{K}_n$ krychlová δ_n-síť. Buď $\mathcal{S}_1$ systém všech krychlí z $\mathcal{K}_1$, které jsou obsaženy v G; buď $\mathcal{S}_2$ systém všech krychlí z $\mathcal{K}_2$, které jsou obsaženy v G, ale nejsou obsaženy v žádné krychli z $\mathcal{S}_1$; buď $\mathcal{S}_3$ systém všech krychlí z $\mathcal{K}_3$, které jsou obsaženy v G, ale nejsou obsaženy v žádné krychli z $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, atd.

Je zřejmé, že $\mathcal{S} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ je hledaný systém: Jistě je $\cup\mathcal{S} \subset G$; obráceně, je-li $x \in G$, existuje $\delta \in \mathbb{R}_+$ tak, že okolí $U(x, \delta)$ je částí G. Zvolme n tak velké, že průměr $\sqrt{p}\,\delta_n$ krychlí sítě $\mathcal{K}_n$ je menší než δ; pak je (každá) krychle systému $\mathcal{K}_n$, která obsahuje bod x, obsažena v G, a bod x tedy leží buď v $\cup\mathcal{S}_n$, nebo v některé z množin $\cup\mathcal{S}_m$, kde $m < n$. $\square$

Následující věta má pro další rozšiřování míry zásadní důležitost.

Věta 2.3. *Pro každou množinu* $A \in \mathcal{A}$ *je*

$$\mu\,(A) = \inf\{\sigma(\mathcal{S});\ A \subset \cup\mathcal{S}\}\,. \tag{9}$$

D ů k a z . Buď dána množina $A \in \mathcal{A}$ a nechť α znamená pravou stranu rovnosti (9).

Napíšeme-li množinu A jako sjednocení konečného systému $\mathcal{S}$ nepřekrývajících se intervalů, je ovšem $\mu\,(A) = \sigma(\mathcal{S}) \ge \alpha$; to ukazuje, že $\mu\,(A) \ge \alpha$.

Obráceně, buď $\mathcal{S}$ libovolný spočetný systém intervalů I_n, který pokrývá množinu A, a nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nahraďme každý interval I_n *otevřeným* intervalem $J_n \supset I_n$ tak, že $\mu\,(\overline{J_n}) \le (1+\varepsilon)\,\mu\,(I_n)$, a označme $\mathcal{T}$ systém všech intervalů J_n. Podle Borelovy věty existuje konečný systém $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ pokrývající A. Podle věty 2.1 je

$$\mu\,(A) \le \sum_{J_n \in \mathcal{T}_1} \mu\,(\overline{J_n}) \le (1+\varepsilon) \sum_{J_n \in \mathcal{T}_1} \mu\,(I_n) \le (1+\varepsilon)\,\sigma(\mathcal{S})\,;$$

protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, je $\mu\,(A) \le \sigma(\mathcal{S})$ pro každé $\mathcal{S}$. Z toho plyne, že $\mu\,(A) \le \alpha$. $\square$

Právě dokázaná věta dovoluje rozšířit míru ze systému $\mathcal{A}$ na systém *všech podmnožin* prostoru $\mathbb{R}^p$. Položme

$$\mu^*\,(M) := \inf\{\sigma(\mathcal{S});\ M \subset \cup\mathcal{S}\} \quad \textit{pro každou množinu } M \subset \mathbb{R}^p \tag{10}$$

---

[9]) Součet vpravo *není* míra množiny $\cup\mathcal{S}$, a to ani v případě, že je systém $\mathcal{S}$ konečný, protože *nepředpokládáme*, že se intervaly I_n nepřekrývají. V případě nekonečného systému není míra množiny $\cup\mathcal{S}$ zatím ani definována, a ani až ji zavedeme, nebude obecně rovna součtu na pravé straně (8) – opět proto, že se intervaly I_n mohou překrývat.

a nazývejme toto číslo **vnější míra** množiny M. Z věty 2.3 plyne, že

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A)\,; \tag{11}$$

vnější míra je tedy skutečně rozšířením míry ze systému $\mathcal{A}$ na systém všech podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$.

Přímo z definice vnější míry plyne její **monotónie**, tj. podmínka

$$M \subset N \Rightarrow \mu^*(M) \le \mu^*(N)\,. \tag{12}$$

Každý systém $\mathcal{S}$ pokrývající N pokrývá totiž i M; infima příslušných $\sigma(\mathcal{S})$ proto splňují uvedenou nerovnost.

Protože je každá omezená množina částí nějakého kompaktního intervalu, plyne z (12) tento důležitý důsledek:

(13) *Každá omezená množina má konečnou vnější míru.*

V hlavní části následující věty dokážeme tzv. σ-**subaditivitu** vnější míry. [10])

Věta 2.4. *Pro každý spočetný systém $\mathcal{P}$ množin $M_n \subset \mathbb{R}^p$ je*

$$\mu^*\Big(\bigcup_n M_n\Big) \le \sum_n \mu^*(M_n)\,. \tag{14}$$

Důsledek.

$$M \subset \cup\mathcal{P} \Rightarrow \mu^*(M) \le \sum_n \mu^*(M_n)\,. \tag{14*}$$

D ů k a z . (14*) plyne ihned ze (14) vzhledem k monotónii vnější míry. Protože nerovnost (14) platí triviálně, je-li její pravá strana rovna $+\infty$, buď součet vpravo konečný; pak je ovšem $\mu^*(M_n) < +\infty$ pro každé n. Buď dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a pro každé n zvolme pevně nějaký systém $\mathcal{S}_n$ pokrývající M_n tak, že $\sigma(\mathcal{S}_n) \le \mu^*(M_n) + \varepsilon/2^n$. Systém $\mathcal{S} := \bigcup_n \mathcal{S}_n$ pokrývá $\bigcup_n M_n$ a je

$$\mu^*\Big(\bigcup_n M_n\Big) \le \sigma(\mathcal{S}) = \sum_n \sigma(\mathcal{S}_n) \le \sum_n \mu^*(M_n) + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, je tím (14) dokázáno. $\square$

Další věta pojednává o možnosti aproximovat množinu „shora" otevřenými množinami, a to „*s libovolnou přesností, pokud se* (*vnější*) *míry týká*":

Věta 2.5. *Pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^p$ konečné vnější míry a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje otevřená množina $G \supset M$ tak, že*

$$\mu^*(G) < \mu^*(M) + \varepsilon. \tag{15}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; pokryjme množinu M systémem $\mathcal{S} = \{I_n\}$ tak, že

$$\sum_n \mu(I_n) = \sigma(\mathcal{S}) < \mu^*(M) + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

a najděme intervaly J_n, pro něž je $I_n \subset \operatorname{int} J_n$, $\mu(J_n) < \mu(I_n) + \varepsilon/2^{n+1}$ pro každé n, takže $\sum_n \mu(J_n) < \sum_n \mu(I_n) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Položíme-li $G := \bigcup_n \operatorname{int} J_n$, bude G otevřená množina, pro niž je $M \subset \bigcup_n I_n \subset \bigcup_n \operatorname{int} J_n = G$. Podle věty 2.4 je

$$\mu^*(G) \le \sum_n \mu^*(\operatorname{int} J_n) \le \sum_n \mu(J_n) < \sum_n \mu(I_n) + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \mu^*(M) + \varepsilon.$$

Tím je věta dokázána. $\square$

---

[10]) Jde o podmínku silnější, než je subaditivita; nyní je systém $\mathcal{P}$ spočetný, zatímco v případě subaditivity šlo jen o konečné systémy.

Budeme říkat, že množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je **nulová** (podrobněji: (p)-**nulová**), je-li její (p-rozměrná) vnější míra rovna 0.

Z monotónie vnější míry plyne, že *každá část nulové množiny je nulová*; σ-subaditivita vnější míry má za následek, že

(16) *sjednocení spočetně mnoha nulových množin je nulová množina.*

Příklady. 1. Každá spočetná množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je (p)-nulová. Speciálně, množina $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ všech racionálních čísel je (1)-nulová, množina všech bodů roviny $\mathbb{R}^2$, jejichž obě souřadnice jsou racionální, je (2)-nulová, atd.

2. Každá nadrovina v $\mathbb{R}^p$ a každá stěna každého p-rozměrného intervalu (který nemusí být kompaktní) je (p)-nulová množina. Totéž platí o spočetných sjednoceních takových množin.

3. Cantorovo diskontinuum D je nespočetná (1)-nulová množina. Kartézské součiny $D \times D$ a $D \times \mathbb{R}$ jsou (2)-nulové množiny.

4. Graf spojité funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}^p$ je (obecný) interval, je $(p+1)$-nulová množina.

3. Měřitelné množiny a míra

Vnější míru má *každá* podmnožina prostoru $\mathbb{R}^p$; to by bylo velmi uspokojivé, kdyby množinová funkce μ^* měla uspokojivé vlastnosti, a mezi ně se všeobecně počítá tzv. aditivita. **Aditivitou** množinové funkce ν se přitom rozumí platnost rovnosti

(1) $\nu(M_1 \cup M_2) = \nu(M_1) + \nu(M_2)$ *pro každé dvě disjunktní množiny* M_1, M_2

z definičního oboru funkce ν. Protože právě napsanou podmínku lze indukcí rozšířit na ekvivalentní podmínku, ale formulovanou pro libovolný konečný počet množin, najdeme v literatuře definici **aditivity** (nebo, jak se také pro odlišení od tzv. σ-aditivity říká, **konečné aditivity**) funkce ν i ve tvaru

(1*) $$q \in \mathbb{N},\ M_1, \dots, M_q \ \textit{jsou disjunktní množiny} \ \Rightarrow \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{q} M_n\Big) = \sum_{n=1}^{q} \nu(M_n);$$

předpokládá se při tom, že množiny M_n i jejich sjednocení patří do definičního oboru funkce ν.

Lze ukázat [11]), že *na systému všech podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$ není vnější Lebesgueova míra aditivní*; není však nic ztraceno, vnější míru jsme rozhodně nekonstruovali zbytečně, metoda rozšíření míry intervalu byla myšlenkově naprosto správná. Jen systém všech podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$ je příliš rozsáhlý, a *proto* na něm nemá funkce μ^* dobré vlastnosti; když tento systém vhodným způsobem zredukujeme, a to na systém tzv. *měřitelných množin*, bude vnější míra na tomto menším systému dokonce σ-aditivní ! Ukazuje se, že měřitelnost množiny lze definovat např. takto: [12])

Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je (**lebesgueovsky**) **měřitelná** (nebo ještě podrobněji: **měřitelná při** p-**rozměrné Lebesgueově míře**), jestliže

(2) *pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje otevřená množina* $G \supset M$ *tak, že* $\mu^*(G - M) < \varepsilon$.

Systém všech měřitelných množin budeme značit $\mathcal{M}$, podrobněji můžeme psát $\mathcal{M}_p$.

Systém $\mathcal{P}$ množin se nazývá **aditivní** (resp. σ-**aditivní**), jestliže

pro každý konečný (resp. spočetný) systém $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}$ *je* $\cup\mathcal{T} \in \mathcal{P}$.

---

[11]) Rozbor lze najít např. v učebnici [2].

[12]) Tím nechceme naznačit, že ve světové literatuře kolísá *pojem* lebesgueovsky měřitelné množiny, protože tomu tak není. Je však známa řada *ekvivalentních definic* měřitelnosti a je na autorovi resp. přednášejícím, kterou z nich z metodických nebo jiných důvodů vybere. Čtenář najde i v tomto textu několik nutných a postačujících podmínek měřitelnosti; existuje jich však daleko více a měřitelnost by bylo samozřejmě možné *definovat* pomocí každé z nich.

Podle věty 1.4 je aditivní např. systém $\mathcal{A}$; je též dobře známo, že aditivní jsou i systémy všech uzavřených resp. všech kompaktních podmnožin jakéhokoli metrického prostoru X. Systém všech otevřených podmnožin prostoru X stejně jako systém všech spočetných podmnožin jakékoli množiny X je σ-aditivní. Velmi důležité je zjištění, že i *systém $\mathcal{M}$ je σ-aditivní*:

Věta 3.1. *Je-li $\mathcal{P}$ spočetný systém měřitelných množin, je i $\cup\mathcal{P}$ měřitelná množina.*

D ů k a z . Nechť se systém $\mathcal{P}$ skládá z množin M_n. Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ pak existují otevřené množiny $G_n \supset M_n$ tak, že $\mu^*(G_n - M_n) < \varepsilon/2^n$. Množina $G := \bigcup_n G_n$ je otevřená, přičemž $G - M = \bigcup_n G_n - \bigcup_n M_n \subset \bigcup_n (G_n - M_n)$, takže $\mu^*(G - M) \le \sum_n \mu^*(G_n - M_n) < \varepsilon$.

Ilustrujme nyní měřitelnost několika důležitými **příklady**: Přímo z definice je patrné, že

(3_1) *každá otevřená množina je měřitelná*.

Je též pravda, že

(3_2) *každý interval je měřitelný* :

Pro každý interval I a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje interval J tak, že $I \subset \operatorname{int} J$, $\mu(J) < \mu(I) + \varepsilon$. Protože všechny tři množiny v identitě $J = I \cup (J \ominus I)$ patří do $\mathcal{A}$ a protože množiny vpravo se nepřekrývají, je $\mu(J) = \mu(I) + \mu(J \ominus I)$ podle 1. části věty 2.1. Protože $\operatorname{int} J - I$ je otevřená množina obsažená v $J \ominus I$, je

$$\mu^*(\operatorname{int} J - I) \le \mu^*(J \ominus I) = \mu(J \ominus I) = \mu(J) - \mu(I) < \varepsilon .$$

Ukažme dále, že

(3_3) *každá nulová množina je měřitelná* :

Podle definice existuje pro každou nulovou množinu M a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ systém $\mathcal{S}$ intervalů I_n tak, že $M \subset \cup\mathcal{S}$, $\sum_n \mu(I_n) < \varepsilon/2$. Pro každý interval $I_n \in \mathcal{S}$ existuje interval J_n tak, že $I_n \subset \operatorname{int} J_n$, $\mu(J_n) < \mu(I_n) + \varepsilon/2^{n+1}$; buď $\mathcal{T}$ systém všech těchto intervalů J_n. Množina $G := \bigcup_n \operatorname{int} J_n$ je otevřená a obsahuje M, přičemž $G \subset \cup\mathcal{T}$, takže

$$\mu^*(G - M) \le \mu^*(G) \le \sigma(\mathcal{T}) = \sum_n \mu(J_n) \le \sum_n \mu(I_n) + \sum_n \varepsilon/2^{n+1} < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon .$$

Jak je patrné, dokázali jsme zároveň tuto důležitou charakteristiku nulových množin: *Množina M je nulová právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje otevřená množina $G \supset M$ tak, že $\mu^*(G) < \varepsilon$.*

Důkaz tvrzení, že

(3_4) *každá množina $M \in \mathcal{A}$ je měřitelná* ,

je velmi snadný. Stačí uvážit, že každý interval je měřitelný, že každá množina $M \in \mathcal{A}$ je sjednocením konečného systému intervalů, a aplikovat větu 3.1. $\square$

Tvrzení (3_4) je velmi důležité, protože spolu s větou 2.3, podle které je $\mu^*(M) = \mu(M)$ pro každou množinu $M \in \mathcal{A}$, zaručuje *korektnost* této **definice** a **označení**:

Vnější míru *měřitelné* množiny M budeme nazývat krátce její (p-**rozměrnou Lebesgueovou**) **mírou** a budeme ji značit $\mu(M)$.[13])

Poznámka. Všimněme si rozdílu mezi tvrzením věty 2.5 a výrokem (2), kterým se definuje měřitelnost množiny M: Podmínku (15) z věty 2.5, tj. nerovnost $\mu^*(G) < \mu^*(M) + \varepsilon$, lze vzhledem k předpokladu konečnosti $\mu^*(M)$ napsat i ve tvaru $\mu^*(G) - \mu^*(M) < \varepsilon$, ve výroku (2) je $\mu^*(G - M) < \varepsilon$. V případě, že by bylo $\mu^*(M) = +\infty$, bylo by i $\mu^*(G) = +\infty$, ostrá nerovnost (15) by byla nesplnitelná a rozdíl $\mu^*(G) - \mu^*(M)$ by neměl smysl; v případě, že bychom se spokojili s neostrou nerovností

[13]) Toto označení tedy *nekoliduje* s dosavadním označením míry, která byla zatím definována jen na systému $\mathcal{A}$. Míra na $\mathcal{A}$ se nyní stává restrikcí míry μ definované na systému $\mathcal{M}$ všech *měřitelných* množin, a μ je restrikcí vnější míry μ^* (definované na systému *všech* množin $M \subset \mathbb{R}^p$) na systém $\mathcal{M}$.

$\mu^*(G) \leq \mu^*(M) + \varepsilon \ (= +\infty)$, bylo by možné klást $G = \mathbb{R}^p$ a splnit tak podmínku analogickou (15) *triviálně.*

Podmínka (2) měřitelnosti se vztahuje i na množiny M nekonečné míry; je-li $\mu(M) = +\infty$, je samozřejmě i $\mu(G) = +\infty$, a *přesto musí být možné vhodnou volbou G udělat rozdíl $G - M$ „ve smyslu míry libovolně malý“!*

Jak ukážeme za chvíli, je podmínka (15) z věty 2.5 pro měřitelné množiny konečné míry a za předpokladu, že $M \subset G$, ekvivalentní s podmínkou (2). V případě množin nekonečné míry však podmínku (15) podmínkou (2) nahrazovat nelze. □

Pro důkaz měřitelnosti uzavřených množin budeme potřebovat toto

Lemma. 1. *Pro vnější míry každých dvou disjunktních kompaktních množin N_1, N_2 platí rovnost $\mu^*(N_1 \cup N_2) = \mu^*(N_1) + \mu^*(N_2)$.* 2. *Analogické tvrzení platí pro jakýkoli konečný počet disjunktních kompaktních množin.* [14])

D ů k a z . 1. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a nechť systém $\mathcal{S}$ pokrývá $N := N_1 \cup N_2$, přičemž $\sigma(\mathcal{S}) < \mu^*(N) + \varepsilon$. Protože intervaly systému $\mathcal{S}$ lze rozdělit na menší beze změny $\sigma(\mathcal{S})$, lze předpokládat, že žádný interval systému $\mathcal{S}$ neprotíná obě množiny N_j. Označíme-li pak $\mathcal{S}_j$ ($j = 1,\ 2$) systém všech intervalů z $\mathcal{S}$, které protínají N_j, pokrývá $\mathcal{S}_j$ množinu N_j a systémy $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou disjunktní. Přitom je $\sigma(\mathcal{S}) \geq \sigma(\mathcal{S}_1) + \sigma(\mathcal{S}_2) \geq \mu^*(N_1) + \mu^*(N_2)$, takže $\mu^*(N) > \sigma(\mathcal{S}) - \varepsilon \geq \mu^*(N_1) + \mu^*(N_2) - \varepsilon$. Vzhledem k tomu, že $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, plyne z toho, že $\mu^*(N) \geq \mu^*(N_1) + \mu^*(N_2)$. Protože obrácená nerovnost platí (v důsledku subaditivity vnější míry) obecně, je tím dokázána rovnost.

2. Druhá část tvrzení věty plyne z první snadnou indukcí.

Věta 3.2. *Každá uzavřená množina je měřitelná.*

D ů k a z . Protože každá uzavřená množina je sjednocením spočetně mnoha kompaktních množin, stačí (vzhledem k větě 3.1) důkaz provést jen pro kompaktní množiny.

Je-li N kompaktní množina a je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existuje podle věty 2.5 otevřená množina $G \supset N$ tak, že $\mu(G) < \mu^*(N) + \varepsilon$, a $H := G - N$ je pak otevřená množina. Podle věty 2.2 existuje systém $\mathcal{S}$ nepřekrývajících se intervalů I_n tak, že $H = \cup\mathcal{S} = \bigcup_n I_n$. Protože jedinou kompaktní a zároveň otevřenou podmnožinou prostoru $\mathbb{R}^p$ je $\emptyset$, je buď $H = \emptyset$ a $N = G = \emptyset \in \mathcal{M}$, nebo je systém $\mathcal{S}$ nekonečný.

Pro každé $q \in \mathbb{N}$ je v tom případě $\bigcup_{n=1}^q I_n \cap N = \emptyset$, $\bigcup_{n=1}^q I_n \cup N \subset G$, takže

$$\sum_{n=1}^{q} \mu(I_n) + \mu^*(N) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{q} I_n\Big) + \mu^*(N) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{q} I_n \cup N\Big) \leq \mu(G) < \mu^*(N) + \varepsilon.$$

podle 2. tvrzení lemmatu. Pro každé $q \in \mathbb{N}$ je tedy $\sum_{n=1}^q \mu(I_n) < \varepsilon$, a odtud plyne, že

$$\mu(G - N) = \mu(H) \leq \sigma(\mathcal{S}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) \leq \varepsilon\,.$$

Tím je měřitelnost množiny N dokázána.

Věta 3.3. *Doplněk každé měřitelné množiny je měřitelný.*

D ů k a z . Je-li M měřitelná množina, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ otevřená množina $G_n \supset M$ tak, že $\mu^*(G_n - M) < 1/n$. Množiny $H_n := \mathbb{R}^p - G_n$ jsou uzavřené, obsažené v $\mathbb{R}^p - M$, a

$$\mu^*((\mathbb{R}^p - M) - H_n) = \mu^*(G_n - M) < 1/n,$$

protože $(\mathbb{R}^p - M) - H_n = G_n - M$. Množina $H := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ je měřitelná, přičemž $\mu^*((\mathbb{R}^p - M) - H) \leq \mu^*((\mathbb{R}^p - M) - H_n) < 1/n$ pro každé n; z toho plyne, že $\mu^*((\mathbb{R}^p - M) - H) = 0$. Doplněk $\mathbb{R}^p - M$ množiny M je tedy sjednocením nulové (tedy měřitelné) množiny $(\mathbb{R}^p - M) - H$ a (měřitelné) množiny H; tím je jeho měřitelnost dokázána. □

[14]) Na systému všech kompaktních částí prostoru $\mathbb{R}^p$ je tedy vnější míra aditivní; důkaz bude snadný, protože *každé dvě disjunktní kompaktní množiny mají kladnou vzdálenost*, což např. o obecných disjunktních uzavřených množinách neplatí.

V následující větě se měřitelné množiny charakterizují možností aproximovat je zevnitř „ve smyslu vnější míry s libovolnou přesností“ uzavřenými množinami. Bude to podmínka „duální“ k definici (2), a bylo by možné přijmout ji za (ekvivalentní) definici měřitelnosti množiny.

Věta 3.4. *Množina M je měřitelná právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje uzavřená množina $N \subset M$ tak, že $\mu^*(M - N) < \varepsilon$.*

D ů k a z . M je měřitelná právě tehdy, když je měřitelná $\mathbb{R}^p - M$; aproximace $\mu^*(G - (\mathbb{R}^p - M)) < \varepsilon$ otevřenou množinou $G \supset \mathbb{R}^p - M$ znamená totéž co aproximace $\mu^*(M - (\mathbb{R}^p - G)) < \varepsilon$ uzavřenou množinou $\mathbb{R}^p - G \subset M$, protože $G - (\mathbb{R}^p - M) = M - (\mathbb{R}^p - G)$. □

Přímým důsledkem vět 3.1, 3.3 a de Morganových pravidel je toto tvrzení:

Věta 3.5. 1. *Jsou-li M_n měřitelné množiny, platí totéž o $\bigcap_n M_n$.* 2. *Jsou-li M, N měřitelné množiny, platí totéž o $M - N$.*

D ů k a z . K důkazu první části tvrzení stačí uvážit, že $\bigcap_n M_n = \mathbb{R}^p - (\mathbb{R}^p - \bigcap_n M_n) = \mathbb{R}^p - \bigcup_n(\mathbb{R}^p - M_n)$, a aplikovat věty 3.3 a 3.1.

Druhá část tvrzení plyne z první části a z věty 3.3, protože $M - N = M \cap (\mathbb{R}^p - N)$. □

V lemmatu jsme viděli, že (vnější) míra μ^* je např. na systému všech kompaktních částí prostoru $\mathbb{R}^p$ aditivní; v následující větě je dokázána její σ-**aditivita** na systému $\mathcal{M}$ (kde ji značíme μ).

Věta 3.6. *Pro každý spočetný systém disjunktních měřitelných množin M_n je*

$$\mu\Big(\bigcup_n M_n\Big) = \sum_n \mu(M_n)\,. \tag{4}$$

D ů k a z . Je-li množin M_n jen konečný počet, doplňme příslušnou posloupnost $M_1, \dots, M_q$ na nekonečnou tím, že položíme $M_n := \emptyset$ pro všechna $n > q$; tím se nic podstatného nezmění.

1. Buďte M_n nejdříve omezené, takže $\mu(M_n) < +\infty$ pro každé n, a buď $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Podle věty 3.4 existují uzavřené množiny $N_n \subset M_n$ tak, že $\mu(M_n - N_n) < \varepsilon/2^n$. Protože jsou omezené, jsou kompaktní; protože množiny M_n jsou disjunktní, platí totéž o množinách N_n. Protože $M_n = N_n \cup (M_n - N_n)$, je $\mu(M_n) \le \mu(N_n) + \mu(M_n - N_n) < \mu(N_n) + \varepsilon/2^n$, takže podle lemmatu je

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) \ge \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\Big) \ge \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{q} N_n\Big) = \sum_{n=1}^{q} \mu(N_n) \ge \sum_{n=1}^{q} \Big(\mu(M_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) \ge \sum_{n=1}^{q} \mu(M_n) - \varepsilon \tag{5}$$

pro každé $q \in \mathbb{N}$. Limitním přechodem pro $q \to \infty$ odtud plyne, že $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) - \varepsilon$, a protože tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, je $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n)$. Protože obrácená nerovnost platí vzhledem k σ-subaditivitě, platí rovnost (4).

2. Nechť K_j (kde $j \in \mathbb{N}$) značí p-rozměrnou krychli o středu v počátku a délce hrany $2j$; nechť $L_1 := K_1$, $L_j := K_j - K_{j-1}$ pro každé $j > 1$. Pak je $\mathbb{R}^p = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$, přičemž množiny vpravo jsou měřitelné, omezené a disjunktní. Protože $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} M_n \cap L_j$, je podle první části důkazu

$$\mu(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_n \cap L_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n)\,,$$

čímž je důkaz věty dokončen. □

Přímým důsledkem právě dokázané věty je toto tvrzení o míře rozdílu:

Věta 3.7. *Jsou-li M, N měřitelné množiny a je-li $N \subset M$, $\mu(N) < +\infty$, je $\mu(M - N) = \mu(M) - \mu(N)$.*

D ů k a z . Je $M = N \cup (M - N)$, všechny tři množiny jsou měřitelné a sjednocení vpravo je disjunktní. Je tedy $\mu(M) = \mu(N) + \mu(M - N)$, a stačí odečíst od obou stran číslo $\mu(N)$. [15]) □

---

[15]) Odečítat bychom nemohli, kdyby bylo $\mu(N) = +\infty$, protože pak by bylo i $\mu(M) = +\infty$. O míře rozdílu dvou množin $N \subset M$ s nekonečnou mírou nelze obecně nic říci. Příklad množin $M := \mathbb{R}_+$, $N := (\alpha, +\infty)$ resp. $M := \mathbb{R}$, $N := \mathbb{R}_+$ ukazuje, že pro každé číslo $\alpha \ge 0$ existují v $\mathbb{R}$ dvě množiny s nekonečnou mírou, pro něž je $\mu(M - N) = \alpha$. Rozdíl $M - N$, kde $N \subset M$, $\mu(M) = +\infty$, $\mu(N) < +\infty$, má ovšem míru $+\infty$.

Následující věta se týká monotónních posloupností měřitelných množin.

Věta 3.8. *Nechť M_n jsou měřitelné množiny; pak platí:*

1. *Je-li posloupnost $\{M_n\}$ neklesající a je-li $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, je $\mu(M) = \lim_{n\to\infty} \mu(M_n)$.*

2. *Je-li posloupnost $\{M_n\}$ nerostoucí, je-li $M := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ a je-li $\mu(M_1) < +\infty$, je $\mu(M) = \lim_{n\to\infty} \mu(M_n)$.*

D ů k a z . Ad 1. Je-li některé z čísel $\mu(M_n)$ rovné $+\infty$, tvrzení zřejmě platí; buď tedy $\mu(M_n) < +\infty$ pro všechna n. Pak je

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M_1 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_{n+1} - M_n),$$

kde sjednocení za posledním rovnítkem je disjunktní. Podle vět 3.6 a 3.7 je v důsledku toho

$$\begin{aligned}\mu(M) &= \mu(M_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_{n+1} - M_n) = \mu(M_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(M_{n+1}) - \mu(M_n)) \\ &= \mu(M_1) + \lim_{q\to\infty} \sum_{n=1}^{q-1} (\mu(M_{n+1}) - \mu(M_n)) = \lim_{q\to\infty} \mu(M_q).\end{aligned}$$

Ad 2. Je-li $x \in M_1$, je buď $x \in M_n$ pro každé n, načež $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = M$, nebo existuje nejmenší n tak, že $x \notin M_{n+1}$, načež je $x \in M_n - M_{n+1}$ (pro toto n), a tím spíše je $x \in M^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n - M_{n+1})$. Obráceně, každý bod ležící v $M \cup M^*$ leží zřejmě v M_1. Uvážíme-li ještě, že $M \cap M^* = \emptyset$, vidíme, že $M_1 - M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n - M_{n+1})$. Protože poslední sjednocení je disjunktní, je podle vět 3.7 a 3.6

$$\begin{aligned}\mu(M_1) - \mu(M) &= \mu(M_1 - M) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n - M_{n+1})\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n - M_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(M_n) - \mu(M_{n+1})) = \lim_{q\to\infty} \sum_{n=1}^{q-1} (\mu(M_n) - \mu(M_{n+1})) = \mu(M_1) - \lim_{q\to\infty} \mu(M_q),\end{aligned}$$

a stačí upravit. □

Poznamenejme, že 2. část věty 3.8 bez předpokladu, že *některá* z množin M_n (ne nutně M_1) má konečnou míru, *neplatí* : Každá z množin $M_n := (n, +\infty)$ má (jednorozměrnou) míru $+\infty$, ale jejich průnik je prázdný (takže má míru 0). □

Platí-li pro nějaký neprázdný systém $\mathcal{P}$ podmnožin jisté množiny X podmínky

(6) $$q \in \mathbb{N},\ M_1 \in \mathcal{P}, \dots, M_q \in \mathcal{P} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{q} M_j \in \mathcal{P},$$

(7) $$M \in \mathcal{P},\ N \in \mathcal{P} \Rightarrow M - N \in \mathcal{P},$$

říkáme, že $\mathcal{P}$ je (**množinový**) **okruh** (v X); je-li navíc $X \in \mathcal{P}$, mluvíme o (**množinové**) **algebře**. Jak je ihned patrné, každý okruh obsahuje $\emptyset$.

Platí-li místo (6) silnější podmínka

(6*) $$M_n \in \mathcal{P} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{P},$$

říkáme, že $\mathcal{P}$ je σ-**okruh** resp. σ-**algebra**. Z de Morganových vzorců ihned plyne, že *algebra resp. σ-algebra obsahuje s každým konečným resp. spočetným systémem množin i jejich průnik.*

Snadno nahlédneme, že

(8) *průnik libovolného systému okruhů je okruh; totéž platí o σ-okruzích, algebrách a σ-algebrách.*

Pro každý systém $\mathcal{P}$ podmnožin dané množiny X existuje σ-algebra podmnožin množiny X, která $\mathcal{P}$ obsahuje; je to σ-algebra *všech* podmnožin množiny X. Má tedy dobrý smysl mluvit o průniku *všech* σ-algeber obsahujících systém $\mathcal{P}$ (a složených z podmnožin množiny X); je to zřejmě *nejmenší σ-algebra obsahující systém $\mathcal{P}$.*

V teorii množin, v teorii míry, v topologii i v dalších matematických disciplínách hraje velmi důležitou úlohu *nejmenší σ-algebra obsahující systém všech otevřených podmnožin daného metrického prostoru X* (neboli jeho *topologii*); budeme ji značit $\mathcal{B}(X)$, a v případě, že $X = \mathbb{R}^p$, krátce $\mathcal{B}$ nebo $\mathcal{B}_p$. Její prvky se nazývají **borelovské množiny** prostoru X. Lze je rozdělit do nespočetně mnoha tříd, které je zvykem označovat tzv. *spočetnými ordinálními čísly*.

Borelovskými množinami jsou kromě všech otevřených množin jistě i všechny uzavřené podmnožiny prostoru X; spolu s otevřenými množinami tvoří tzv. *nultou třídu* borelovských množin. Spočetná sjednocení otevřených množin resp. spočetné průniky uzavřených množin jsou opět otevřené resp. uzavřené množiny. Průniky posloupností otevřených množin ani sjednocení posloupností uzavřených množin však již do nulté třídy patřit nemusí; tvoří dohromady tzv. *první třídu* borelovských množin. První třída obsahuje ovšem nultou třídu; v případě (který je pro nás jedině důležitý), že $X = \mathbb{R}^p$, obsahuje první třída množiny, které do nulté třídy nepatří.

Podrobněji se sjednocením posloupností uzavřených množin říká **množiny typu** F_σ, a průniky posloupností otevřených množin se nazývají **množiny typu** G_δ. [16])

Podobně jako otevřené a uzavřené množiny jsou vzájemnými množinovými doplňky, platí:

(9) $$M \text{ je typu } F_\sigma \text{ právě tehdy, když je } \mathbb{R}^p - M \text{ typu } G_\delta\,;$$

plyne to snadno z de Morganových vzorců.

Příkladem množiny typu F_σ v $\mathbb{R}$ je množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel – je sjednocením spočetně mnoha jednobodových množin; množina $\mathbb{R}^p - \mathbb{Q}$ všech iracionálních čísel je tedy typu G_δ. Žádná z těchto množin není ani otevřená, ani uzavřená, takže nepatří do nulté třídy. Lze také dokázat, že $\mathbb{Q}$ *není typu* G_δ a že $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *není typu* F_σ.

Lze však pokračovat dále: Spočetná sjednocení množin typu F_σ jsou sice opět typu F_σ a spočetné průniky množin typu G_δ jsou typu G_δ, ale spočetné průniky množin typu F_σ – tzv. **množiny typu** $F_{\sigma\delta}$ – a spočetná sjednocení množin typu G_δ – tzv. **množiny typu** $G_{\delta\sigma}$ tvoří dohromady *druhou třídu* borelovských množin; lze dokázat, že tato třída není v první třídě obsažena, pokud je např. $X = \mathbb{R}^p$.

Jistě je i bez formální definice zřejmé, co jsou to množiny typů $F_{\sigma\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, … resp. $G_{\delta\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, … . Střídajících se indexů σ, δ může být libovolný konečný počet a tento počet je i pořadovým číslem příslušné *třídy*. Další informace o borelovských množinách najde čtenář v dodatku k tomuto oddílu; obsah dodatku není sice nutné z hlediska našich dalších potřeb znát, ale čtenář si možná jeho prostudováním vytvoří lepší představu o *nekonečnu v matematice*. □

Vraťme se však opět k $\mathbb{R}^p$ a k míře. Z toho, co jsme dokázali ve větách 3.1, 3.3 a 3.6, je patrné, že

(10) *systém $\mathcal{M}$ všech měřitelných množin je σ-algebra, na níž je Lebesgueova míra σ-aditivní*;

protože obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^p$ a protože $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ je nejmenší σ-algebra, která je obsahuje, platí toto důležité tvrzení (které dává tušit, jak je systém $\mathcal{M}$ rozsáhlý):

(11) *Systém $\mathcal{M}$ obsahuje všechny borelovské množiny prostoru $\mathbb{R}^p$.* □

Doplňme zatím dokázaná tvrzení o měřitelných množinách a o míře ještě touto informací:

Věta 3.9. *K tomu, aby množina M byla měřitelná, je nutné a stačí, aby platila jedna z těchto (ekvivalentních) podmínek:*

1. *Existuje množina $H \supset M$ typu G_δ tak, že množina $H - M$ je nulová.*
2. *Existuje množina $K \subset M$ typu F_σ tak, že množina $M - K$ je nulová.*

[16]) Geneze těchto označení je svým způsobem kuriózní: Dlouhé desítky let před první světovou válkou ovlivňovala rozvoj matematiky podstatným způsobem německá a francouzská matematická škola. V němčině se slovo *Gebiet* užívalo pro (obecnou) otevřenou množinu - odtud ono „G“. (V matematice druhé poloviny dvacátého století znamená „Gebiet“ spíše již *oblast*, tedy *souvislou* otevřenou množinu.) „F“ je na rozdíl od toho počáteční písmeno francouzského slova *fermé*, které připojeno ke slovu *ensemble* znamenalo a znamená *uzavřenou* množinu. V matematické literatuře např. z oboru topologie se ještě v padesátých letech našeho století užívalo pro označení otevřených resp. uzavřených množin skoro výlučně písmeno G resp. F; dnes to již tak jednoznačné zcela jistě není. Označení F_σ, G_δ, atd. však přetrvala, a lze je považovat za ustálená nejen pro dnešek, ale i pro budoucnost. „σ“ souvisí se slovem Summe (součet, sjednocení) a „δ“ se slovem Durchschnitt (průnik).

D ů k a z . Protože je zřejmé, že podmínky jsou (pro měřitelnost množiny M) postačující, ukažme, že jsou nutné. Buď tedy $M \in \mathcal{M}$.

Ad 1. Z definice měřitelnosti plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina $G_n \supset M$ tak, že $\mu(G_n - M) < 1/n$. Množina $H := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, která je typu G_δ a obsahuje množinu M, splňuje pak podmínku $H - M \subset G_n - M$ pro každé n, takže je $\mu(H - M) < 1/n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a odtud plyne, že $\mu(H - M) = 0$. Tím je první část věty dokázána.

Ad 2. Pro každou měřitelnou množinu M je i množina $N := \mathbb{R}^p - M$ měřitelná, a podle toho, co jsme právě dokázali, existuje množina $H \supset N$ typu G_δ tak, že $\mu(H - N) = 0$. Množina $K := \mathbb{R}^p - H$ je typu F_σ, je částí množiny M a splňuje podmínku $M - K = M - (\mathbb{R}^p - H) = H - (\mathbb{R}^p - M) = H - N$, takže je nulová. Tím je dokázána i druhá část věty. $\square$

Poznámka. Situace tedy není tak nepřehledná, jak se mohlo zdát. Systém $\mathcal{M}$ je sice „velice rozsáhlý“, „struktura“ měřitelné množiny může být z hlediska topologie nesmírně komplikovaná, ale z hlediska teorie míry to tak složité není:

Každá měřitelná množina vznikne z vhodné množiny typu G_δ odečtením jisté nulové množiny, a lze ji vytvořit také tím, že jistou nulovou množinu přidáme ke vhodné množině typu F_σ.

Snad je tedy poučné uvědomit si, že celou komplikovanost „topologické struktury“ měřitelných množin (a také obrovskou mohutnost systému $\mathcal{M}$) způsobují nulové množiny, které jsou z hlediska míry „bezvýznamné“ v tom smyslu, že žádnou míru ani nepřinášejí, ani neubírají. Jak uvidíme později, Lebesgueův integrál jakékoli funkce přes nulovou množinu je nulový. Nulové množiny hrají při lebesgueovském integrování „neutrální roli“: lze je přidávat nebo odebírat, aniž to jakkoli ovlivní existenci resp. hodnotu integrálu. Z toho je patrné, že při integraci bychom mohli omezit integrační obory na množiny první třídy; nedělá se to mj. proto, že první borelovská třída má daleko horší množinové vlastnosti než σ-algebra $\mathcal{M}$.

Dodatek k oddílu 3

V hlavním textu jsme naznačili, co jsou borelovské množiny n-té třídy, kde $n \geq 0$ je celé číslo. *Tím však klasifikace borelovských množin zdaleka nekončí, protože v jistém smyslu „většina“ borelovských množin do žádné z těchto tříd nepatří!*

Množinami třídy ω se nazývají všechny množiny všech tříd, jejichž „pořadí“ je nezáporné celé číslo; touto třídou začínají třídy s tzv. *transfinitním pořadím*. Spočetná sjednocení a průniky množin třídy ω se nazývají (borelovskými) množinami třídy $\omega + 1$. Podobně se definují (borelovské) množiny třídy $\omega + 2$, $\omega + 3$, … , $\omega + n$, atd. až do nekonečna, a všechny množiny, o nichž jsme zatím mluvili, jsou (borelovské) množiny třídy $\omega + \omega \equiv \omega \cdot 2$. Pak následují třídy s pořadovými čísly $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, … , $\omega \cdot 2 + n$, … , což dohromady vytvoří třídu $\omega \cdot 2 + \omega \equiv \omega \cdot 3$. Analogicky dojdeme k třídám $\omega \cdot 4$, … , $\omega \cdot n$, … . Tušíme jistě, že nyní utvoříme sjednocení všech tříd, o nichž jsme zatím mluvili; toto sjednocení má transfinitní pořadí $\omega \cdot \omega$, což se značí ω^2. Není ovšem žádný důvod přestat; následují pořadová čísla

$$\omega^2 + 1,\ \omega^2 + 2,\ \ldots,\ \omega^2 + \omega,\ \omega^2 + \omega \cdot 2,\ \omega^2 + \omega \cdot 3,\ \ldots,\ \omega^2 + \omega^2,$$

což se značí $\omega^2 \cdot 2$. Za ním jdou

$$\omega^2 \cdot 2 + 1,\ \ldots,\ \omega^2 \cdot 2 + \omega,\ \ldots,\ \omega^2 \cdot 2 + \omega^2,$$

což je $\omega^2 \cdot 3$. Jistě uhádneme, že (se stále většími „odstupy“) následují

$$\omega^2 \cdot 4,\ \ldots,\ \omega^2 \cdot n,\ \ldots,\ \omega^2 \cdot \omega \equiv \omega^3,\ \omega^4,\ \ldots,\ \omega^n,\ \ldots,\ \omega^\omega.$$

Následující třídou je ovšem třída s pořadím $\omega^\omega + 1$, po čase se dopracujeme k třídám s pořadími

$$\omega^\omega \cdot 2,\ \ldots,\ \omega^\omega \cdot \omega \equiv \omega^{\omega+1},\ \ldots,\ \omega^{\omega+\omega} \equiv \omega^{\omega \cdot 2},\ \ldots,\ \omega^{\omega \cdot \omega} \equiv \omega^{\omega^2},\ \ldots,\ \omega^{\omega^n},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \ldots;$$

počet ω v exponentu exponentu exponentu … se zvětšuje neomezeně, a přestáváme stačit se symbolem ω kombinovaným s přirozenými čísly.

Všechny borelovské třídy, o nichž jsme dosud mluvili, vytvoří novou třídu s transfinitním pořadovým číslem ε, a můžeme začít znovu: Po ε následuje

$$\varepsilon+1, \ldots, \varepsilon+\omega, \ldots, \varepsilon+\omega^2, \ldots, \varepsilon+\omega^\omega, \varepsilon+\omega^{\omega^\omega}, \ldots, \varepsilon+\omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots,$$

až dojdeme k $\varepsilon+\varepsilon \equiv \varepsilon \cdot 2,$ načež následuje

$$\varepsilon \cdot 2+1, \ldots, \varepsilon \cdot 3, \ldots, \varepsilon \cdot \omega, \ldots, \varepsilon \cdot \omega^\omega, \ldots, \varepsilon \cdot \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \varepsilon \cdot \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots,$$

a všechny příslušné třídy vytvoří třídu s pořadovým číslem $\varepsilon \cdot \varepsilon \equiv \varepsilon^2$. Pokračujeme a s obrovskými odstupy se dostáváme k pořadím

$$\varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^4, \ldots, \varepsilon^n, \ldots, \varepsilon^\omega, \ldots, \varepsilon^{\omega^\omega}, \ldots, \varepsilon^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots,$$

až dorazíme k ε^ε. Za ním bezprostředně jde $\varepsilon^\varepsilon+1$ a s velikými odstupy

$$\varepsilon^{\varepsilon^\varepsilon}, \ldots, \varepsilon^{\varepsilon^{\varepsilon^\varepsilon}}, \ldots,$$

až exponentů exponentů exponentů … bude nekonečně mnoho, takže budeme muset vybrat další symbol a pokračovat … .

Lze si nejen domyslet, ale je možné dokázat, že žádného „konce“ se spočetnými operacemi nedobereme, a jsme přitom stále v σ-algebře $\mathcal{B}$ borelovských množin v $\mathbb{R}^p$! Dá se mj. ukázat, že naznačených

(a) *tříd borelovských množin je nespočetně mnoho*,

přičemž

(b) *každá třída obsahuje množiny, které nepatří do žádné z předcházejících tříd.*

Dalších několik informací snad může dokreslit naši představu:

(c) *Borelovských množin je stejně jako reálných čísel*,

čímž rozumíme, že

(c*) *existuje prosté zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na σ-algebru $\mathcal{B}$ všech borelovských množin*;

je jich však *méně* než nulových množin, protože

(d) *nulových množin je stejně jako všech podmnožin množiny $\mathbb{R}$*,

a těch je „o hodně“ více, než je reálných čísel. Tím se rozumí, že

(e) *$\mathbb{R}$ lze prostě zobrazit <u>do</u> systému všech podmnožin množiny $\mathbb{R}$*

(např. tak, že číslu x přiřadíme nulovou jednobodovou množinu $\{x\}$), ale

(e*) *neexistuje žádné zobrazení $\mathbb{R}$ <u>na</u> tento systém.*

Protože každá nulová množina je měřitelná, je zřejmé, že měřitelných množin je více než množin borelovských, takže

(f) *existují měřitelné množiny, které nejsou borelovské;*

je jich dokonce *daleko* více, než je borelovských množin. Je ovšem „dosti nepravděpodobné“, že bychom se někdy s takovou množinou např. „v početní praxi“ setkali.

4. Měřitelné funkce

Před studiem tohoto oddílu je nutné dobře se seznámit s vlastnostmi míry a měřitelných množin; kdybychom měli neustále odkazovat na věty z oddílu 3, text by byl velmi špatně čitelný, protože by značné množství odkazů neustále odvádělo pozornost od nových hlavních myšlenek.

Úmluva. Slovo *funkce* bude v tomto oddílu znamenat zobrazení (jakékoli) množiny do $\mathbb{R}^*$; zobrazením do $\mathbb{R}$ říkáme ovšem *konečné funkce*. $\square$

Algebraické operace s $\pm\infty$ jsme zavedli v základním kursu analýzy; zde zachováme platnost všech dosavadních definic až na definici **součinu**, kterou budeme modifikovat tak, že *součin bude mít smysl vždy*. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a jsou-li $a_1, \ldots, a_n$ čísla z $\mathbb{R}^*$, **definujme**

$$a_1 a_2 \cdots a_n := 0, \text{ je-li aspoň jedno z čísel } a_k \text{ rovné } 0\,.$$

Je tedy např.

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0, \quad (\pm\infty) \cdot 0 = 0\,.$$

Doplňme ještě, že $(+\infty)^\alpha := +\infty$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $(\pm\infty)^0 := 1$ a $1/(\pm\infty) := 0$. $\square$

Než přejdeme k definici měřitelnosti funkce, dokažme toto pomocné tvrzení:

Lemma. *Je-li f funkce definovaná na měřitelné množině M, jsou ekvivalentní tyto 4 podmínky:*

(a) *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je měřitelná množina $\{x \in M\,;\ f(x) < c\}$.*
(b) *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je měřitelná množina $\{x \in M\,;\ f(x) \le c\}$.*
(c) *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je měřitelná množina $\{x \in M\,;\ f(x) > c\}$.*
(d) *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je měřitelná množina $\{x \in M\,;\ f(x) \ge c\}$.*

D ů k a z . Implikace (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) plynou z identit

$$\begin{aligned}
\{x \in M\,;\ f(x) \le c\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in M\,;\ f(x) < c + 1/n\}\,,\\
\{x \in M\,;\ f(x) > c\} &= M - \{x \in M\,;\ f(x) \le c\}\,,\\
\{x \in M\,;\ f(x) \ge c\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in M\,;\ f(x) > c - 1/n\}\,,\\
\{x \in M\,;\ f(x) < c\} &= M - \{x \in M\,;\ f(x) \ge c\}\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Budeme říkat, že **funkce f je měřitelná v** (nebo: **na**) **množině** M, je-li množina M měřitelná a platí-li některá z podmínek (a) – (d) právě uvedeného lemmatu (v němž jsme dokázali, že *když f splňuje jednu z těchto podmínek, splňuje všechny čtyři*). V dalším stále pamatujme, že *v definici měřitelnosti funkce f na množině M je zahrnut předpoklad, že množina M je měřitelná*!

Nejjednodušším příkladem měřitelné funkce je *funkce konstantní na měřitelné množině M*; pro ni je totiž každá z množin uvedených v lemmatu rovna buď M nebo $\emptyset$.

Uveďme další jednoduchý, ale důležitý příklad: **Charakteristickou funkcí** množiny $M \subset \mathbb{R}^p$ rozumíme funkci

(2)
$$\chi_M(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pro všechna } x \in M \\ 0 & \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^p - M \end{array} \right\}.$$

Je jistě zřejmé, že

(2*) *množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je měřitelná právě tehdy, když je měřitelná funkce χ_M* ;

každá z množin uvedených sub (a) v lemmatu je totiž rovna buď $\mathbb{R}^p$ nebo M nebo $\emptyset$.

Je též užitečné uvědomit si, že

(3) *každá funkce f definovaná na nulové množině M je v ní měřitelná*;

všechny množiny z lemmatu jsou pak totiž nulové, tedy měřitelné.

Protože v matematické analýze hrají velmi důležitou úlohu spojité funkce, má i následující věta značný význam.

Věta 4.1. *Je-li funkce f spojitá na měřitelné množině M, je na ní měřitelná.*

D ů k a z . Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in M;\ f(x) < c\}$ vzor otevřeného intervalu $(-\infty, c)$ při zobrazení f, tedy množina otevřená v M (jakožto podprostoru prostoru $\mathbb{R}^p$). Protože každá taková množina je průnikem M s nějakou množinou G otevřenou v $\mathbb{R}^p$, je měřitelná. □

Kdybychom všude v lemmatu napsali $c \in \mathbb{R}^*$ místo $c \in \mathbb{R}$, zbytečně bychom při *ověřování* měřitelnosti museli počítat i s čísly $\pm\infty$; *smysl* podmínek by se tím však nezměnil:

Věta 4.2. *Je-li f měřitelná v množině M, jsou množiny $\{x \in M;\ f(x) < c\}$, $\{x \in M;\ f(x) \le c\}$, $\{x \in M;\ f(x) > c\}$, $\{x \in M;\ f(x) \ge c\}$, $\{x \in M;\ f(x) = c\}$ měřitelné pro každé $c \in \mathbb{R}^*$.*

D ů k a z . Pro $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in M;\ f(x) = c\}$ rovna $\{x \in M;\ f(x) \le c\} \cap \{x \in M;\ f(x) \ge c\}$. Je-li $c = +\infty$, je uvedená množina doplňkem množiny

$$\{x \in M;\ f(x) < +\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in M;\ f(x) < n\};$$

podobně pro $c = -\infty$. Z toho, co jsme zatím uvedli, je jistě patrný postup i při důkazu měřitelnosti ostatních množin. □

S měřitelností „množiny mezi grafy“ dvou měřitelných funkcí a průniku jejich grafů souvisí

Věta 4.3. *Jsou-li funkce f, g měřitelné na množině M, jsou měřitelné množiny*

$$\{x \in M;\ f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in M;\ f(x) \le g(x)\}, \quad \{x \in M;\ f(x) = g(x)\}.$$

D ů k a z . Měřitelnost uvedených množin je přímým důsledkem relací

$$\begin{aligned}
&\{x \in M;\ f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \big(\{x \in M;\ f(x) < r\} \cap \{x \in M;\ g(x) > r\}\big),\\
&\{x \in M;\ f(x) \le g(x)\} = M - \{x \in M;\ g(x) < f(x)\},\\
&\{x \in M;\ f(x) = g(x)\} = \{x \in M;\ f(x) \le g(x)\} \cap \{x \in M;\ g(x) \le f(x)\}. \quad \square
\end{aligned}$$

Restrikce, rozšiřování a jednoduchá modifikace měřitelné funkce jsou obsahem dalších tří vět.

Věta 4.4. *Je-li f měřitelná v M a je-li množina $N \subset M$ měřitelná, je f měřitelná i v N.*

D ů k a z . Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $\{x \in N;\ f(x) < c\} = N \cap \{x \in M;\ f(x) < c\}$.

Věta 4.5. *Je-li $M = \bigcup_n M_n$ a je-li funkce f měřitelná v každé množině M_n, je měřitelná i v M.*

D ů k a z . Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $\{x \in M;\ f(x) < c\} = \bigcup_n \{x \in M_n;\ f(x) < c\}$. □

Věta 4.6. *Nechť $N \subset M$ jsou měřitelné množiny. Buď f definována v N a nechť*

$$g(x) := \left\{\begin{matrix} f(x) & \text{v } N \\ 0 & \text{v } M - N \end{matrix}\right\}.$$

Pak je f měřitelná v N právě tehdy, když je g měřitelná v M.

D ů k a z . 1. Je-li f měřitelná v N, je g měřitelná v M podle věty 4.5, protože 0 je měřitelná v $M - N$. 2. Je-li g měřitelná v M, je f měřitelná v N podle věty 4.4. □

Následujících několik vět je věnováno algebraickým a jiným operacím s měřitelnými funkcemi.

Věta 4.7. *Je-li f měřitelná v M, platí totéž o funkci af pro každé $a \in \mathbb{R}$. Jsou-li funkce f, g měřitelné v M, jsou i funkce $f \pm g$ měřitelné, a to každá z nich ve svém definičním oboru.* [17])

[17]) Definičním oborem součtu resp. rozdílu je ovšem (měřitelná) množina $M - \{x \in M;\ f(x) = -g(x) = \pm\infty\}$ resp. $M - \{x \in M;\ f(x) = g(x) = \pm\infty\}$.

D ů k a z . 1. Je-li $a = 0$, je $af \equiv 0$, a měřitelnost je zřejmá; je-li $a \in \mathbb{R}_+$, je $\{x \in M;\ af(x) > c\} = \{x \in M;\ f(x) > c/a\}$; je-li $a \in \mathbb{R}_-$, je $\{x \in M;\ af(x) > c\} = \{x \in M;\ f(x) < c/a\}$.

2. Je zřejmé, že funkce g je měřitelná na nějaké množině právě tehdy, když je na téže množině měřitelná kterákoli z funkcí $g + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Jsou-li funkce f, g měřitelné v M, není jejich rozdíl definován na množině $N := \{x \in M;\ f(x) = g(x) = \pm\infty\}$, o níž víme, že je měřitelná. Měřitelnost $f - g$ v $M - N$ je patrná z rovnosti $\{x \in M - N;\ f(x) - g(x) < c\} = \{x \in M - N;\ f(x) < g(x) + c\}$, platné pro každé $c \in \mathbb{R}$, a z věty 4.3.

3. Spolu s g je podle prvního tvrzení věty měřitelná i funkce $-g$; protože $f + g = f - (-g)$, plyne měřitelnost součtu ihned z měřitelnosti rozdílu. $\square$

Přímým důsledkem právě dokázané věty je toto tvrzení:

Věta 4.8. *Lineární kombinace* (*s koeficienty z* $\mathbb{R}$) *funkcí měřitelných v* M *je měřitelná na* (*maximální*) *množině* $N \subset M$, *na níž má smysl.*

Věta 4.9. *Nechť funkce* f, g *jsou měřitelné v* M. *Pak je součin* fg *je měřitelný v* M, *zatímco podíl* f/g *je měřitelný na* (*maximální*) *množině, na níž má smysl.* [18])

D ů k a z . 1. Je-li f měřitelná v M, platí totéž o funkci f^2, protože

$$\{x \in M;\ f^2(x) < c\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{pro } c \le 0 \\ \{x \in M;\ f(x) < \sqrt{c}\} \cap \{x \in M;\ f(x) > -\sqrt{c}\} & \text{pro } c \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}.$$

2. Jsou-li měřitelné funkce f, g konečné, jsou funkce $f \pm g$ měřitelné v M, totéž platí o jejich čtvercích, a tedy i o $fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$. Obecné (měřitelné) funkce f, g jsou tedy měřitelné na množině $M - (\{x \in M;\ f(x) = \pm\infty\} \cup \{x \in M;\ g(x) = \pm\infty\})$, na níž jsou konečné; protože odečtená množina je sjednocením tří měřitelných množin, na nichž je fg po řadě rovna $-\infty$, 0, $+\infty$, je fg měřitelná i na ní. Pak stačí užít větu 4.5.

3. Protože $f/g = f \cdot (1/g)$, stačí dokázat měřitelnost funkce $h := 1/g$ v jejím definičním oboru $N := M - g_{-1}(0)$. Protože h je nulová, tedy měřitelná v měřitelné množině $P := \{x \in N;\ g(x) = \pm\infty\}$, stačí podle věty 4.5 dokázat, že je měřitelná v množině $Q := N - P$. To však je patrné z relací

$$\{x \in Q;\ h(x) > c\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{x \in Q;\ g(x) > 0\} \cap \{x \in Q;\ g(x) < 1/c\} & \text{pro všechna } c \in \mathbb{R}_+ \\ \{x \in Q;\ g(x) > c\} & \text{pro } c = 0 \\ \{x \in Q;\ g(x) > 0\} \cup \{x \in Q;\ g(x) < 1/c\} & \text{pro všechna } c \in \mathbb{R}_- \end{array} \right\}. \quad \square$$

Připomeňme některé známé definice: Pro každé $x \in \mathbb{R}^*$ je

$$x^+ := \max(x, 0) \quad \text{resp.} \quad x^- := \max(-x, 0) \tag{4}$$

tzv. **kladná** resp. **záporná část** čísla x; pro každé x jsou to *nezáporná čísla*, z nichž (aspoň) jedno je rovno 0. Z definic (4) je patrné, že

$$x^+ = \left\{ \begin{array}{ll} x = |x| & \text{pro každé } x \ge 0 \\ 0 & \text{pro každé } x \le 0 \end{array} \right\}, \quad x^- = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro každé } x \ge 0 \\ -x = |x| & \text{pro každé } x \le 0 \end{array} \right\}. \tag{4*}$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^*$ platí tyto identity:

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad (-x)^+ = x^-, \quad (-x)^- = x^+. \tag{5}$$

Má-li součet $x + y$ smysl, platí nerovnosti

$$(x+y)^+ \le x^+ + y^+, \quad (x+y)^- \le x^- + y^-; \tag{6}$$

má-li smysl rozdíl $x - y$, je

$$\left|x^+ - y^+\right| \le |x - y|, \quad \left|x^- - y^-\right| \le |x - y|. \tag{7}$$

[18]) Abychom získali definiční obor podílu, je třeba z M odstranit všechny body, v nichž se g anuluje, a všechny body, v nichž jsou obě funkce f, g nekonečné.

Je-li funkce f definována na nějaké množině M, je její **kladná** resp. **záporná část** definována rovností

$$(f^+)(x) := (f(x))^+ \ \text{ resp. } \ (f^-)(x) := (f(x))^- \ \text{ pro každé } \ x \in M. \tag{8}$$

Pro dvě takové funkce platí vztahy analogické těm, které jsme uvedli pro dvě čísla. [19])

Věta 4.10. *Jsou-li f, g funkce měřitelné na množině M, platí totéž o funkcích* $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^+, f^-, *a také o funkci* $|f|^\alpha$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

D ů k a z . Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$$\{x \in M;\ \max(f(x),g(x)) < c\} = \{x \in M;\ f(x) < c\} \cap \{x \in M;\ g(x) < c\},$$
$$\{x \in M;\ \min(f(x),g(x)) < c\} = \{x \in M;\ f(x) < c\} \cup \{x \in M;\ g(x) < c\},$$

a z toho je patrná měřitelnost uvedeného maxima a minima. Protože nulová funkce je v M měřitelná, plyne z toho měřitelnost funkcí f^+ a f^-, a z jejich měřitelnosti vyplývá měřitelnost funkce $|f| = f^+ + f^-$ podle věty 4.7. Protože množina $\{x \in M;\ |f(x)|^\alpha < c\}$ je prázdná, je-li $c \le 0$, a rovná se $\{x \in M;\ |f(x)| < c^{1/\alpha}\}$, je-li $c \in \mathbb{R}_+$, je i funkce $|f|^\alpha$ měřitelná v M.

Věta 4.11. *Je-li každá z funkcí f_n, $n \in \mathbb{N}$, měřitelná v M, platí totéž i o funkcích* $\sup\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

D ů k a z . Označíme-li φ resp. ψ uvedené supremum resp. infimum, je pro každé $c \in \mathbb{R}$ zřejmě

$$\{x \in M;\ \varphi(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in M;\ f_n(x) > c\},$$
$$\{x \in M;\ \psi(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in M;\ f_n(x) < c\}. \quad \square$$

Pro každou posloupnost čísel $a_n \in \mathbb{R}^*$ je její **limes superior** resp. **limes inferior** definován rovností

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \ge n\} \ \text{ resp. } \ \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k \ge n\}. \tag{9}$$

Jak víme, je to *největší* resp. *nejmenší hromadný bod* posloupnosti čísel a_n, tedy maximum resp. minimum množiny $\operatorname{Ls} a_n$. [20]) Posloupnost má limitu právě tehdy, když se její limes inferior rovná limes superior; obecně platí jen nerovnost $\liminf a_n \le \limsup a_n$.

Je užitečné uvědomit si, že vzhledem k tomu, že posloupnost čísel $\sup\{a_k;\ k \ge n\}$ je nerostoucí, posloupnost čísel $\inf\{a_k;\ k \ge n\}$ neklesající, je (podle věty o limitě monotónní posloupnosti)

$$\limsup a_n = \inf\{\sup\{a_k;\ k \ge n\};\ n \in \mathbb{N}\}, \quad \liminf a_n = \sup\{\inf\{a_k;\ k \ge n\};\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{10}$$

Podobně jako pro posloupnosti čísel definujeme ovšem **limes superior** a **limes inferior posloupnosti funkcí** definovaných na nějaké množině M; formální definice je jistě zbytečná, ale mějme na paměti, že zatímco $\lim f_n$ nemusí mít smysl *nikde* v M, limes superior a limes inferior mají naopak smysl *všude* v M. $\square$

Přímým důsledkem věty 4.11 a relací (10) je toto tvrzení:

Věta 4.12. *Jsou-li funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné v M, platí totéž o funkcích* $\limsup f_n$, $\liminf f_n$.

S limitou je to o něco složitější:

Věta 4.13. *Jsou-li funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné v M, je funkce $f := \lim f_n$ měřitelná v množině N všech $x \in M$, v nichž limita posloupnosti $\{f_n(x)\}$ existuje.*

---

[19]) Podstatný rozdíl se samozřejmě v tom, že např. u součtu dvou *čísel* můžeme jednoznačně rozhodnout, zdali je definován nebo ne, ale součet dvou *funkcí* je obecně v některých bodech množiny M definován a v jiných ne.

[20]) Připomeňme, že $\operatorname{Ls} a_n$ znamená množinu všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}$, tedy množinu všech čísel z $\mathbb{R}^*$, které jsou limitou nějaké posloupnosti vybrané z $\{a_n\}$. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty je množina $\operatorname{Ls} a_n$ vždy neprázdná; snadno nahlédneme, že je (v $\mathbb{R}^*$) uzavřená.

D ů k a z . Protože limes superior i limes inferior jsou měřitelné v M, je měřitelná i množina N, kde se rovnají. Na N se však $\lim f_n$ rovná např. $\limsup f_n$, a je tedy měřitelná podle věty 4.4. □

Poznámka. Věta 4.1 zaručuje, že funkce spojité na (dané) měřitelné množině M jsou na ní měřitelné; tyto funkce tvoří *nultou třídu* tzv. *Bairovy klasifikace funkcí*. Věta 4.13 ukazuje, že při limitním přechodu se měřitelnost funkcí zachovává. Víme též, že *stejnoměrná* limita posloupnosti spojitých funkcí je opět funkce spojitá, zatímco pouhá *bodová* konvergence spojitost obecně *nezachovává*. (Příklad: Funkce $f_n(x) := n^2x^2/(1+n^2x^2)$ mají za limitu funkci, která je v bodě 0 rovna 0 a všude jinde se rovná 1.)

(Bodové) limity posloupností spojitých funkcí tvoří *první Bairovu třídu*; všechny jsou ovšem měřitelné. Snadno nahlédneme, že do první třídy na množině $\mathbb{R}$ patří např. funkce sgn, sgn ∘ sin, celá část čísla x, apod. Lze dokázat (viz např. [3]), že funkcemi první třídy v jednorozměrném kompaktním intervalu jsou např. všechny monotónní funkce, všechny funkce, které mají jen spočetně mnoho bodů nespojitosti, a také např. charakteristické funkce všech uzavřených částí daného intervalu.

Bodové limity posloupností funkcí první třídy tvoří *druhou Bairovu třídu*; nejznámější funkce druhé třídy v $\mathbb{R}$, která nepatří do první třídy, je Dirichletova funkce, kterou lze vytvořit dvěma limitními přechody z funkcí spojitých: [21]) Jak snadno zjistíme, je

$$\lim_{n\to\infty}\big(\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(n!\pi x)\big)=\left\{\begin{array}{ll}1, & \text{je-li}\quad x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{je-li}\quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{array}\right\}. \tag{11}$$

S Bairovou klasifikací lze pokračovat dále: Máme-li již definovánu n-tou třídu, definujeme $(n+1)$-ní třídu jako množinu všech limit bodově konvergentních posloupností funkcí z n-té třídy. Poznamenejme, že trvalo velmi dlouho, než se podařilo „efektivně“ sestrojit funkci třetí třídy nepatřící do druhé třídy; „prakticky“ to znamená, že funkce, s nimiž se „běžně“ setkáváme, jsou nejvýše druhé třídy.

Podobně, jako je tomu s borelovskými množinami, lze v Bairově klasifikaci pokračovat *transfinitně* : Třídu s pořadovým číslem ω definujeme jako sjednocení všech tříd s konečným pořadovým číslem; bodové limity posloupností funkcí třídy ω tvoří třídu s pořadovým číslem $\omega+1$, atd. - viz dodatek o borelovských množinách.

Stručně jen konstatujme, že je dokázáno, že každá z nespočetně mnoha Bairových tříd např. na množině $\mathbb{R}^p$ obsahuje funkce, které nepatří do žádné třídy s menším pořadovým číslem, tj. že limitními přechody *skutečně* vytváříme nové, stále složitější a složitější funkce. Všechny jsou však měřitelné.

Neměřitelné funkce sice existují, ale jejich „konstrukce“ naráží na stejné obtíže jako „konstrukce“ neměřitelných množin; „máme-li“ však nějakou neměřitelnou množinu M, je – jak víme – její charakteristická funkce χ_M také neměřitelná. (Jak obráceně z dané neměřitelné funkce získáme neměřitelnou množinu, přenecháváme čtenáři za cvičení.)

Jak víme, existuje pro každou měřitelnou množinu M a pro každé $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ otevřená množina $G\supset M$ a uzavřená množina $H\subset M$ tak, že $\mu^*(G-M)<\varepsilon$, $\mu^*(M-H)<\varepsilon$. Víme též, že pak existuje množina $G^*\supset M$ typu G_δ a množina $H^*\subset M$ typu F_σ tak, že $\mu(G^*-M)=\mu(M-H^*)=0$. Měřitelné množiny se tedy v jistém smyslu „příliš neliší“ od množin nulté resp. první Borelovy třídy.

Podobně se měřitelné funkce v jistém smyslu „málo liší“ od funkcí nulté resp. první Bairovy třídy; platí totiž např. *Luzinova věta* (viz JII, věta 40):

Konečná funkce f je na měřitelné množině M měřitelná právě tehdy, když pro každé $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ existuje otevřená množina G tak, že $\mu(G)<\varepsilon$, přičemž restrikce $f|(M-G)$ je spojitá (v $M-G$), a také právě tehdy, když existuje nulová množina H tak, že $f|(M-H)$ je první třídy (v $M-H$).

K funkcím druhé třídy mají měřitelné funkce ještě blíže: V kapitole XV knihy [3] najde čtenář tuto *Vitaliho větu*:

Pro každou konečnou funkci f měřitelnou v M existuje funkce g druhé Bairovy třídy v M a nulová množina N tak, že $f=g$ všude v $M-N$. □

V teorii Lebesgueova integrálu hrají velmi důležitou roli tzv. *monotónní limitní přechody*: Je-li

[21]) Z (11) je patrné, že Dirichletova funkce patří do druhé třídy; dokázat, že nepatří do první třídy, je obtížnější. Běžný důkaz vychází z hlubokého tvrzení (které lze opět najít v [3]), že množina všech bodů spojitosti každé funkce první třídy v $\mathbb{R}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

$a_n \in \mathbb{R}^*$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a je-li $a \in \mathbb{R}^*$, budeme psát

$$\left\{\begin{matrix} a_n \nearrow a \\ a_n \searrow a \end{matrix}\right\}, \text{ je-li } a_n \to a \quad \text{a je-li posloupnost } \{a_n\} \left\{\begin{matrix} \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \end{matrix}\right\}; \tag{12}$$

v obou případech budeme mluvit o **monotónní konvergenci** $a_n \to a$.

Pro posloupnosti funkcí zní příslušná definice takto: Je-li M nějaká množina a je-li $f_n(x) \nearrow f(x)$ (resp. $f_n(x) \searrow f(x)$) pro všechna $x \in M$, budeme psát $f_n \nearrow f$ (resp. $f_n \searrow f$) v M a budeme říkat, že **konvergence** $f_n \to f$ **je v** M **monotónní**. [22]) □

Vraťme se k charakteristickým funkcím (zejména měřitelných) množin a uveďme některé jejich základní vlastnosti:

$$M \subset N \Leftrightarrow \chi_M \le \chi_N; \tag{13}$$

$$M = \bigcup_n M_n,\ N = \bigcap_n M_n \Rightarrow \chi_M = \max\{\chi_{M_n};\ n\},\ \chi_N = \min\{\chi_{M_n};\ n\}; \tag{14}$$

$$M = \bigcup_n M_n,\ \textit{kde } M_n \textit{ jsou disjunktní množiny} \Rightarrow \chi_M = \sum_n \chi_{M_n}; \tag{15}$$

$$\{M_n\} \textit{ je neklesající},\ M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \Rightarrow \chi_{M_n} \nearrow \chi_M; \tag{16}$$

$$\{M_n\} \textit{ je nerostoucí},\ M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \Rightarrow \chi_{M_n} \searrow \chi_M. \tag{17}$$

Snadné důkazy všech tvrzení přenecháváme čtenáři. □

Jednoduchou funkcí v M ($\subset \mathbb{R}^p$) budeme rozumět každou konečnou nezápornou funkci f, měřitelnou v M a nabývající tam jen konečného počtu hodnot. [23])

Příkladem jednoduché funkce (v $\mathbb{R}^p$) je funkce tvaru

$$f := \sum_{n=1}^{q} a_n \chi_{M_n}, \tag{18}$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $M_1, \ldots, M_q$ jsou měřitelné množiny, $a_1, \ldots, a_q$ konečná nezáporná čísla. Každá kladná hodnota této funkce má zřejmě tvar $a_{n_1} + \cdots + a_{n_r}$, kde $1 \le r \le q$ a $1 \le n_1 < \cdots < n_r \le q$. Jsou-li množiny M_n navíc disjunktní, nabývá f *jen* hodnot $0, a_1, \ldots, a_q$. [24])

Nechť f je jednoduchá funkce v $M \neq \emptyset$; seřaďme všechny hodnoty, kterých v M nabývá, do rostoucí posloupnosti $a_1 < \cdots < a_q$ a definujme $M_n := f_{-1}(a_n)$ pro $n = 1, \ldots, q$. Pak jsou množiny M_n disjunktní, neprázdné a měřitelné; jsou funkcí f určeny jednoznačně a jejich sjednocení je M. Funkci f lze opět napsat ve tvaru (18), *nyní je však toto vyjádření funkcí f určeno jednoznačně*; budeme je nazývat **kanonické vyjádření** (jednoduché) funkce f.

Snadno nahlédneme, že platí toto tvrzení:

(19) *Jsou-li f, g jednoduché funkce v M, platí totéž o funkcích $f+g$, fg, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$; analogická tvrzení platí pro jakýkoli konečný počet jednoduchých funkcí.* □

Jako velmi důležitá se ukáže být pro teorii Lebesgueova integrálu následující věta, v níž se každé nezáporné měřitelné funkci f efektivně přiřadí jistá neklesající posloupnost jednoduchých funkcí f_n, které mají f za limitu.

---

[22]) Může se stát, že posloupnost $\{f_n(x)\}$ je pro každé $x \in M$ monotónní, přičemž existuje bod $x \in M$, v němž tato posloupnost není neklesající, zatímco v jiném bodě $x \in M$ není nerostoucí; za takové situace *nejsou splněny podmínky uvedené v definici*, takže *nejde o monotónní konvergenci v M*! V definici totiž žádáme, aby posloupnost $\{f_n(x)\}$ byla *buď pro všechna $x \in M$ neklesající, nebo pro všechna $x \in M$ nerostoucí*.

[23]) Podle definice měřitelné funkce je tedy i množina M v této definici měřitelná.

[24]) Jistě dobře rozumíme slůvku „jen“: V této souvislosti znamená, že f nenabývá *žádných jiných* než uvedených hodnot; netvrdíme přitom, že všech těchto hodnot opravdu nabývá. Přidáme-li ovšem k disjunktnosti množin M_n ještě podmínku, že jsou všechny neprázdné, jsou všechna a_n skutečně hodnotami funkce f; 0 je pak hodnotou funkce f právě tehdy, když je buď některé a_n nulové, nebo když sjednocení všech M_n není celé $\mathbb{R}^p$.

Věta 4.14. *Pro každou měřitelnou funkci* $f : M \to \langle 0, +\infty\rangle$ *existuje posloupnost jednoduchých funkcí* f_n, *pro něž je* $f_n \nearrow f$ *v* M.

D ů k a z . Pro každé $x \in M$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $f_n(x)$ největší z čísel $k/2^n$, $0 \le k \le n2^n$, které nepřevyšuje $f(x)$.

Protože všechny množiny

$$M(n) := \{x \in M;\ f(x) \ge n\}, \quad M(n,k) := \{x \in M;\ (k-1)/2^n \le f(x) < k/2^n\}, \ \ 1 \le k \le n2^n,$$

jsou měřitelné, jsou i jejich charakteristické funkce měřitelné. Protože je zřejmě

$$f_n(x) = n\chi_{M(n)} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{M(n,k)},$$

jsou i všechny funkce f_n měřitelné; všechny jsou ovšem i nezáporné a každá z nich nabývá jen konečného počtu hodnot.

Protože pro každé n jsou členy posloupnosti 0, $1/2^n$, $2/2^n$, $\ldots$, $n2^n/2^n$ zároveň členy posloupnosti 0, $1/2^{n+1}$, $2/2^{n+1}$, $\ldots$, $(n+1)2^{n+1}/2^{n+1}$, a protože $f_n(x)$ resp. $f_{n+1}(x)$ je největší člen první resp. druhé posloupnosti, který nepřevyšuje $f(x)$, je zřejmé, že $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ (pro každé $x \in M$).

Je-li $x \in M$ a $f(x) = +\infty$, je $f_n(x) = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty = f(x)$. Je-li $f(x) < +\infty$ a $n > f(x)$, je $0 \le f(x) - f_n(x) < 1/2^n$; z toho ihned plyne, že i v tomto případě je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. $\square$

V dalším budeme potřebovat napsat monotónní limitu funkcí, z nichž každá je monotónní limitou jednoduchých funkcí, jako monotónní limitu jednoduchých funkcí; příslušný algoritmus popisuje

Věta 4.15. *Nechť v* M *je* $f_n \nearrow f$ *pro* $n \to \infty$ *a* $f_{n,k} \nearrow f_n$ *pro* $k \to \infty$ *a každé* n. *Pak posloupnost*

$$g_n := \max(f_{1,n}, \ldots, f_{n,n}) \tag{20}$$

splňuje v M *podmínky*

$$g_n \le f_n, \quad g_n \nearrow f. \tag{21}$$

Jsou-li funkce $f_{n,k}$ *jednoduché, platí totéž o funkcích* g_n.

D ů k a z . Protože $f_{1,n} \le f_{1,n+1}, \ldots, f_{n,n} \le f_{n,n+1}$, je $g_n \le g_{n+1}$; všude v M tedy existuje $g := \lim g_n$. Z nerovností $f_{1,n} \le f_1 \le f_n, \ldots, f_{n,n} \le f_n$, plynou nerovnosti $g_n \le f_n$; protože $f_n \le f$, je tím spíše $g_n \le f$ (pro každé n), a tedy i $g \le f$.

Pro každé $x \in M$ je $f_n(x) \nearrow f(x)$. Je-li tedy dáno libovolné číslo $A < f(x)$, existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že $f_N(x) > A$; protože je $f_{N,k}(x) \nearrow f_N(x)$ pro $k \to \infty$, existuje $K \in \mathbb{N}$ tak, že $f_{N,K}(x) > A$. Je-li $n > \max(N, K)$, je tedy

$$g_n(x) = \max(f_{1,n}(x), \ldots, f_{N,n}(x), \ldots, f_{n,n}(x)) \ge f_{N,n}(x) \ge f_{N,K}(x) > A;$$

tím spíše je $g(x) > A$. Protože to platí pro každé $A < f(x)$, je $g(x) \ge f(x)$.

Tím je dokázáno, že $g = f$; zbytek tvrzení je jistě (vzhledem k (19)) již zřejmý.

5. Lebesgueův integrál

Lebesgueův integrál budeme definovat ve čtyřech etapách: Nejdříve pro (všechny) jednoduché funkce, pak pro (všechny) nezáporné měřitelné funkce, dále pro (některé) funkce měnící obecně své znaménko, a nakonec pro (některé) funkce, které nejsou (na dané množině) definovány všude, ale jen všude až na jistou nulovou množinu.

Buď dána nějaká jednoduchá funkce f na nějaké (měřitelné) množině $M \subset \mathbb{R}^p$ a buď

$$f = \sum_{n=1}^{q} a_n \chi_{M_n} \tag{1}$$

její *kanonické vyjádření*. Protože kanonické vyjádření je funkcí f určeno jednoznačně, je *korektní* tato definice: **Lebesgueovým integrálem funkce** (1) **přes množinu** M rozumíme číslo

$$\int_M f := \sum_{n=1}^{q} a_n \mu\,(M_n)\,. \tag{2}$$

Protože jinými než Lebesgueovými integrály se soustavně zabývat nebudeme, budeme mluvit zpravidla krátce o **integrálu**.

Integrál (2) je vždy *nezáporný*; *nekonečný* může být jen tehdy, když je $\mu\,(M) = +\infty$. Pak má totiž i některá z množin M_n míru $+\infty$, a stačí, aby příslušný koeficient a_n byl kladný.

Je zřejmé, že

$$\int_M c = c\mu\,(M) \ \text{ *pro každou konstantu* } c \in \langle 0, +\infty) \text{ *a pro každou měřitelnou množinu* } M\,. \tag{3}$$

Je vhodné mít na paměti, že pro $c = 0$ je integrál roven 0 i v případě, že množina M má nekonečnou míru.

Poznámka. Představme si na příkladu z $\mathbb{R}^3$, co znamená (3) geometricky: Je-li $c \in \mathbb{R}_+$ a je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ např. kruh, je $\int_M c$ objem válce s podstavou o obsahu $\mu_2(M)$ a s výškou c. Nic nebrání tomu zobecnit pojem válce tak, aby mohl mít za podstavu libovolnou podmnožinu $\mathbb{R}^2$; je-li podstava M měřitelná, je $c\mu_2(M)$ „přirozeným“ zobecněním objemu příslušného válce $M \times \langle 0, c\rangle$. Je-li $c = 0$, nejde o „normální“ válec, ale můžeme mluvit např. o válci „degenerovaném“, s nulovou výškou a nulovým objemem; takováto terminologie nám umožní pracovat se všemi nezápornými (konečnými) „výškami“.

I (2) lze snadno interpretovat geometricky: Množina M je rozdělena na disjunktní měřitelné množiny M_n a pro každou z nich utvoříme válec s podstavou M_n a výškou a_n. Objemy získaných disjunktních válců sečteme.

Pro obecné p se jedná o obdobu válců v $\mathbb{R}^{p+1}$; podstava bude (měřitelnou) částí $\mathbb{R}^p$, „objem“ je třeba interpretovat jako $(p+1)$-rozměrnou Lebesgueovu míru. □

Je jistě zřejmé, že

$$\mu\,(M) = 0 \Rightarrow \int_M f = 0 \ \text{ *pro každou jednoduchou funkci* } f\,; \tag{4}$$

v jejím kanonickém rozkladu (1) jsou totiž všechny množiny M_n nulové, takže na pravé straně (2) se sčítají samé nuly. □

Velmi snadné je dokázat, že platí tato

Věta 5.1. *Pro každou jednoduchou funkci f na M a pro každou konstantu $c \in \langle 0, +\infty)$ je*

$$\int_M cf = c\int_M f\,. \tag{5}$$

D ů k a z . Je-li $c = 0$, jsou na obou stranách nuly; je-li $c \in \mathbb{R}_+$ a je-li (1) kanonický rozklad funkce f, je $cf = \sum_{n=1}^{q} ca_n\chi_{M_n}$ zřejmě kanonický rozklad funkce cf. Z toho a z definice integrálu plyne ihned rovnost (5). □

Dokázat analogickým způsobem rovnost $\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g$ (pro jednoduché funkce f, g) není možné, protože kanonické vyjádření funkce $f+g$ není obecně rovno součtu kanonických vyjádření funkcí f, g. (Funkce $f+g$ nabývá např. hodnotu 5 v bodech, v nichž jsou f, g např. rovny 1 a 4, ale také v bodech, v nichž jsou např. rovny 2 a 3 nebo $\frac{5}{2}$ a $\frac{5}{2}$ atd.) Potřebujeme proto nějaké tvrzení, pomocí něhož lze $\int_M f$ vypočítat za poněkud obecnější situace, než když je f vyjádřena kanonicky:

Věta 5.2. *Je-li $r \in \mathbb{N}$, je-li množina M sjednocením disjunktních měřitelných množin $N_1, \dots, N_r$ a jsou-li $b_1, \dots, b_r$ konečná nezáporná čísla*[25]), *je*

$$\int_M \sum_{k=1}^{r} b_k \chi_{N_k} = \sum_{k=1}^{r} b_k \mu(N_k)\,. \tag{6}$$

D ů k a z . Označme f integrovanou funkci. Aniž se cokoli podstatného změní, lze čísla b_k spolu s množinami N_k přečíslovat a seřadit do skupin tak, že

$$b_1 = \cdots = b_{k(1)} < b_{k(1)+1} = \cdots = b_{k(2)} < \cdots < b_{k(q-1)+1} = \cdots = b_{k(q)}\,.$$

Označíme-li společné hodnoty ve skupinách $a_1, \dots, a_q$, položíme-li $M_1 := N_1 \cup \cdots \cup N_{k(1)}, \ \dots\ ,$ $M_q := N_{k(q-1)+1} \cup \cdots \cup N_{k(q)}$ a znamená-li $k(0)$ nulu, je zřejmě

$$\sum_{k=1}^{r} b_k \mu(N_k) = \sum_{n=1}^{q} \sum_{j=k(n-1)+1}^{k(n)} b_j \mu(N_j) = \sum_{n=1}^{q} a_n \Big(\sum_{j=k(n-1)+1}^{k(n)} \mu(N_j) \Big) = \sum_{n=1}^{q} a_n \mu(M_n) = \int_M f\,,$$

protože poslední součet již odpovídá kanonickému vyjádření (1) funkce f. $\square$

Na základě právě dokázané věty můžeme již celkem snadno ověřit platnost nahoře zmíněného tvrzení o integraci součtu:

Věta 5.3. *Pro každé dvě jednoduché funkce f, g v M je*

$$\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g\,. \tag{7}$$

D ů k a z . Napišme obě funkce v kanonických tvarech

$$f = \sum_{n=1}^{q} a_n \chi_{M_n}\,, \quad g = \sum_{m=1}^{r} b_m \chi_{N_m}$$

a utvořme množiny $P(n,m) := M_n \cap N_m$, $1 \le n \le q$, $1 \le m \le r$. Množiny $P(n,m)$ jsou disjunktní, $\bigcup_{n=1}^{q} P(n,m) = N_m$, $\bigcup_{m=1}^{r} P(n,m) = M_n$, funkce $f+g$ je v každém $P(n,m)$ konstantní, rovná $a_n + b_m$. Je proto

$$f+g = \sum_{n=1}^{q} \sum_{m=1}^{r} (a_n + b_m) \chi_{P(n,m)}\,,$$

a z věty 5.2 plyne, že

$$\begin{aligned}\int_M (f+g) &= \sum_{n=1}^{q} \sum_{m=1}^{r} (a_n + b_m) \mu(P(n,m)) = \sum_{n=1}^{q} \Big(a_n \sum_{m=1}^{r} \mu(P(n,m)) \Big) + \sum_{m=1}^{r} \Big(b_m \sum_{n=1}^{q} \mu(P(n,m)) \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{q} a_n \mu(M_n) + \sum_{m=1}^{r} b_m \mu(N_m) = \int_M f + \int_M g\,.\end{aligned}$$

Věta 5.4. *Jsou-li f, g dvě jednoduché funkce v M a je-li $f \le g$ v M, je*

$$\int_M f \le \int_M g\,. \tag{8}$$

[25]) Nemusí být navzájem různá a nemusí tvořit rostoucí posloupnost, jako je tomu s čísly a_n v definici kanonického vyjádření. Pravá strana (6) je však opět součet objemů disjunktních válců; některé z nich mohou mít nyní touž výšku.

D ů k a z . Funkce $h := g - f$ je jednoduchá, takže $\int_M h \geq 0$; stačí tedy uvážit, že $f + h = g$, a užít větu 5.3.

Věta 5.5. *Jsou-li A, B dvě disjunktní měřitelné množiny a je-li f jednoduchá funkce na množině $M := A \cup B$, je*

$$\int_M f = \int_A f + \int_B f \,. \tag{9}$$

Důsledek. *Je-li f jednoduchá funkce v množině M, je*

$$\int_N f \leq \int_M f \quad \text{pro každou měřitelnou množinu } N \subset M. \tag{10}$$

D ů k a z . Je zřejmé, že restrikce $f\,|\,A$, $f\,|\,B$ jsou opět jednoduché funkce. Je-li f definována jako v (1), je

$$\int_M f = \sum_{n=1}^{q} a_n \mu\,(M_n) = \sum_{n=1}^{q} a_n \mu\,(A \cap M_n) + \sum_{n=1}^{q} a_n \mu\,(B \cap M_n) = \int_A f + \int_B f \,.$$

D ů s l e d e k je zřejmý: V hlavní části věty položíme $A = N$, $B = M - N$ a uvážíme, že $\int_{M-N} f \geq 0$.

Poznámka. Věty 5.1 a 5.3 by bylo možné shrnout do jednoho tvrzení o integrálu funkce tvaru $\alpha f + \beta g$, kde f, g jsou jednoduché funkce a α, β dvě nezáporná konečná čísla. Příslušné tvrzení lze pak indukcí rozšířit na libovolný konečný počet funkcí. Tedy:

(11) *Integrál lineární kombinace libovolného konečného počtu jednoduchých funkcí s nezápornými konečnými koeficienty je roven příslušné lineární kombinaci integrálů.*

Podobně lze i hlavní část věty 5.5 zobecnit na případ, kdy je M sjednocením většího počtu množin:

(12) *Integrál jednoduché funkce přes disjunktní sjednocení libovolného konečného počtu měřitelných množin je roven součtu integrálů přes tyto množiny.* $\square$

Přejděme nyní k tvrzením *o limitním přechodu za znamením integrálu*, tj. k otázce, kdy platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n \,. \tag{13}$$

Poznamenejme, že jde o problém velmi důležitý jak z hlediska teorie, tak i početní praxe; jak uspokojivé má řešení, záleží na tom, který integrál máme na mysli. *Lebesgueovu* teorii charakterisuje jednoduchost příslušných vět a – jak uvidíme později – zcela jednoduchý je v ní zejména monotónní limitní přechod. V případě *Riemannova* integrálu závisí příslušná tvrzení velmi výrazně na stejnoměrné konvergenci, což je podmínka značně silná, tedy méně často splněná a obtížněji ověřitelná. U monotónního limitního přechodu narazíme přitom na tuto nepříjemnost: Pro funkce f_n riemannovsky integrovatelné např. v $\langle 0, 1 \rangle$ *nezaručuje* podmínka $f_n \nearrow f$ existenci integrálu z f ani v případě, že je tato funkce v $\langle 0, 1 \rangle$ omezená. (Příklad: Seřaďme všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ do prosté posloupnosti $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$; funkce f_n nechť je rovna 1 v bodech $r_1, \ldots, r_n$ a všude jinde v $\langle 0, 1 \rangle$ nechť se rovná 0. Jak snadno (např. přímo z definice integrálu) zjistíme, je pak Riemannův integrál $\int_0^1 f_n$ pro každé n nulový; zároveň je zřejmé, že $f_n \nearrow f$ v $\langle 0, 1 \rangle$, kde f je Dirichletova funkce, a ta – jak známo – Riemannův integrál nemá.) $\square$

První z vět o limitním přechodu za znamením integrálu má – přes svou dočasnou nepostradatelnost – jen pomocný charakter; později ji nahradí daleko obecnější věta 5.16.

Věta 5.6. *Jsou-li f a f_k, kde $k \in \mathbb{N}$, jednoduché funkce na množině M, pak*

$$f_k \nearrow f \ \text{v} \ M \ \Rightarrow \int_M f_k \nearrow \int_M f \,. \tag{14}$$

D ů k a z . Z nerovností $f_k \leq f_{k+1}$ platných v M pro všechna $k \in \mathbb{N}$ plynou podle věty 5.4 nerovnosti $\int_M f_k \leq \int_M f_{k+1}$, které ukazují, že posloupnost o členech $\int_M f_k$ je neklesající. Její limita tedy existuje, a zbývá dokázat, že je rovna $\int_M f$.

Předpokládejme nejdříve, že f je konstantní, rovná konečnému $c \geq 0$. Protože v případě $c = 0$ jsou i všechny funkce f_k identicky rovny nule a vše je zřejmé, buď $c \in \mathbb{R}_+$, a nechť $A \in (0, c)$ je (zatím) pevně dáno. Protože $f_k \nearrow c$, tvoří množiny $X_k := \{x \in M\,;\ f_k(x) > A\}$ neklesající posloupnost; protože pro každé $x \in M$ existuje k tak, že $f_k(x) > A$, je sjednocením množin X_k množina M. Podle věty 3.8 je tedy $\mu(X_k) \nearrow \mu(M)$. Protože je $A \cdot \chi_{X_k} \leq f_k \leq c$ pro každé k, je

$$A\mu(X_k) = \int_M A \cdot \chi_{X_k} \leq \int_M f_k \leq \int_M c = c\mu(M)\,,$$

z čehož plynou limitním přechodem nerovnosti

$$A\mu(M) \leq \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \leq c\mu(M)\,.$$

Protože $A \in (0, c)$ bylo libovolné, lze provést limitní přechod $A \to c-$, a okamžitě vidíme, že platí závěr implikace (14) – zatím ovšem za dodatečného předpokladu, že f je konstantní.

Předpokládejme nyní, že f je obecná jednoduchá funkce a že (1) je její kanonický rozklad. Pak jsou restrikce $f\,|\,M_n$ $(1 \leq n \leq q)$ konstantní, rovné a_n, a podle toho, co jsme již dokázali, je tedy

$$\int_{M_n} f_k \nearrow \int_{M_n} f \quad \text{pro každé} \quad n = 1, \ldots, q\,.$$

Sečteme-li podle n, dostaneme (vzhledem k (12)) žádaný výsledek. □

Následující věta nám umožní rozšířit definici integrálu na množinu všech nezáporných měřitelných funkcí.

Věta 5.7. *Nechť f je funkce definovaná v (měřitelné) množině M a nechť $\{f_k\}$ a $\{g_k\}$ jsou dvě posloupnosti jednoduchých funkcí v M. Pak*

$$f_k \nearrow f, \quad g_k \nearrow f \ \text{ v } \ M \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} \int_M f_k = \lim_{k\to\infty} \int_M g_k\,. \tag{15}$$

D ů k a z . Protože posloupnosti o členech $\int_M f_k$ resp. $\int_M g_k$ jsou neklesající, limity v závěru implikace (15) existují, a zbývá dokázat jejich rovnost.

Zvolme na okamžik pevně $i \in \mathbb{N}$ a buď $h_k := \min(f_k, g_i)$; funkce h_k jsou jednoduché a splňují v M podmínku $h_k \nearrow \min(f, g_i) = g_i$ pro $k \to \infty$, protože $f \geq g_i$. Z věty 5.6 a z nerovností $h_k \leq f_k$ platných v M pro všechna k plyne, že $\int_M g_i = \lim_{k\to\infty} \int_M h_k \leq \lim_{k\to\infty} \int_M f_k$.

Protože i bylo libovolné, vyplývá z toho, že $\lim_{i\to\infty} \int_M g_i \leq \lim_{k\to\infty} \int_M f_k$; druhý integrál v (15) je tedy nejvýše roven prvnímu. Protože předpoklady věty jsou symetrické vzhledem k funkcím f_k, g_k, platí i obrácená nerovnost, což dohromady dává žádanou rovnost. □

Každá funkce f měřitelná na množině $M \in \mathcal{M}$ je (podle věty 4.14) limitou neklesající posloupnosti $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí, jejichž integrál jsme již definovali; základní myšlenkou, jak definovat integrál z nezáporné měřitelné funkce, je napsat f jako limitu takové posloupnosti $\{f_n\}$ a definovat integrál z f jako limitu integrálů z f_n. Protože posledně jmenovaná posloupnost je monotónní, není problém s *existencí* této limity. Problém je v tom, že buď se musíme rozhodnout, že pro danou funkci f užijeme zcela určitou, jednoznačně definovanou posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí a integrál z f definujeme pomocí ní, nebo musíme dokázat nezávislost limity integrálů z f_n na bližší volbě této posloupnosti.[26]) Ukazuje se, že první možnost je sice realizovatelná (ve větě 4.14 jsme sestrojili zcela určitou, na základě funkce f jednoznačně definovanou posloupnost jednoduchých funkcí $f_n \nearrow f$), ale zcela „nepraktická“: Součty funkcí f_n, g_n přiřazených takto funkcím f, g, by nemusely tvořit posloupnost přiřazenou funkci $f + g$; analogie věty 5.3 pro obecné (měřitelné nezáporné) funkce by pak nebyla

[26]) Není-li $f \equiv 0$, je posloupností, které splňují (pro danou funkci f) uvedené podmínky, nespočetně mnoho.

triviálním důsledkem věty 5.3 (v níž jsou funkce f, g jednoduché). Podobné potíže by se vyskytly i v celé řadě dalších situací.

„Naštěstí“ věta 5.7 zaručuje, že můžeme jít druhou z naznačených cest: $\lim \int_M f_n$ opravdu na bližší volbě posloupnosti jednoduchých funkcí f_n, pro něž je $f_n \nearrow f$ v M, nezávisí. Je tedy *korektní* definovat **Lebesgueův integrál funkce f měřitelné a nezáporné v M** rovností

(16) $$\int_M f := \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\,, \text{ kde } f_n \text{ jsou jednoduché funkce, pro něž je } f_n \nearrow f \text{ v } M.$$

Jak je patrné,

(17) *Lebesgueův integrál přes M funkce měřitelné a nezáporné v M existuje vždy*

a je nezáporný, ne nutně konečný. *Toto mimořádně závažné tvrzení budeme mít stále na paměti.* □

Je-li funkce f měřitelná a nezáporná v M, existují jednoduché funkce $f_n \nearrow f$; je-li $c \in \langle 0, +\infty)$, jsou cf_n jednoduché funkce splňující podmínku $cf_n \nearrow cf$. Podle věty 5.1 je kromě toho $\int_M cf_n = c\int_M f_n$ pro každé n. Z definice integrálu plyne, že $\int_M f_n \nearrow \int_M f$, $\int_M cf_n \nearrow \int_M cf$. Z toho je patrné, že větu 5.1 lze zobecnit takto:

(18) *Je-li funkce f nezáporná a měřitelná v M a je-li $c \in \langle 0, +\infty)$, je* $$\int_M cf = c\int_M f.$$

Podobně je to s větou 5.3: Jsou-li f, g dvě funkce, nezáporné a měřitelné v M, existují dvě posloupnosti $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ jednoduchých funkcí tak, že $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$; $f_n + g_n$ jsou pak jednoduché funkce splňující podmínku $f_n + g_n \nearrow f + g$. Podle věty 5.3 je $\int_M (f_n + g_n) = \int_M f_n + \int_M g_n$ (pro každé n), podle definice integrálu platí relace $\int_M f_n \nearrow \int_M f$, $\int_M g_n \nearrow \int_M g$, $\int_M (f_n + g_n) \nearrow \int_M (f + g)$.

Z toho je patrná platnost tohoto tvrzení (které zobecňuje větu 5.3):

(19) *Jsou-li funkce f, g nezáporné a měřitelné v M, je* $$\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g.$$

Kombinací právě dokázaných dvou tvrzení a indukcí dostaneme ihned tuto analogii tvrzení (11):

(20) *Je-li $q \in \mathbb{N}$, jsou-li $f_1, \dots, f_q$ nezáporné funkce měřitelné v M a jsou-li $c_1, \dots, c_q$ konečná nezáporná čísla, je $\int_M \left(\sum_{n=1}^q c_n f_n\right) = \sum_{n=1}^q c_n \int_M f_n$.* □

Další, předposlední krok při rozšiřování definice integrálu je jednoduchý: **Lebesgueův integrál obecné funkce f měřitelné v M přes tuto množinu** definujeme rovností

(21) $$\int_M f := \int_M f^+ - \int_M f^-\,, \text{ má-li pravá strana této rovnosti smysl};$$

zobecnění je *korektní*, protože v případě nezáporné funkce f je $f^+ = f$, $f^- \equiv 0$, a nová definice integrálu je tedy v souladu s definicí dosavadní.

Protože oba integrály na pravé straně (21) existují a jsou nezáporné, *integrál vlevo neexistuje právě tehdy, když jsou oba integrály vpravo rovny $+\infty$*. Zároveň je zřejmé, že *integrál* (21) *je větší než $-\infty$ resp. menší než $+\infty$ resp. konečný právě tehdy, když je $\int_M f^- < +\infty$ resp. $\int_M f^+ < +\infty$ resp. když jsou oba integrály konečné*.

Je-li Lebesgueův integrál funkce f přes množinu M konečný, říkáme, že **konverguje**; za všeobecně přijaté lze považovat označení příslušné množiny funkcí:

(22) $$\mathcal{L}(M) := \{f : M \to \mathbb{R}^*;\ \textstyle\int_M f \in \mathbb{R}\}.$$

Podstatné je přitom písmeno „L“, nikoli typ písma, kterým se tiskne. [27]) □

[27]) V češtině jsou bohužel potíže s *adjektivem*, které by vyjadřovalo, že daná funkce f má přes danou množinu M *konečný* integrál. Občas se říká, že je přes M integrovatelná (integrabilní), ale bohužel to neodpovídá mezinárodní terminologii, kde toto slovo znamená spíše funkci, která má *konečný nebo nekonečný* integrál. (Bylo by skutečně dosti zvláštní říkat o funkci, která sice má integrál, ale rovný $\pm\infty$, že není integrovatelná.) V Saksově monografii [6] najdeme termíny „sommable“ pro funkce z $\mathcal{L}(M)$ a „intégrable“ pro funkce f, pro něž $\int_M f$ existuje. V češtině (na rozdíl od řady cizích jazyků vč. např. ruštiny) jedno z těchto slov chybí. Nezbývá proto asi nic jiného než říkat, že „integrál existuje“, „integrál konverguje“, „funkce má integrál“, „funkce má konečný integrál“ neboli že „funkce patří do $\mathcal{L}$“.

Jak jsme již řekli na samém začátku tohoto oddílu, čeká nás ještě jedno, relativně jednoduché zobecnění integrálu, které je však zcela jiné povahy než např. poslední dvě zobecnění.[28]) Protože na integrálu se již „skoro nic podstatného nezmění“, ale tvrzení o integrálu jsou při jeho *aktuální* definici poněkud jednodušší, odvodíme většinu z nich pro integrál podle této – ještě ne zcela obecné – definice.

Poznámka. Zatímco v teorii vystačíme zpravidla se symbolem $\int_M f$, v početní praxi se s výhodou užívají i jiná označení, např.

$$\int_M f(x)\,dx, \quad \int_M f(t)\,dt, \quad \int_M f(x_1,\dots,x_p)\,dx_1\dots dx_p, \quad \int_M f(u_1,\dots,u_p)\,du_1\dots du_p\,; \tag{23}$$

symbolům dx, $dx_1\dots dx_p,\dots$ se již dávno nepodkládá žádný jiný význam (např. *vpravdě archaická představa nekonečně malých diferenciálů*), než že slouží k vyznačení proměnné resp. proměnných „podle které resp. kterých“ se má integrovat. Značíme-li „proměnnou“ v $\mathbb{R}$ písmenem x resp. t, píšeme v konkrétních situacích za znamením integrálu místo f zpravidla $f(x)\,dx$ resp. $f(t)\,dt$. Je-li symbol x vektorovým označením bodu z $\mathbb{R}^p$, užíváme pro integrál opět symbol $\int_M f(x)\,dx$; ze souvislosti by pak mělo být patrné, že nepracujeme v $\mathbb{R}$, ale v $\mathbb{R}^p$. Zapisujeme-li však body z $\mathbb{R}^p$ ve tvaru $(x_1,\dots,x_p)$, kde $x_k\in\mathbb{R}$, hodí se k označení integrálu třetí ze symbolů uvedených v (23); i symbol $\int$ můžeme při tom napsat p-krát za sebou, chceme-li zdůraznit, že jde o *p-rozměrnou integraci*, tj. o integraci přes množinu $M\subset\mathbb{R}^p$ při míře μ_p.

Protože body roviny resp. prostoru značíme často (x,y) resp. (x,y,z), je nasnadě užívat pro integrály přes rovinné nebo prostorové „útvary“ M např. znaky

$$\int_M f(x,y)\,dxdy, \quad \int_M f(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{nebo} \quad \iint_M f(x,y)\,dxdy, \quad \iiint_M f(x,y,z)\,dxdydz\,; \tag{24}$$

poslední dva symboly zvýrazňují dimenzi prostoru, v němž leží množina M.

Užitečnost symboliky využívající znaků dx, dy apod. je dobře patrná u integrálů závislých na parametru (nebo parametrech): Je-li f funkce např. dvou proměnných, je ze zápisu

$$\int_M f(x,y)\,dx \quad \text{resp.} \quad \int_M f(x,y)\,dy \tag{25}$$

ihned vidět, že v prvním resp. druhém případě integrujeme vlastně funkci $f(\,\cdot\,,y)$ resp. $f(x,\,\cdot\,)$ první resp. druhé proměnné, zatímco y resp. x je při integraci „parametrem“. Symboly

$$\int_M f(\,\cdot\,,y)\ , \quad \int_M f(x,\,\cdot\,) \tag{26}$$

jsou sice asi přesnější, ale trochu hůře čitelné; v každém z těchto integrálů se integruje podle proměnné nahrazené tečkou.

Jsou-li hodnoty $f(x)$ resp. $f(x_1,\dots,x_p)$ funkce f dány „vzorcem“, dáme pravděpodobně přednost některému z označení (23), (24); krátký zápis $\int_M f$ by v tom případě byl totiž ze zřejmých důvodů zpravidla velmi těžkopádný. $\square$

Přikročme nyní k odvození základních vlastností Lebesgueova integrálu; tvrzení (18) lze zobecnit takto:

$$\textit{Je-li } c\in\mathbb{R},\ \textit{je}\ \int_M cf = c\int_M f,\ \textit{existuje-li integrál vpravo}. \tag{27}$$

D ů k a z stačí provést pouze pro nenulová $c\in\mathbb{R}$, protože pro $c=0$ tvrzení platí triviálně.

Pro každé $c\in\mathbb{R}_+$ je $(cf)^+=cf^+$, $(cf)^-=cf^-$; z toho podle (18) plyne, že $\int_M(cf)^+=c\int_M f^+$, $\int_M(cf)^-=c\int_M f^-$. Protože $\int_M f$ existuje, lze pravé, tedy i levé strany odečíst, čímž dostaneme rovnost z (27).

Protože $(-f)^+=f^-$, $(-f)^-=f^+$, je zřejmé přímo z definice integrálu, že

$$\int_M(-f) = -\int_M f\,, \quad \textit{existuje-li jeden z těchto integrálů}. \tag{28}$$

[28]) Existují ovšem daleko podstatnější zobecnění Lebesgueova integrálu; nejznámější z nich je tzv. *zobecněný Lebesgueův integrál* a *Perronův integrál*. O obou se čtenář může dočíst v [2].

Je-li $c \in \mathbb{R}_-$, je $c^* := -c \in \mathbb{R}_+$, takže podle toho, co jsme již dokázali, je $\int_M c^* f = c^* \int_M f$. Abychom nahlédli, že rovnost z (27) platí i nyní, stačí užít tvrzení (28).

Věta 5.8. *Implikace*

$$\mu(M) = 0 \Rightarrow \int_M f = 0 \tag{29}$$

platí pro každou funkci $f : M \to \mathbb{R}^*$.

D ů k a z . Jak víme (viz (3) v odd. 4), je *každá* funkce definovaná na nulové množině měřitelná. Pro jednoduché funkce jsme platnost implikace (29) konstatovali v (4). Je-li f nezáporná, existují jednoduché funkce f_n tak, že $f_n \nearrow f$; protože $\int_M f_n = 0$ pro všechna n, je i $\int_M f = 0$ podle definice tohoto integrálu. Pro obecnou funkci f je tedy $\int_M f^+ = \int_M f^- = 0$, a v důsledku toho i $\int_M f = 0$.

Věta 5.9. *Jsou-li měřitelné množiny A, B disjunktní a je-li $M = A \cup B$, je*

$$\int_M f = \int_A f + \int_B f, \quad \textit{má-li jedna strana rovnosti smysl}; \tag{30}$$

analogické tvrzení platí pro sjednocení jakéhokoli konečného počtu disjunktních měřitelných množin.[29])

D ů k a z . Protože druhá část tvrzení plyne indukcí z části první, dokážeme jen první část. Pro jednoduché funkce je tvrzení obsahem věty 5.5. Je-li f měřitelná a nezáporná (v M, neboli jak v A, tak i v B), existují jednoduché funkce f_n tak, že $f_n \nearrow f$ v M; protože je $\int_M f_n = \int_A f_n + \int_B f_n$ pro každé n a protože

$$\int_M f_n \nearrow \int_M f, \quad \int_A f_n \nearrow \int_A f, \quad \int_B f_n \nearrow \int_B f,$$

je zřejmé, že dokazovaná rovnost platí i v tomto případě.

Pro obecnou měřitelnou funkci f je tedy

$$\int_M f^+ = \int_A f^+ + \int_B f^+, \quad \int_M f^- = \int_A f^- + \int_B f^-,$$

a jde jen o to, zdali lze druhou rovnost odečíst od první.

Má-li smysl levá strana rovnosti v (30), je buď $\int_M f^+ < +\infty$ nebo $\int_M f^- < +\infty$; stejné nerovnosti pak ovšem platí i pro integrály přes A a B, takže odečíst můžeme. Má-li smysl pravá strana rovnosti v (30), jsou buď oba integrály vpravo větší než $-\infty$, nebo jsou oba menší než $+\infty$. V prvním případě jsou integrály z f^- přes A i přes B konečné, a totéž tedy platí o integrálu přes M; ve druhém případě jsou konečné všechny tři integrály z f^+. I nyní lze tedy odečíst. □

Přímým důsledkem právě dokázané věty je toto tvrzení:

Věta 5.10. *Nechť N je měřitelná část množiny M; pak platí:*

1. *Existuje-li $\int_M f$, existuje i $\int_N f$.*

2. *Konverguje-li $\int_M f$, konverguje i $\int_N f$. Obecněji: Je-li $\int_M f$ větší než $-\infty$ resp. menší než $+\infty$, platí totéž o $\int_N f$.*

3. *Je-li f měřitelná a nezáporná v M, je $\int_N f \le \int_M f$.*

D ů k a z . Ve větě 5.9 stačí klást $A = N$, $B = M - N$ a při důkazu posledního tvrzení uvážit, že integrál z nezáporné (měřitelné) funkce (přes jakoukoli měřitelnou množinu) je integrálem z její kladné části, takže je to nezáporné číslo. □

Z elementů analýzy známe příklady funkcí spojitých v intervalu (a, b), pro něž Newtonův integrál $\int_a^b f$ existuje, ale Newtonův integrál $\int_a^b |f|$ nikoli. Takovým integrálům se říká *neabsolutně konvergentní* a dobře známým příkladem je $\int_0^{+\infty} (\sin / \mathrm{Id})$. Na rozdíl od toho *neabsolutně konvergentní Lebesgueovy integrály neexistují*; *každý konvergentní Lebesgueův integrál konverguje absolutně*:

Věta 5.11. *Pro každou funkci f měřitelnou v M platí:*

---

[29]) Tato vlastnost se nazývá (*konečná*) *aditivita* integrálu vzhledem k integračnímu oboru.

(31) $$\Big|\int_M f\Big| \le \int_M |f|\,, \quad \textit{existuje-li integrál vlevo}\,;$$

(32) $$\textit{integrál } \int_M f \textit{ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál } \int_M |f|\,.$$

D ů k a z . Vzhledem k tomu, že $|f| = f^+ + f^-$, je (podle definice $\int_M f$ a podle (19))

(33) $$\Big|\int_M f\Big| = \Big|\int_M f^+ - \int_M f^-\Big| \le \int_M f^+ + \int_M f^- = \int_M |f|\,,$$

má-li první z těchto integrálů smysl. Protože (pro měřitelnou funkci f) je konečnost každého z integrálů $\int_M f$, $\int_M |f|$ ekvivalentní s konečností integrálů $\int_M f^+$, $\int_M f^-$, je zřejmé, že platí (32).

Věta 5.12. *Pro každé dvě funkce f, g platí:*

(34) $$f \le g \text{ v } M \Rightarrow \int_M f \le \int_M g\,, \quad \textit{existují-li oba integrály}\,.$$

Důsledek 1. *Je-li f měřitelná v M, je-li $|f| \le g$ v M a je-li $g \in \mathcal{L}(M)$, je i $f \in \mathcal{L}(M)$.*

Důsledek 2. *Je-li f měřitelná a omezená na množině M konečné míry, je $f \in \mathcal{L}(M)$.*

Důsledek 3. *Je-li f měřitelná a omezená na množině M a je-li $g \in \mathcal{L}(M)$, je i $fg \in \mathcal{L}(M)$.*

D ů k a z . Platnost tvrzení z hlavní části věty je nám (z věty 5.4) známa v případě, že funkce f, g jsou jednoduché.

Jsou-li funkce f, g nezáporné a měřitelné, existují jednoduché funkce f_n, g_n tak, že $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$ v M. Funkce $h_n := \min(f_n, g_n)$ jsou jednoduché; protože $h_n \le g_n$, je i $\int_M h_n \le \int_M g_n$ (pro každé n). Protože $h_n \nearrow \min(f,g) = f$ a $g_n \nearrow g$, je

$$\int_M f = \lim_{n\to\infty} \int_M h_n \le \lim_{n\to\infty} \int_M g_n = \int_M g\,.$$

Jsou-li f, g obecné funkce, které mají přes M integrály, uvažme, že $f \le g \Rightarrow f^+ \le g^+,\ f^- \ge g^-$. Z toho, co jsme již dokázali, pak plyne, že

$$\int_M f^+ \le \int_M g^+, \quad \int_M f^- \ge \int_M g^-\,,$$

a stačí odečíst.

Pokud se týká důsledku 1, stačí uvážit, že z nerovností $-g \le f \le g$, které v M předpokládáme, plynou nerovnosti $g^- = (-g)^+ \le f^+ \le g^+$, $g^+ = (-g)^- \ge f^- \ge g^-$. Protože integrály z g^+ a z g^- jsou konečné, platí totéž i o integrálech z f^+ a z f^-, což dokazuje, že $f \in \mathcal{L}(M)$.

K důkazu důsledku 2 stačí uvážit, že 1) existuje $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že $|f| \le K$ všude v M a 2) že $\mu(M) < +\infty \Rightarrow \int_M K = K\mu(M) < +\infty \Rightarrow K \in \mathcal{L}(M)$, a aplikovat pak důsledek 1.

Důsledek 3 plyne z nerovnosti $|fg| \le K|g|$ a z důsledku 1, protože $\int_M K|g| = K\int_M |g| \in \mathbb{R}$. □

Důležitá poznámka. Jak již bylo řečeno, nezáporné měřitelné funkce mají přes měřitelné množiny Lebesgueův integrál sice vždy, integrál však nemusí být konečný. Důsledky právě dokázané věty patří mezi *nejdůležitější kritéria konvergence integrálu*. První z nich se často cituje např. takto:

(35) *Měřitelná funkce, majorizovatelná (v absolutní hodnotě) funkcí z $\mathcal{L}$, leží v $\mathcal{L}$.*

(V literatuře se někdy toto důležité tvrzení cituje heslem: „Měřitelná funkce mající integrovatelnou majorantu je sama integrovatelná.“ Pak ovšem autor musí termín „integrovatelná majoranta“ definovat jako synonymum „majoranty z $\mathcal{L}$“, protože jinak by tvrzení bylo triviálně neplatné – každá funkce má totiž majorantu $\equiv +\infty$, a ta má integrál přes každou měřitelnou množinu. Na rozdíl od formulace z (35) zde *hrozí značné nebezpečí z nedorozumění*; sr. s poznámkou [27].) □

Zbývá provést *závěrečný krok v definici Lebesgueova integrálu* – krok velmi závažný z hlediska teorie a velmi užitečný z hlediska praxe. Souvisí s tím, že nulové množiny hrají při lebesgueovské integraci „zcela zanedbatelnou“ roli. Zaveďme především běžnou terminologii užívanou v souvislosti s výjimkami na nulových množinách:

Je-li $V(x)$ výrok týkající se bodů prostoru $\mathbb{R}^p$, budeme říkat, že **výrok** V **platí skoro všude v množině** $M \subset \mathbb{R}^p$ (nebo: $V(x)$ **platí pro skoro všechna** $x \in M$), existuje-li nulová množina N tak, že $V(x)$ platí pro všechna $x \in M - N$. Slova „skoro všude“ resp. „skoro všechna“ budeme zkracovat na „s. v.“; není vyloučeno, že ze stylistických důvodů někdy řekneme např. „skoro každý“ bod $x \in M$ má vlastnost $V(x)$ apod.

Připomeňme, že *každá nulová množina je měřitelná*. Jistě tedy platí implikace

(36) $$M \in \mathcal{M},\ \mu(N) = 0 \Rightarrow M \cup N \in \mathcal{M},\ M - N \in \mathcal{M},\ \mu(M \cup N) = \mu(M - N) = \mu(M)\ ;$$

ani přidáním, ani odečtením nulové množiny nezměníme ani měřitelnost množiny, ani její míru.

Symetrickou diferencí množin A, B se rozumí množina

(37) $$\Delta(A, B) := (A - B) \cup (B - A);$$

je to množina všech bodů, které patří právě do jedné z množin A, B. Říkejme, že **množiny** A, B jsou **ekvivalentní**, je-li $\mu(\Delta(A, B)) = 0$, a pišme pak $A \sim B$. Protože pro každé dvě množiny A, B platí identity $A = A \cap B \cup (A - B)$, $B = A \cap B \cup (B - A)$, je přímým důsledkem (36) platnost implikace

(38) $$A \in \mathcal{M},\ A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{M},\ \mu(A) = \mu(B)\ .$$

Vzhledem k tomu, že nulové množiny tvoří σ-okruh, je zřejmé, že platí např. i tato tvrzení:

(39) $$A \sim B,\ V(x) \textit{ platí s. v. v } A \Rightarrow V(x) \textit{ platí s. v. v } B\,;$$

(40) $$V(x) \textit{ platí s. v. na každé ze spočetně mnoha množin } M_n \Rightarrow V(x) \textit{ platí s. v. v } \bigcup_n M_n. \quad \square$$

Říkejme, že dvě **funkce** f, g **jsou ekvivalentní v množině** M, je-li $f = g$ s. v. v M; pišme pak $f \sim g$ v M. V této definici je implicite obsaženo, že obě funkce f, g jsou definovány skoro všude v M; *nemusí* to být všude v M!

Z definice měřitelnosti je zřejmé, že platí: *Jsou-li funkce f, g definovány všude v M, je-li f měřitelná v M a je-li $f \sim g$ v M, je i g měřitelná v M.*

Žádná změna funkce f na žádné množině míry 0 neovlivní tedy její měřitelnost (resp. neměřitelnost). Funkci definovanou jen skoro všude v množině $M \in \mathcal{M}$, tedy všude v $M - N$, kde $\mu(N) = 0$, můžeme v N vždy nějak definovat [30]); jakmile je definována v celém M, má smysl otázka, zdali je měřitelná, a odpověď na tuto otázku je *nezávislá na tom, jak jsme funkci f na množině N definovali*. Zřejmě tedy lze měřitelnost funkce na množině M *zobecnit* takto:

Říkejme, že funkce definovaná s. v. v měřitelné množině M je **měřitelná v** M, je-li po (jakémkoli) rozšíření na celé M měřitelná v M v dosavadním smyslu.

Jak se snadno přesvědčíme, i po tomto zobecnění budou platit tvrzení analogická těm, která jsme o měřitelných funkcích dokázali v oddílu 4. Výroky platné původně všude lze ve většině případů nahradit výroky platnými jen skoro všude. $\square$

Podle věty 5.8 je integrál jakékoli funkce přes jakoukoli nulovou množinu M (na níž je funkce definována) roven nule. Protože platí i věta 5.9, je zřejmé, že i zde můžeme *zobecnit*:

Předpokládejme, že $M \in \mathcal{M}$ a že funkce f je měřitelná v M; pak je f definována v $M - N$, kde $N \subset M$ je jistá nulová množina. Buď g nějaké rozšíření funkce f z $M - N$ na M a definujme:

Integrálem funkce f **přes množinu** M rozumíme $\int_M g$ v dosavadním smyslu, pokud tento integrál existuje. Z toho, co jsme řekli, je zřejmé, že *existence ani hodnota integrálu nezávisí na způsobu, jak bylo rozšíření funkce f z $M - N$ na M provedeno.* Definice je tedy *korektní*; pro právě definovaný

[30]) Pokud není $N = \emptyset$, lze to provést nespočetně mnoha způsoby; patrně nejjednodušší je definovat ji v N jako nulu.

integrál budeme samozřejmě užívat dosavadní označení $\int_M f$. Spolu s integrálem změníme ovšem i smysl symbolu $\mathcal{L}(M)$: Bude nyní znamenat systém všech funkcí *definovaných skoro všude* v M, pro něž $\int_M f$ konverguje.

Modifikaci vět dokázaných pro integrál přes M z funkcí definovaných *všude* v M na tvrzení o poněkud obecnější integraci funkcí definovaných jen *skoro všude* v M přenecháváme čtenáři. Uveďme jen dva (náhodně vybrané) příklady na to, jak lze dokázané věty modifikovat; čtenářům doporučujeme, aby sami podobným způsobem modifikovali dalších několik tvrzení:

$$f \le g \text{ s. v. v } M \Rightarrow \int_M f \le \int_M g, \ \textit{existují-li oba integrály}, \tag{41}$$

$$f \textit{ je měřitelná v } M, \ |f| \le g \text{ s. v. v } M, \ g \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(M), \ |f| \in \mathcal{L}(M). \tag{42}$$

Poznámka. Je zřejmé, že platí implikace

$$f \sim g \ \text{ v } \ M_1 \sim M_2 \Rightarrow \int_{M_1} f = \int_{M_2} g, \ \text{ existuje-li jeden z integrálů.} \tag{43}$$

Funkci f tedy můžeme podle potřeby upravovat na množinách míry 0 a stejně tak můžeme přidáváním nebo ubíráním nulových množin měnit původní integrační obor, aniž to jakkoli ovlivní existenci resp. hodnotu integrálu. Při integraci funkcí f_n definovaných jen s. v. v M budeme často *bez komentáře* předpokládat, že jsou definovány *všude* v M, a např. předpoklad $f_n \to f$ s. v. v M nahradíme silnějším předpokladem $f_n \to f$ všude v M. Takovéto modifikace jsou *přípustné* a v praxi *nesmírně výhodné*:

Místo toho, abychom integrovali Dirichletovu nebo Riemannovu funkci, můžeme integrovat funkci (identicky) nulovou; obě funkce jsou totiž rovny 0 s. v. v $\mathbb{R}$.

Integraci funkce $f(x,y) := \lg(x^2+y^2)$ např. přes jednotkový kruh nebrání, že f není v počátku definována, a je lhostejné, rozumíme-li „jednotkovým kruhem“ uzavřený nebo otevřený jednotkový kruh U – rozdíl je množina míry 0; podstatné je, že f je v $M := U - \{(0,0)\}$ spojitá (tedy měřitelná) a záporná, protože to zaručuje existenci integrálu. (Při řešení tohoto příkladu bychom asi přešli k polárním souřadnicím pomocí věty 6.6 o substituci, kterou vyslovíme v následujícím oddílu; substituce $\Phi(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ splňuje podmínky věty 6.6 např. v intervalu $(0,1) \times (0,2\pi)$, přičemž druhý z intervalů nelze bez porušení prostoty funkce Φ zvětšit. Funkce Φ zobrazuje sice uvedený otevřený obdélník jen na množinu, která vznikne z M odstraněním otevřené úsečky $(0,1)$ na ose x, ale to nevadí, protože odstraněná úsečka má dvojrozměrnou míru 0.) $\square$

Následujících několik vět ukazuje, že v jistém smyslu výjimečně se integrovatelné funkce chovají jen na nulových množinách.

Věta 5.13. *Je-li $f \in \mathcal{L}(M)$, je f konečná s. v. v M. Obecněji: Je-li $\int_M f < +\infty$ resp. $\int_M f > -\infty$, je $f < +\infty$ resp. $f > -\infty$ s. v. v M.*

D ů k a z . Protože první tvrzení věty je konjunkcí zbývajících dvou (obecnějších) tvrzení, a protože důkaz třetího tvrzení je zcela analogický důkazu druhého z nich, omezme se na důkaz druhého tvrzení.

Z předpokladu $\int_M f < +\infty$ plyne, že $\int_M f^+ < +\infty$. Protože $N := \{x \in M;\ f(x) = +\infty\}$ je měřitelná množina a protože v ní je $f^+ \ge n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je

$$n\mu(N) = \int_N n \le \int_N f^+ \le \int_M f^+ < +\infty \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}.$$

To je však možné jen v případě, že $\mu(N) = 0$. $\square$

Právě dokázaná věta umožňuje důkaz tohoto velmi závažného tvrzení:

Věta 5.14. 1. *Rovnost*

$$\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g \tag{44}$$

platí, má-li její pravá strana smysl.

2. *Obecněji : Je-li* $q \in \mathbb{N}$ *a jsou-li* $c_1, \ldots, c_q$ *konečná reálná čísla, platí rovnost*

$$\int_M \Big(\sum_{n=1}^{q} c_n f_n \Big) = \sum_{n=1}^{q} c_n \int_M f_n\,, \quad \text{\textit{má-li pravá strana smysl.}} \tag{45}$$

D ů k a z . Ad 1. Protože součet integrálů na pravé straně (44) má podle předpokladu smysl, je buď $\int_M f > -\infty$, $\int_M g > -\infty$, nebo $\int_M f < +\infty$, $\int_M g < +\infty$. Protože druhý případ lze převést na první tím, že od f, g přejdeme k $-f$, $-g$, což má podle tvrzení (28) za následek jen změnu znaménka u všech tří integrálů v (44), stačí vyšetřit první z uvedených případů. Podle věty 5.13 je pak $f > -\infty$, $g > -\infty$ s. v. v M, a lze jistě předpokládat, že je to pravda všude v M; pak je ovšem i $f + g > -\infty$ všude v M a všechny tři funkce f^-, g^-, $(f+g)^-$ jsou všude v M konečné.

Sečtením (evidentních) nerovností $-f \leq f^-$, $-g \leq g^-$ dostaneme nerovnost $-f - g \leq f^- + g^-$, a protože její pravá strana je nezáporná, je v důsledku toho

$$(f+g)^- \leq f^- + g^- \ \text{ všude v } M. \tag{46}$$

Rovností

$$(f+g)^- + u = f^- + g^- \tag{47}$$

je tedy v M definována konečná měřitelná nezáporná funkce u, a z tvrzení (19) plyne, že je

$$\int_M (f+g)^- + \int_M u = \int_M f^- + \int_M g^-. \tag{48}$$

Z identity

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \tag{49}$$

platné všude v M plyne sečtením s identitou (47) identita

$$(f+g)^+ + u = f^+ + g^+ \tag{50}$$

platná také všude v M. Podle tvrzení (19) lze opět integrovat, čímž dostaneme rovnost

$$\int_M (f+g)^+ + \int_M u = \int_M f^+ + \int_M g^+; \tag{51}$$

odečteme-li od ní (48), dostaneme (44).

Ad 2. Rovnost (45) je pro $q = 2$ přímým důsledkem 1. části věty a tvrzení (27); pro obecné q se získá snadnou indukcí. □

Jak víme, přes nulovou množinu má každá funkce f nulový integrál; nemusí být v této množině dokonce ani definována. Platí též tvrzení: Je-li $f = 0$ s. v. v $M \in \mathcal{M}$, je $\int_M f = 0$. Pro *nezáporné* funkce je k dispozici i obrácené tvrzení:

Věta 5.15. *Je-li* $f \geq 0$ *s. v. v* M *a je-li* $\int_M f = 0$, *je* $f = 0$ *s. v. v* M.

D ů k a z . Protože množina $N := \{x \in M;\ f(x) > 0\}$ je sjednocením posloupnosti množin $N_n := \{x \in M;\ f(x) > 1/n\}$, stačí dokázat, že všechny množiny N_n jsou nulové. To však je zřejmé z relací

$$0 = \int_M f \geq \int_{N_n} f \geq \int_{N_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\,\mu\,(N_n) \geq 0\,. \quad \square$$

Ze základních vět o Lebesgueově integrálu nám zbývá dokázat tvrzení, v nichž vystupují buď nekonečné posloupnosti funkcí nebo nekonečné posloupnosti množin. Půjde tedy o *závislost integrálu na integrandu* resp. *na integračním oboru*. Následující věta obsahuje dvě tvrzení *o monotónním limitním přechodu za znamením integrálu*.

Věta 5.16. *Nechť je každá z funkcí f_n, kde $n \in \mathbb{N}$, měřitelná a nezáporná s. v. v M. Pak platí:*

$$f_n \nearrow f \text{ s. v. v } M \Rightarrow \int_M f_n \nearrow \int_M f\,; \tag{52}$$

$$f_n \searrow f \text{ s. v. v } M,\ f_1 \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow \int_M f_n \searrow \int_M f\,. \tag{53}$$

D ů k a z . 1. Dokažme (52): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost jednoduchých funkcí f_{nk} tak, že $f_{nk} \nearrow f_n$ pro $k \to \infty$. Funkce $g_n := \max(f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{nn})$ jsou jednoduché a splňují podmínky $g_n \le f_n \le f$, $g_n \nearrow f$ (viz větu 4.15). Protože $\int_M g_n \nearrow \int_M f$ (podle definice posledního integrálu), je též $\int_M f_n \nearrow \int_M f$.

2. Abychom dokázali (53), uvažme především, že z relací $0 \le f_n \le f_1 \in \mathcal{L}(M)$ plyne, že je $\int_M f_n \in \mathbb{R}$ pro každé n. Podle věty 5.13 jsou funkce f_n konečné s. v. v M, takže funkce $g_n := f_1 - f_n$ jsou definovány s. v. v M; jsou tam navíc měřitelné a s. v. nezáporné, přičemž $g_n \nearrow f_1 - f$ s. v. v M. Podle věty 5.14 a (52) je tedy

$$\int_M f_1 - \int_M f_n = \int_M (f_1 - f_n) = \int_M g_n \nearrow \int_M (f_1 - f) = \int_M f_1 - \int_M f\,;$$

závěr implikace (53) získáme odečtením $\int_M f_1$ a změnou znaménka.

Věta 5.17. (Fatouovo lemma.) *Pro každou posloupnost nezáporných funkcí f_n měřitelných v M je*

$$\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n\,. \tag{54}$$

D ů k a z . Označíme-li $g_n := \inf\{f_k;\ k \ge n\}$, jsou g_n nezáporné měřitelné funkce tvořící neklesající posloupnost s limitou $\liminf f_n$; kromě toho je $g_n \le f_n$, tedy i $\int_M g_n \le \int_M f_n$. Podle věty 5.16 je tedy

$$\int_M \liminf f_n = \int_M \lim g_n = \lim \int_M g_n = \liminf \int_M g_n \le \liminf \int_M f_n\,. \quad \square$$

Následující věta o limitním přechodu za znamením integrálu je založena na *možnosti majorizace* funkcí f_n nějakou funkcí $g \in \mathcal{L}(M)$. Její první (a nejdůležitější) část se v literatuře často cituje jako **Lebesgueova věta o majorizovaném limitním přechodu za znamením integrálu**.

Věta 5.18. *Jsou-li f_n funkce měřitelné v M a je-li $f_n \to f$ s. v. v M, platí tato tvrzení:*

1. *Existuje-li funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|f_n| \le g$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ skoro všude v M,*[31]) *je*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n = \int_M f\,. \tag{55}$$

2. *Je-li $\mu(M) < +\infty$, stačí k platnosti* (55) *existence konstanty $K \in \mathbb{R}_+$, pro niž je $|f_n| \le K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ skoro všude v M.*[32])

3. *Je-li $\mu(M) < +\infty$ a navíc $f_n \in \mathcal{L}(M)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$ stejnoměrně v M, platí* (55).[33])

D ů k a z . Ad 1. Všechny funkce f_n leží podle důsledku 1 věty 5.12 v $\mathcal{L}(M)$; bez újmy na obecnosti lze (vzhledem k větě 5.13) předpokládat, že g i všechny funkce f_n jsou konečné *všude* v M a že platí

---

[31]) Je jedno, rozumíme-li tomu tak, že pro každé n existuje nulová množina N_n tak, že $|f_n| \le g$ všude v $M - N_n$, nebo že existuje nulová množina N tak, že pro každé n a všude v $M - N$ platí nerovnost $|f_n| \le g$. Sjednocení nulových množin N_n je totiž nulová množina.

[32]) Funkce $f_n : M \to \mathbb{R}$, pro něž existuje $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $|f_n| \le K$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ všude v M, se nazývají *stejně omezené v M* – konstanta K omezující shora funkce $|f_n|$ nezávisí na n.

[33]) Věta o limitním přechodu se silným předpokladem stejnoměrné konvergence $f_n \to f$ hraje v Lebesgueově teorii (na rozdíl např. od Riemannovy teorie) zcela podružnou úlohu, protože je triviálním důsledkem Lebesgueovy věty.

nerovnosti $-g \le f_n \le g$ pro všechna n a všude v M. Funkce $f_n + g$, $g - f_n$ jsou pak měřitelné a nezáporné, takže podle Fatouova lemmatu platí relace

$$\begin{aligned} \int_M (f+g) &= \int_M (\lim f_n + g) = \int_M \lim (f_n + g) = \int_M \liminf (f_n + g) \le \liminf \int_M (f_n + g)\,, \\ \int_M (g-f) &= \int_M (g - \lim f_n) = \int_M \lim (g - f_n) = \int_M \liminf (g - f_n) \le \liminf \int_M (g - f_n)\,. \end{aligned} \tag{56}$$

Uvažme především, že pro každou posloupnost čísel $a_n \in \mathbb{R}^*$ a pro každé číslo $b \in \mathbb{R}$ je $\liminf a_n \le \limsup a_n$, $-\liminf(-a_n) = \limsup a_n$, $\liminf(a_n \pm b) = \liminf a_n \pm b$. Odečtěme pak od první řádky v (56) číslo $\int_M g \in \mathbb{R}$ a druhou řádku v (56) naopak odečtěme od $\int_M g$; dostaneme relace

$$\int_M f = \int_M (f+g) - \int_M g \le \liminf \int_M (f_n + g) - \int_M g = \liminf \int_M f_n\,,$$

$$\int_M f = \int_M g - \int_M (g-f) \ge \int_M g - \liminf \int_M (g - f_n) = -\liminf \Big(-\int_M f_n \Big) = \limsup \int_M f_n\,,$$

z nichž plyne, že

$$\int_M f \le \liminf \int_M f_n \le \limsup \int_M f_n \le \int_M f.$$

Protože se první výraz rovná poslednímu, mají prostřední dva výrazy touž hodnotu, takže existuje limita $\int_M f_n$; rovná se ovšem $\int_M f$. Tím je dokázána hlavní část věty.

2. část věty plyne ihned z její 1. části, protože $\mu(M) < +\infty \Rightarrow K \in \mathcal{L}(M)$.

3. část dokážeme takto: Z Bolzano-Cauchyho podmínky stejnoměrné konvergence $f_n \to f$ v M plyne existence čísla $N \in \mathbb{N}$, pro něž je $|f_n - f_N| < 1$ v M pro všechna $n > N$. Pro taková n je pak $|f_n| \le |f_n - f_N| + |f_N| < 1 + |f_N| \in \mathcal{L}(M)$, a stačí tedy aplikovat 1. část věty. □

Předcházející tvrzení mají i své velmi obecné a dobře aplikovatelné analogie pro řady. První z nich můžeme charakterizovat heslem: *Každou řadu s měřitelnými nezápornými členy lze integrovat člen po členu.* Přesně řečeno:

Věta 5.19. *Pro každou posloupnost (s. v.) nezáporných funkcí f_n měřitelných v M je*

$$\int_M \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M f_n\,. \tag{57}$$

D ů k a z . Protože $\sum_{k=1}^{n} f_k \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, plyne (57) z vět 5.14 a 5.16. □

Následující větu lze nazvat *integrálním kritériem konvergence řady funkcí*; je ovšem zároveň jednou z vět *o integraci řady člen po členu.*

Věta 5.20. *Pro každou posloupnost funkcí f_n měřitelných v M platí: Je-li*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_M |f_n| < +\infty\,, \tag{58}$$

konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolutně s. v. v M, její součet patří do $\mathcal{L}(M)$ a je

$$\int_M \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M f_n\,. \tag{59}$$

D ů k a z . Označíme-li $F := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, je $F \in \mathcal{L}(M)$ podle (58) a podle věty 5.19, takže F je podle věty 5.13 skoro všude konečná. V každém bodě $x \in M$, v němž je $F(x) \in \mathbb{R}$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně. Její součet $f(x)$ je tedy definován pro s. v. $x \in M$ a je měřitelný; vzhledem k tomu, že $|f| \le F$ s. v. v M, je $f \in \mathcal{L}(M)$ podle věty 5.12. Uvážíme-li, že s. v. v M je

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = F\,,$$

vidíme, že na částečné součty řady lze aplikovat Lebesgueovu větu; z toho ihned plyne (59). $\square$

Věta 5.9 se týkala (konečné) aditivity Lebesgueova integrálu vzhledem k integračnímu oboru. Poslední (číslovaná) věta tohoto oddílu ukazuje, v jakém smyslu lze větu 5.9 zobecnit na případ spočetných disjunktních systémů měřitelných množin; příslušné vlastnosti integrálu se říká σ-**aditivita vzhledem k integračnímu oboru**.

Věta 5.21. *Nechť M je sjednocením spočetně mnoha disjunktních měřitelných množin M_n. Pak je*

$$\int_M f = \sum_n \int_{M_n} f\,,\ \text{existuje-li integrál vlevo.} \tag{60}$$

D ů k a z . Protože případ konečného systému množin M_n je rozřešen větou 5.9, předpokládejme, že nyní jde o nekonečnou posloupnost množin.

Nechť je nejdříve $f \geq 0$ všude v M. Položme $P_n := M_1 \cup \dots \cup M_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a buď

$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & \text{pro všechna} & x \in P_n \\ 0 & \text{pro všechna} & x \in M - P_n \end{array} \right\}.$$

Pak je $0 \leq f_n \nearrow f$ v M, takže

$$\int_{M_1} f + \dots + \int_{M_n} f = \int_{P_n} f = \int_M f_n \nearrow \int_M f\,,$$

což je totéž co (60).

Pro obecnou funkci f ověříme platnost tvrzení pomocí rozkladu na kladnou a zápornou část a toho, co jsme právě dokázali.

Poznámka. V právě dokázané větě je předpoklad existence integrálu vlevo *podstatný*; z konvergence řady vpravo *neplyne* existence integrálu vlevo (a tedy ani rovnost v (60)). Ukazuje to tento *příklad*:

Nechť $M_n := (n-1, n\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $M = \mathbb{R}_+$; nechť $f := 1/n$ v intervalu M_{2n-1} a $f := -1/n$ v intervalu M_{2n}. Pak jsou integrály přes M_n rovny po řadě $1,\ -1,\ 1/2,\ -1/2,\ \dots\ ,1/n,\ -1/n,\ \dots$, takže součet řady na pravé straně rovnosti v (60) je roven 0. Integrál vlevo však neexistuje, protože oba integrály $\int_M f^+$, $\int_M f^-$ jsou zřejmě rovny součtu harmonické řady. $\square$

O Lebesgueově integrálu jsme dokázali řadu obecných vět, ale vypočítat jej umíme vlastně jen v případě, že integrand je konstantní nebo obecněji „po částech konstantní“. Protože výpočtu vícerozměrného Lebesgueova integrálu bude věnována část oddílu 6, omezme se zde jen na případ jednorozměrné integrace. Pro integrál funkce f přes interval s krajními body $a < b$ se pak užívá běžný symbol $\int_a^b f$; připsáním značek $(\mathcal{R})$, $(\mathcal{L})$, $(\mathcal{N})$ před znak integrálu můžeme rozlišit, zdali máme na mysli Riemannův, Lebesgueův nebo Newtonův integrál.

Poznamenejme především, že podobně jako Riemannův integrál ani Lebesgueův integrál se většinou nepočítá přímo, ale pomocí primitivních funkcí, tedy v zásadě pomocí integrálu Newtonova. V [3] (kapitola 8, §8, věta 1) se dokazuje, že

$$(\mathcal{L})\int_a^b f = (\mathcal{N})\int_a^b f\,,\ \text{kdykoli oba integrály existují;} \tag{61}$$

protože důkaz je založen mj. na vlastnostech Lebesgueova integrálu s proměnnou horní mezí, není pro nás dostupný. Dodejme však, že tvrzení (61) platí z daleko hlubších důvodů : *Oba* uvedené integrály jsou totiž speciálními případy tzv. *Perronova integrálu* – viz např. [2] nebo [5].

Protože nemáme prostředky k tomu, abychom tvrzení (61) dokázali obecně, spokojíme se s tímto speciálnějším tvrzením, s nímž ovšem při elementárních výpočtech většinou vystačíme:

(62) *Tvrzení (61) platí za dodatečného předpokladu, že funkce f je spojitá v (a, b).*

D ů k a z . Nechť oba integrály (61) existují. Ze spojitosti funkce f v (a, b) plyne existence funkce F primitivní k f v (a, b), a je ovšem $(\mathcal{N})\int_a^b f = F(b-) - F(a+)$. Zvolme pevně čísla a_n, $n \in \mathbb{Z}$, tak, že je $\ldots < a_{-n} < a_{-n+1} < \ldots < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots$, $a_{-n} \to a$, $a_n \to b$. Pak je $F(a_{-n}) \to F(a+)$, $F(a_n) \to F(b-)$ a podle věty 5.21 platí i relace

$$(\mathcal{L})\int_{a_{-n}}^{a_n} f = \sum_{k=-n}^{n-1} (\mathcal{L})\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathcal{L})\int_{a_k}^{a_{k+1}} f = (\mathcal{L})\int_a^b f.$$

Z toho je patrné, že stačí pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokázat rovnost $(\mathcal{N})\int_{a_{-n}}^{a_n} f = (\mathcal{L})\int_{a_{-n}}^{a_n} f$, což je v podstatě totéž, jako když řekneme, že rovnost ze (61) stačí dokázat za dodatečného předpokladu, že interval $\langle a, b\rangle$ je kompaktní.

Stále ovšem předpokládáme, že f je v tomto intervalu spojitá; jak víme, lze pak funkci F spojitě rozšířit na celé $\langle a, b\rangle$ a funkce f je v $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně spojitá. Je-li tedy dáno libovolné číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existuje $\delta \in \mathbb{R}_+$ tak, že

$$x' \in \langle a, b\rangle,\ x'' \in \langle a, b\rangle,\ |x'' - x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Buď $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_q = b$ nějaké dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s $\|D\| < \delta$. Pišme

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{q} \bigl(F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr)$$

a uvažme, že podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce existují body $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tak, že rovnost $F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ platí pro každé $k = 1, \ldots, q$. Protože je $|f(\xi_k) - f| < \varepsilon/2(b-a)$ všude v $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, je

$$\begin{aligned}
\Bigl|\,(\mathcal{N})\int_a^b f - (\mathcal{L})\int_a^b f\,\Bigr| &= \Bigl|\,(F(b) - F(a)) - (\mathcal{L})\int_a^b f\,\Bigr| = \Bigl|\,\sum_{k=1}^{p} \Bigl(\bigl(F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr) - (\mathcal{L})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f\Bigr)\Bigr| \\
&= \Bigl|\,\sum_{k=1}^{p} \Bigl(f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - (\mathcal{L})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f\Bigr)\Bigr| = \Bigl|\,\sum_{k=1}^{p} \Bigl((\mathcal{L})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) - (\mathcal{L})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f\Bigr)\Bigr| \\
&\le \sum_{k=1}^{p} (\mathcal{L})\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,;
\end{aligned}$$

vzhledem k tomu, že $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, je z toho patrná rovnost obou integrálů.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že jak Newtonův, tak Lebesgueův integrál je aditivní funkce intervalu, stačí ve větě předpokládat, že funkce f je v (a, b) *po částech spojitá*. Existenci obou integrálů je samozřejmě třeba i nadále *předpokládat*!

Víme ovšem též, že existence Lebesgueova integrálu v (1) je zaručena, pokud je f v (a, b) nejen spojitá, ale navíc nezáporná. V tom případě neexistence integrálu na pravé straně (1) znamená, že je buď $F(a+) = -\infty$ nebo $F(b-) = +\infty$, a příslušný Lebesgueův integrál je pak roven $+\infty$.

Protože integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

existuje v Newtonově, ale neexistuje v Lebesgueově smyslu, je v případě, že funkce f mění své znaménko, na místě náležitá opatrnost. $\square$

Bohužel jen málo funkcí má za primitivní funkci nějakou jednoduchou kombinaci „elementárních“ funkcí; v některých případech nám však při integraci může pomoci věta 5.20:

Příklad. Protože

$$-\frac{\lg(1-x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \quad \text{pro všechna } x \in (0,1)\,, \tag{63}$$

protože

$$\int_0^1 \Bigl|\frac{x^{n-1}}{n}\Bigr|\,dx = \Bigl[\frac{x^n}{n^2}\Bigr]_0^1 = \frac{1}{n^2} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

a protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konverguje, konverguje (podle věty 5.20) řada $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}/n)$ absolutně pro s. v. $x \in \langle 0,1\rangle$.[34]) Její součet patří do $\mathcal{L}(\langle 0,1\rangle)$ a je

$$-\int_0^1 \frac{\lg(1-x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \tag{64}$$

jak víme např. z komplexní analýzy. □

Na závěr ještě naznačme, jak by se dalo dokázat, že pro každý kompaktní interval $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ je

$$(\mathcal{R})\int_a^b f = (\mathcal{L})\int_a^b f\,,\ \textit{existuje-li integrál vlevo}, \tag{65}$$

tj. že *Lebesgueův integrál je obecnější než integrál Riemannův*. K důkazu užijeme tuto zajímavou a pro teorii integrálu důležitou existenční větu (sr. s JII, věta 161):

(66) $(\mathcal{R})\int_a^b f$ *existuje právě tehdy, když je funkce* f *omezená v* $\langle a,b\rangle$ *a když má množina* N *všech bodů* $x \in (a,b)$, *v nichž je* f *nespojitá, míru* 0.

Z ní ihned plyne, že *každá riemannovsky integrovatelná funkce má konečný Lebesgueův integrál*: Protože restrikce $f\,|\,(\langle a,b\rangle - N)$ je spojitá, je podle věty 4.1 měřitelná v $\langle a,b\rangle - N$, tedy i v $\langle a,b\rangle$, protože $\mu_1(N) = 0$. Protože f je omezená, je (podle důsledku 2 věty 5.12) $f \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle$; zbývá dokázat *rovnost* obou integrálů ze (65):

Pro každé dělení $D: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_q = b$ intervalu $\langle a,b\rangle$ je

$$\inf f(\langle x_{k-1},x_k\rangle) \le f \le \sup f(\langle x_{k-1},x_k\rangle)\ \text{ všude v }\ \langle x_{k-1},x_k\rangle$$

pro $k = 1,\ldots,q$, z čehož *lebesgueovskou* integrací a sečtením dostaneme nerovnosti

$$s(D) \le (\mathcal{L})\int_a^b f \le S(D)\,, \tag{67}$$

v nichž $s(D)$ resp. $S(D)$ znamená dolní resp. horní (riemannovský) součet odpovídající dělení D. Protože $(\mathcal{R})\int_a^b f$ je společná hodnota suprema všech dolních součtů a infima všech horních součtů, plyne z nerovností (67) (platných pro každé dělení D) ihned rovnost $(\mathcal{R})\int_a^b f = (\mathcal{L})\int_a^b f$.

6. Fubiniho věta a věta o substituci

Obě hlavní věty tohoto oddílu budeme muset pro nedostatek času ponechat bez důkazu (který čtenář najde např. v učebnicích [2] a [6]).

Fubiniho věta jedná o možnosti převedení integrace přes danou množinu $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ na sled integrací přes vhodné části $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^q$. Abychom se mohli stručně, ale přesně vyjadřovat, budeme potřebovat několik nových definic, označení a úmluv.

V celém tomto oddílu budeme číslem r rozumět vždy $p+q$. Body $z \in \mathbb{R}^{p+q} \equiv \mathbb{R}^r$ budeme ztotožňovat s body $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ a v souvislosti s tím je budeme zapisovat ve tvaru (x,y), kde $x = (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p$, $y = (y_1,\ldots,y_q) \in \mathbb{R}^q$.[35]) Před označením $\int_M f(z)\,dz$ integrálu přes množinu $M \subset \mathbb{R}^r$ dáme přednost označení

$$\iint_M f(x,y)\,dxdy\,.$$

Budeme-li potřebovat Lebesgueovu míru ve všech prostorech $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^r \equiv \mathbb{R}^{p+q}$ současně, budeme užívat podrobnějších symbolů μ_p, μ_q, $\mu_r \equiv \mu_{p+q}$. Množiny a funkce, které jsme dosud nazývali krátce

[34]) To lze ovšem snadno dokázat i bez užití věty 5.20; je dobře známo, že řada konverguje absolutně všude v $(-1,1)$, diverguje v bodě 1, konverguje neabsolutně v bodě -1.

[35]) Ztotožňujeme tedy posloupnost $(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$ čísel z $\mathbb{R}$ s dvojicí $\{(x_1,\ldots,x_p),(y_1,\ldots,y_q)\}$.

měřitelné, budeme v případě potřeby nazývat (p)-měřitelné, (q)-měřitelné a (r)-měřitelné; podobně tomu bude např. s nulovými množinami a se slovy „s. v. “ – v případě potřeby budeme mluvit např. o (p)-nulové množině nebo o výroku, který platí (r)-s. v. apod. $\square$

Začneme integrací přes celý prostor $\mathbb{R}^r$ a příslušný vzorec uvedeme nejdříve ve tvaru, v němž se v běžné početní praxi píše.

Věta 6.1. (Fubiniho věta pro prostor $\mathbb{R}^{p+q}$.) *Rovnosti*

$$\iint_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \Big(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \Big)\,dy \tag{1}$$

platí, existuje-li první z integrálů.

Patrně bude vhodné určité věci v souvislosti s právě uvedenou větou vysvětlit resp. připomenout.

1. Předpoklad, že první z integrálů existuje, v sobě implicite zahrnuje, že f je (r)-měřitelná funkce definovaná (r)-s. v. v $\mathbb{R}^r$; integrujeme ji přes $\mathbb{R}^r$ při (Lebesgueově) r-rozměrné míře. *Není podstatné, zdali je integrál konečný nebo ne.* [36])

2. Protože ve druhém resp. ve třetím integrálu integrujeme (přes $\mathbb{R}^p$ resp. přes $\mathbb{R}^q$) funkci

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \quad \text{resp.} \quad G(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \tag{2}$$

a protože věta tvrdí, že je to možné, musí být funkce F, G definovány skoro všude (první (p)-s. v. v $\mathbb{R}^p$, druhá (q)-s. v. v $\mathbb{R}^q$).

3. Je bezpodmínečně nutné rozumět rozdílu mezi prvním integrálem v (1) a dalšími dvěma integrály; někdy se pro lepší rozlišení užívá termínů *dvojný* pro první integrál a *dvojnásobný* pro druhý a třetí integrál. Později uvedeme příklad funkce, pro niž sice existuje druhý i třetí integrál, ale první nikoli; „počítáme-li“ naivně takovýto neexistující integrál jakoby Fubiniho větou (což je samozřejmě nesmyslné), může se stát leccos – každý z dvojnásobných integrálů může mít např. jinou hodnotu!

4. Příčina, proč se v zápisu Fubiniho věty užívá řada licencí bude jasná, uvedeme-li jeden z možných *přesných* zápisů této věty.

Předpokládáme existenci integrálu

$$I := \int_{\mathbb{R}^r} f\,; \tag{3}$$

protože integrujeme přes $\mathbb{R}^r$, je jasné, že f je (r)-měřitelná funkce definovaná (r)-skoro všude v $\mathbb{R}^r$ (což samo o sobě ovšem k existenci integrálu *nestačí*).

Věta tvrdí, že za uvedeného předpokladu existuje (p)-skoro všude v $\mathbb{R}^p$ resp. (q)-skoro všude v $\mathbb{R}^q$ integrál

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^q} f(x,\cdot) \quad \text{resp.} \quad G(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f(\cdot,y)\,; \tag{4}$$

$f(x,\cdot)$ resp. $f(\cdot,y)$ je přitom, jak známo, funkce, jejíž hodnoty jsou v bodech $y \in \mathbb{R}^q$ resp. $x \in \mathbb{R}^p$ dány rovnostmi

$$\big(f(x,\cdot)\big)(y) = f(x,y) \quad \text{resp.} \quad \big(f(\cdot,y)\big)(x) = f(x,y), \quad \text{má-li příslušná pravá strana smysl.}$$

Věta dále tvrdí, že funkce F má integrál přes $\mathbb{R}^p$, funkce G přes $\mathbb{R}^q$, přičemž

$$\int_{\mathbb{R}^p} F = I, \quad \int_{\mathbb{R}^q} G = I\,. \tag{5}$$

---

[36]) To je jeden z Jarníkových přínosů k teorii Lebesgueova integrálu – přínos bezesporu důležitý z hlediska teorie, ale hlavně *nesmírně užitečný z hlediska tzv. praxe*, v tomto případě „početní praxe“. Převádíme-li $(p+q)$-rozměrnou integraci na sled integrace p-rozměrné a q-rozměrné, stačí dokázat *existenci* $(p+q)$-rozměrného integrálu; teprve následný výpočet (pokud je prakticky proveditelný) ukáže, zdali integrál konverguje nebo ne. Měřitelná *nezáporná* funkce integrál má a nic tedy nebrání aplikaci Fubiniho věty. Mění-li integrand znaménko, lze často existenci příslušného integrálu zjistit pomocí majoranty; protože majoranta je vždy nezáporná, můžeme ke zjištění, zdali leží v $\mathcal{L}$, užít Fubiniho větu.

Jak je patrné, museli bychom při *formálně přesném* zápisu místo jedné řádky napsat tři a navíc asi zavést dvě nová označení F, G. Dáváme-li přiměřený pozor a jsme-li si vědomi všech užitých licencí, nemůže být *jen formálně méně dokonalý* zápis (1) příčinou žádné chyby např. při výpočtu. $\square$

Vysvětleme nyní, jak bychom mohli pomocí věty 6.1 počítat r-rozměrnou míru nějaké (měřitelné) množiny $M \subset \mathbb{R}^r$. Míra je integrál z charakteristické funkce přes celý prostor:

$$\mu_r(M) = \int_{\mathbb{R}^r} \chi_M \,. \tag{6}$$

Označme $f := \chi_M$ a uvažme, jaké vlastnosti mají funkce $f(x, \cdot)$, $f(\cdot, y)$, které bychom měli integrovat přes $\mathbb{R}^q$ resp. $\mathbb{R}^p$; protože vše je do značné míry symetrické v p a q, vyšetřujme podrobněji např. první z těchto funkcí. Konstatujme především, že funkce $\varphi_x := f(x, \cdot)$ je pro s. v. x měřitelná, tj. že existuje nulová množina $N \subset \mathbb{R}^p$ tak, že tato funkce je měřitelná pro každé $x \in \mathbb{R}^p - N$; předpokládejme v dalším, že x je takto zvoleno.

Protože $\varphi_x(y) = f(x,y) = \chi_M(x,y)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^q$, je $\varphi_x(y)$ rovna 1, je-li $(x,y) \in M$, a rovna 0, není-li tomu tak. Definujeme-li tedy

$$M^{x,*} := \{y \in \mathbb{R}^q;\ (x,y) \in M\} \ \text{ pro každé } \ x \in \mathbb{R}^p, \tag{7_1}$$

je

$$\varphi_x(y) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{pro všechna } \ y \in M^{x,*} \\ 0 & \text{pro všechna } \ y \in \mathbb{R}^q - M^{x,*} \end{matrix} \right\}.$$

φ_x je tedy charakteristická funkce množiny $M^{x,*}$, a její integrál přes $\mathbb{R}^q$ je (q-rozměrná) míra této množiny. (Protože předpokládáme, že $x \in \mathbb{R}^p - N$, je množina $M^{x,*}$ měřitelná.) Místo abychom integrovali funkci φ_x přes $\mathbb{R}^q$, můžeme integrovat konstantu 1 přes $M^{x,*}$; výsledek bude týž.

Zatím jsme tedy dokázali, že

$$\mu_r(M) = \int_{\mathbb{R}^r} \chi_M = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{Mx,*} 1 \, dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \mu_q(M^{x,*}) \, dx \,; \tag{8}$$

tento výsledek lze ještě dále upravit:

Označíme-li $\Pi_p(M)$ ortogonální průmět množiny M do prostoru $\mathbb{R}^p$, tj. klademe-li

$$\Pi_p(M) := \{x \in \mathbb{R}^p;\ \text{existuje } y \in \mathbb{R}^q \text{ tak, že } (x,y) \in M\}, \tag{9_1}$$

je $\varphi_x \equiv 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^p - \Pi_p(M)$, a *zdálo by se* tedy, že nic nebrání nahradit v (8) integraci přes $\mathbb{R}^p$ integrací přes $\Pi_p(M)$. Tím bychom se však dopustili *hrubé logické chyby*, protože průmět (měřitelné !) množiny M může být neměřitelný! [37]) Na „praktické počítání“ však tyto potíže nemají žádný vliv, protože je nepravděpodobné, že bychom měřitelnou množinu s neměřitelným průmětem někdy potkali – pokud ji zrovna nehledáme.

Často se integruje např. přes otevřené množiny, jejichž průměty jsou, jak snadno nahlédneme, také otevřené. Pokud má množina M, přes niž integrujeme, hranici míry 0 (což je asi „většinou“ pravda), je jedno, zdali integrujeme přes M nebo přes int M, a tato poslední množina je ovšem otevřená, takže s průmětem nejsou žádné potíže.

V (8) tedy nemůžeme napsat $\Pi_p(M)$ místo $\mathbb{R}^p$, ale můžeme tam napsat jakoukoli (p)-měřitelnou množinu, která tento průmět obsahuje. Jiná možnost je měřitelnost průmětu *předpokládat*; tím naše „praktické počítání“ rozhodně nezatížíme komplikovaným ověřováním. Shrňme tedy výsledky a přidejme k nim i jejich analogie, které by z nich vznikly záměnou x a y:

Položíme-li

$$M^{*,y} := \{x \in \mathbb{R}^p;\ (x,y) \in M\} \ \text{ pro každé } \ y \in \mathbb{R}^q, \tag{7_2}$$

$$\Pi_q(M) := \{y \in \mathbb{R}^q;\ \text{existuje } x \in \mathbb{R}^p \text{ tak, že } (x,y) \in M\}, \tag{9_2}$$

platí toto tvrzení:

---

[37]) Je-li $X \subset \mathbb{R}$, má množina $Y := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in X\}$ ležící na ose x dvojrozměrnou míru rovnou 0, a to i v případě, že její průmět X do osy x je (při jednorozměrné míře) neměřitelný.

Věta 6.2. *Nechť M je $(p+q)$-měřitelná množina. Pak platí: Množina (7_1) je (q)-měřitelná pro (p)-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ a množina (7_2) je (p)-měřitelná pro (q)-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$. Je-li ortogonální průmět (9_1) resp. (9_2) množiny M do $\mathbb{R}^p$ resp. do $\mathbb{R}^q$ měřitelný, platí rovnost*

$$(10) \qquad \mu_{p+q}(M) = \int_{\Pi_p(M)} \mu_q(M^{x,*})\,dx \quad \text{resp.} \quad \mu_{p+q}(M) = \int_{\Pi_q(M)} \mu_p(M^{*,y})\,dy;$$

pokud průmět měřitelný není, lze jej nahradit jakoukoli měřitelnou množinou, která jej obsahuje.

Poznámka. Množinám

$$(11) \qquad \{(a,y) \in M;\ a \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^q\}, \quad \{(x,b) \in M;\ x \in \mathbb{R}^p,\ b \in \mathbb{R}^q\}$$

se často říká *řezy* množiny M rovnoběžné s lineárním obalem L_p resp. L_q prvních p resp. posledních q souřadných os v $\mathbb{R}^{p+q}$. Množiny (7_1), (7_2) s nimi velmi úzce souvisí: První resp. druhý z řezů je roven

$$(12) \qquad \{(a,y) \in \mathbb{R}^{p+q};\ y \in M^{a,*}\} \ \text{ resp. } \ \{(x,b) \in \mathbb{R}^{p+q};\ x \in M^{*,b}\}.$$

Míru by bylo možné přenést z $\mathbb{R}^p$ resp. z $\mathbb{R}^q$ evidentním způsobem do prostorů rovnoběžných s L_p resp. s L_q tak, že by míra řezů a k nim příslušných podmnožin $\mathbb{R}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$ byla stejná. Kdybychom to provedli, měli bychom možnost velmi názorně říci, jak lze dojít k míře množiny M : *Vypočítají se míry všech řezů rovnoběžných např. s L_p a zintegrují se přes L_q.*

Velmi důležitý příklad. *Je-li f měřitelná nezáporná funkce definovaná všude v (měřitelné) množině $M \in \mathbb{R}^p$, platí rovnost*

$$(13) \qquad \mu_{p+1}\big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1};\ x \in M,\ 0 \le y \le f(x)\}\big) = \int_M f,$$

tj. $(p+1)$-rozměrná míra „množiny pod grafem funkce f“ je rovna integrálu z f přes M. Poznamenejme, že se tomuto tvrzení říká *geometrický význam integrálu z nezáporné funkce*.

Příklad odpovídá $q = 1$, přičemž pro každé $x \in M$ je

$$M^{x,*} = \left\{ \begin{array}{ll} \langle 0, +\infty), & \text{je-li } f(x) = +\infty \\ \langle 0, f(x)\rangle, & \text{je-li } f(x) \in \mathbb{R}_+ \\ \{0\}, & \text{je-li } f(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

Protože (jednorozměrná) míra každé z těchto množin je rovna příslušnému $f(x)$, získáme číslo z levé strany (13) podle věty 6.2 integrací funkce f přes množinu M.

Podobně, jsou-li dány dvě funkce $f \le g$ měřitelné v M, je

$$\mu_{p+1}\big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1};\ x \in M,\ f(x) \le y \le g(x)\}\big) = \int_M (g-f);$$

nyní se zřejmě jedná o míru *„množiny mezi grafy funkcí f a g“*. □

Zobecněním věty 6.1 je

Věta 6.3. (Fubiniho věta pro obecnou množinu.) *Je-li f funkce měřitelná na (měřitelné) množině $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$, je*

$$(14) \qquad \iint_M f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{M^{x,*}} f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \Big(\int_{M^{*,y}} f(x,y)\,dx \Big) dy;$$

místo integrace přes $\mathbb{R}^p$ resp. přes $\mathbb{R}^q$ lze integrovat přes jakoukoli měřitelnou podmnožinu tohoto prostoru, která obsahuje průmět $\Pi_p(M)$ resp. $\Pi_q(M)$ množiny M do $\mathbb{R}^p$ resp. do $\mathbb{R}^q$.

Důležitá poznámka. Při aplikaci Fubiniho věty je *nutné* ověřit existenci prvního integrálu v (14). Nejčastěji přicházejí v úvahu dvě metody ověřování:

1. Je-li integrovaná funkce f měřitelná a nezáporná v M, nemáme žádný problém – integrál existuje; nemusí být sice konečný, ale to je při aplikaci věty 6.3 nepodstatné.

2. Mění-li měřitelná funkce f v M své znaménko, tj. mají-li obě množiny $\{x \in M;\, f(x) > 0\}$, $\{x \in M;\, f(x) < 0\}$ kladnou míru, můžeme se pokusit najít funkci $g \in \mathcal{L}(M)$, pro niž je $|f| \le g$ (s. v. v M); podle důsledku 1 věty 5.12 a podle věty 5.11 je pak také $f \in \mathcal{L}(M)$, $|f| \in \mathcal{L}(M)$. Jak jsme již naznačili v poznámce [2]) pod čarou, o tom, zdali funkce g leží v $\mathcal{L}(M)$, se lze často přesvědčit pomocí Fubiniho věty, protože majoranta je vždy nezáporná.

Existuje-li první z integrálů v (14), *existuje i druhý a třetí integrál a všechny tři integrály se rovnají; dvojný integrál můžeme počítat dvojnásobnou integrací, a na pořadí integrací „podle x“ a „podle y“ nezáleží.* [38])

Pokud dvojný integrál neexistuje, nelze o existenci zbylých dvou integrálů obecně nic tvrdit – mohou existovat oba, nebo jen jeden z nich, nebo žádný z nich. Pozor však! *I když oba dvojnásobné integrály existují, nemusí mít stejnou hodnotu*!

Je-li p nebo q větší než 1, můžeme Fubiniho větu aplikovat znovu, aniž je nutné cokoli dalšího ověřovat. Pro případ $r = 3$ platí tedy např. rovnost

$$\text{(15)} \qquad \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dx \Big) dy \Big) dz, \quad \text{existuje-li integrál vlevo;}$$

na pořadí, v němž integrujeme podle jednotlivých proměnných, nezáleží,[39]) takže platí ještě dalších 5 identit podobných (15). Pro obecnou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ příslušný vzorec neuvádíme, protože označení „řezů“ by bylo dosti komplikované; stačí pamatovat si, že nemusíme integrovat přes množiny, na nichž je příslušná funkce (identicky) rovna 0. $\square$

Uveďme několik příkladů souvisejících s Fubiniho větou:

Příklad funkce, která nemá dvojný integrál a pro niž oba dvojnásobné integrály sice existují, ale mají různé hodnoty, není vůbec komplikovaný – stačí zvolit vhodnou racionální funkci na vhodném čtverci! [40]) Nechť

$$\text{(16)} \qquad f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad M := (0,1) \times (0,1).$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big)$$

pro všechna $(x,y) \ne (0,0)$; v důsledku toho je

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \Big[\frac{y}{x^2+y^2}\Big]_{y=0}^1 = \frac{1}{x^2+1}, \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy \Big) dx = \big[\operatorname{arctg} x\big]_0^1 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Protože $f(y,x) = -f(x,y)$, je však

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx \Big) dy = -\big[\operatorname{arctg} y\big]_0^1 = -\tfrac{1}{4}\pi. \quad \square$$

Je pozoruhodné, že možná nerovnost mezi dvojnásobnými integrály, před níž jsme právě varovali, může mít i pozitivní význam; lze na základě ní dokázat např. základní větu algebry!

Důkaz základní věty algebry. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $f(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, kde a_k jsou komplexní čísla. Přejděme do komplexních polárních souřadnic, tj. pišme $z = re^{it}$, kde r je nezáporné,

---

[38]) Neměli bychom říkat, že např. v prostředním integrálu ve (14) integrujeme „nejdříve podle x, pak podle y“, protože v tomto pořadí jsou integrály jen „napsány“. Ve skutečnosti integrujeme nejdříve podle y, a výsledky se teprve potom integrují podle x. Vhodnější je tedy např. říci, že „uvnitř“ integrujeme podle y, „vně“ podle x.

[39]) K tvrzení, že můžeme podle jednotlivých proměnných integrovat v jakémkoli pořadí, se ještě vrátíme; k důkazu budeme potřebovat větu o substituci – viz 1. příklad za větou 6.6.

[40]) Tím je neověřování existence dvojného integrálu při aplikaci Fubiniho věty *nebezpečnější*; ignorujeme-li zásady solidní matematické analýzy a zvykneme-li si příliš např. na obskurní metody bezduchého kalkulu, v němž se hlavně počítá, ale co a jak, není podstatné, můžeme se dočkat nepříjemného překvapení, že totiž na pořadí integrací „občas“ záleží! Není divu, „počítáme-li“ něco, co neexistuje.

t reálné. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že reálná část $A(r,t)$ a imaginární část $B(r,t)$ funkce $f(re^{it})$ jsou dány rovnostmi

$$A(r,t) = r^n \cos nt + \sum_{k=1}^{n-1} r^k (\alpha_k \cos kt - \beta_k \sin kt) + \alpha_0 \,, \tag{17_1}$$

$$B(r,t) = r^n \sin nt + \sum_{k=1}^{n-1} r^k (\beta_k \cos kt + \alpha_k \sin kt) + \beta_0 \,, \tag{17_2}$$

kde α_k resp. β_k je reálná resp. imaginární část čísla a_k.

Ukážeme, že předpoklad $f \neq 0$ všude v $\mathbb{C}$, tj. $A^2 + B^2 > 0$ všude v $\langle 0, +\infty) \times \mathbb{R}$, vede ke sporu. Začneme tím, že za uvedeného předpokladu dokážeme, že funkce

$$C(r,t) := \frac{1}{A^2+B^2}\Big(\frac{\partial A}{\partial r} B - A \frac{\partial B}{\partial r}\Big), \ \ D(r,t) := \frac{1}{A^2+B^2}\Big(\frac{\partial A}{\partial t} B - A \frac{\partial B}{\partial t}\Big) \ \textit{splňují identitu} \ \ \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial r}\,.$$

Je-li $B(r,t) \neq 0$ v nějakém bodě (r,t), je v jistém jeho okolí

$$C = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\operatorname{arctg} \frac{A}{B}\Big), \quad D = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\operatorname{arctg} \frac{A}{B}\Big), \tag{18_1}$$

a uvedené tvrzení plyne ze záměnnosti parciálních derivací 2. řádu. Je-li $A(r,t) \neq 0$ v nějakém bodě (r,t), je v jistém jeho okolí

$$C = -\frac{\partial}{\partial r}\Big(\operatorname{arctg} \frac{B}{A}\Big), \quad D = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\operatorname{arctg} \frac{B}{A}\Big), \tag{18_2}$$

a argumentace je analogická.

Pro každé $R \in \mathbb{R}_+$ integrál

$$I := \iint\limits_{\substack{0 \le r \le R \\ 0 \le t \le 2\pi}} \frac{\partial C(r,t)}{\partial t} \, dr dt$$

konverguje, neboť integrační obor je kompaktní a má tedy konečnou míru, a integrand je v něm spojitý, tedy měřitelný a omezený. Příslušné dvojnásobné integrály by proto měly mít stejnou hodnotu. Je však

$$\int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} \frac{\partial C}{\partial t} \, dt \Big) dr = \int_0^R \big(C(r, 2\pi) - C(r,0) \big) \, dr = \int_0^R 0 \, dr = 0 \,,$$

protože funkce C je 2π-periodická v proměnné t, a

$$J(t) := \int_0^R \frac{\partial C}{\partial t} = \int_0^R \frac{\partial D}{\partial r} = D(R,t) - D(0,t) = D(R,t)\,,$$

protože $\partial A/\partial t$ i $\partial B/\partial t$ jsou v bodě $(0,t)$ rovny 0. Z definic funkcí A, B, D navíc snadno plyne, že

$$D(r,t) = \frac{-nr^{2n} + E(r,t)}{r^{2n} + F(r,t)}$$

pro vhodné polynomy $E(r,t)$, $F(r,t)$ v proměnné r stupně menšího než $2n$, jejichž koeficienty jsou omezené funkce proměnné t. Dělíme-li v čitateli i ve jmenovateli výrazem r^{2n}, je z toho patrné, že zlomek pro $r \to +\infty$ konverguje k $-n$ stejnoměrně v $\mathbb{R}$ (vzhledem k proměnné t), takže pro všechna dost velká R je zlomek sám menší než např. $-\frac{1}{2}n$ pro všechna t; pro všechna dost velká R je tedy

$$\int_0^{2\pi} D(R,t) \, dt < -n\pi < 0.$$

Dvojnásobné integrály se tedy nerovnají, což je hledaný spor. Jeho příčinou byl předpoklad, že se polynom f nikde v $\mathbb{C}$ neanuluje, protože z něj plynula existence dvojného integrálu I. Tento předpoklad byl tedy nesprávný; závěr: *Každý komplexní polynom kladného stupně má v $\mathbb{C}$ aspoň jeden kořen.* $\square$

Další dva příklady naznačí, jak lze počítat některé jednorozměrné (Lebesgueovy nebo Newtonovy) integrály metodou *integrace podle parametru*, založenou na Fubiniho větě.

Příklad 1. Integrál

$$I := \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{19}$$

můžeme počítat např. takto: Jak snadno ověříme, je

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \quad \text{pro každé} \quad x \in (0,1)\,;$$

podle Fubiniho věty je

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{dy}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \Big) dx = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \Big) dy\,,$$

protože integrand je měřitelný a nezáporný v $(0,1) \times (0,1)$. Substitucí $x = \omega(t) := \sin t$, $t \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, a pak substitucí $t = \psi(u) := \operatorname{arctg} u$, $u \in \mathbb{R}_+$, dostaneme:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(1+y^2)\,u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\,.$$

Odtud plyne, že

$$I = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \tfrac{1}{2}\pi \lg(1+\sqrt{2})\,.$$

Detaily výpočtu lze jistě přenechat čtenáři. Jeho hlavní myšlenkou bylo nahradit část integrandu integrálem a – po zjištění, že příslušný dvojný integrál existuje – integrovat v obráceném pořadí; jak je patrné, může se stát, že s integrací v jednom pořadí máme podstatné potíže, zatímco integrace v obráceném pořadí je proveditelná.

Příklad 2. Výpočet Newtonova integrálu, který není integrálem Lebesgueovým, integrací podle parametru je zpravidla obtížnější. To je přirozené, protože Fubiniho větu nebudeme moci užít přímo; všechny integrály, o nichž se mluví ve Fubiniho větě, jsou totiž Lebesgueovy.

Je dobře známo, že integrál

$$J := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{20}$$

lze vypočítat užitím identity

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$$

platné pro každé $x \in \mathbb{R}_+$. Dosazením dostaneme rovnost

$$J = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dy \Big) dx\,, \tag{21_1}$$

která sice sama o sobě nic neřeší, ale změnou pořadí integrací získáme dvojnásobný integrál, který vypočítat dovedeme:

$$K := \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dx \Big) dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{21_2}$$

Celý náš problém by byl tedy vyřešen, kdybychom dokázali, že $K = J$. Jak jsme však již řekli, nemůžeme k důkazu této rovnosti užít Fubiniho větu přímo, protože příslušný dvojný integrál neexistuje. (Kdyby existoval, byl by integrál J Lebesgueův, což není pravda.)

Abychom mohli Fubiniho větu aplikovat, musíme zmenšit integrační obor, a to tak, aby dvojný integrál přes něj existoval. Integrál J není Lebesgueův proto, že integrujeme do $+\infty$; pišme proto místo této horní meze mez $n \in \mathbb{N}$ a označme stručně $M_n := (0,n) \times \mathbb{R}_+$. Protože integrand $f(x,y) := e^{-xy} \sin x$ mění znaménko, není ani existence integrálu $\int_{M_n} f$ na první pohled patrná; nezbývá nic jiného než hledat nějakou majorantu funkce f ležící v $\mathcal{L}(M_n)$.

Jako první nás patrně napadne funkce e^{-xy}, která je majorantou funkce $f(x,y)$ v celém $\mathbb{R}^2$; k rozhodnutí, zdali e^{-xy} patří do $\mathcal{L}(M_n)$, užijeme Fubiniho větu: Protože je

$$\iint_{(0,n)\times(0,+\infty)} e^{-xy}\,dxdy = \int_0^n \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\Big)\,dx = \int_0^n \frac{dx}{x} = +\infty\,,$$

funkce e^{-xy} bohužel do $\mathcal{L}(M_n)$ *nepatří* – a hned vidíme proč: Poslední integrál je roven $+\infty$, protože funkce $1/x$ je *u nuly* příliš velká; tato funkce se však ve výpočtu objevila proto, že jsme původní integrand $f(x,y)$ odhadli u bodu 0 „velmi necitlivě“: Funkce $\sin x$ má v bodě 0 limitu 0, a my jsme ji odhadli jedničkou.

Protože pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$ platí nerovnosti $0 \le |\sin x| \le x$, je xe^{-xy} majorantou funkce $f(x,y)$, a tato majoranta má integrál přes M_n rovný n, tedy konečný. Podle Fubiniho věty je tedy

$$K_n := \int_0^n \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dy\Big)\,dx = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^n e^{-xy}\sin x\,dx\Big)\,dy\,; \tag{22}$$

snadno přitom zjistíme, že

$$F_n(y) := \int_0^n e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1-e^{-ny}(y\sin n+\cos n)}{y^2+1} \tag{23}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $y \in \mathbb{R}_+$.

Otázkou nyní je, zdali je $\lim_{n\to\infty} K_n = K$, tj. zdali můžeme provést limitní přechod za znamením integrálu $\int_0^{+\infty} F_n(y)\,dy$ v (22); k ověření užijeme Lebesgueovu větu: Protože je $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$ (pro všechna $y \in \mathbb{R}_+$), stačí najít nějakou majorantu $g(y)$ všech funkcí $F_n(y)$, patřící do $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$. Jak snadno ověříme, nerovnosti $|e^{-ny}\cos n| \le 1$, $|e^{-ny}y\sin y| \le nye^{-ny} \le 1$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $y \in \mathbb{R}_+$; druhá z nich plyne z toho, že (kladná) funkce te^{-t} má v $\mathbb{R}_+$ maximum rovné $1/e < 1$. Funkce $g(y) := 3/(y^2+1)$ je tedy (vzhledem k (23)) hledanou majorantou funkcí $F_n(y)$; její integrovatelnost přes $\mathbb{R}_+$ je zřejmá.

Résumé: Limitní přechod $n \to \infty$ lze v identitě (22) provést; v důsledku toho $J = K = \frac{1}{2}\pi$.[41]) □

Obrátíme se nyní k problematice věty o substituci pro vícerozměrné integrály; abychom tuto větu mohli vůbec *vyslovit*, musíme zavést některé pojmy z teorie funkcí více proměnných.[42])

Budeme říkat, že Φ je **regulární zobrazení** množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, jsou-li splněny tyto podmínky:

1. Množina Ω je otevřená (v $\mathbb{R}^p$), $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^p$;
2. Φ je třídy C_1 v Ω;[43])
3. hodnost matice $\Phi'(x)$ je rovna p v každém bodě $x \in \Omega$.[44])

V Jarníkově DII (věta 212) lze nalézt toto tvrzení:

Věta 6.4. *Je-li $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ regulární zobrazení, je množina $\Phi(X)$ otevřená pro každou otevřenou množinu $X \subset \Omega$. Speciálně: Obor hodnot $\Phi(\Omega)$ zobrazení Φ je otevřený. Je-li zobrazení Φ navíc prosté, je i zobrazení $\Phi_{-1} : \Phi(\Omega) \overset{\text{na}}{\to} \Omega$ inverzní k Φ regulární, a to na množině $\Phi(\Omega)$.*

Pro regulární *prosté* zobrazení se v posledních desetiletích ujal název **difeomorfní zobrazení** neboli **difeomorfismus**, tedy jakýsi diferenciální homeomorfismus; není důvod neužívat jej, protože dobře vystihuje podstatu věci a terminologii účelně zestručňuje.

Následující věta obsahuje některá závažná tvrzení dokázaná v kapitole VI Jarníkova JII:

[41]) Další příklady uvedeného typu čtenář najde v Jarníkově JII.

[42]) *Důkaz* věty o substituci by si naproti tomu vyžádal znalost celé řady hlubokých vět z teorie funkcí několika proměnných, jejichž důkazy nejsou – jak lze očekávat – nikterak jednoduché. Všechny je lze nalézt jak v Sikorského knize [6], tak i v Jarníkových učebnicích DII a JII.

[43]) Připomeňme, že to znamená, že parciální derivace 1. řádu funkce Φ podle všech proměnných jsou v Ω spojité.

[44]) Jinými slovy, determinant této matice (tedy tzv. *Jacobiho determinant* neboli *jakobián* vektorové funkce Φ) je všude v Ω nenulový.

Věta 6.5. *Je-li $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ difeomorfní zobrazení, platí:*

1. *Je-li $X \subset \Omega$ měřitelná množina, platí totéž o množině $\Phi(X)$.*
2. *Je-li $X \subset \Omega$ nulová množina, platí totéž o množině $\Phi(X)$.*
3. *Je-li funkce f měřitelná na množině $Y \subset \Phi(\Omega)$, je funkce $f \circ \Phi$ měřitelná na množině $\Phi_{-1}(Y)$.*

I následující větu najdeme v JII (věta 103).

Věta 6.6 (o substituci v Lebesgueově integrálu). *Je-li Φ difeomorfní zobrazení množiny Ω, platí implikace:*

$$(24) \qquad M \subset \Omega \Rightarrow \int_{\Phi(M)} f = \int_M (f \circ \Phi)\,|\det \Phi'|\,, \quad \text{existuje-li jeden z integrálů}\,,$$

$$(24^*) \qquad N \subset \Phi(\Omega) \Rightarrow \int_N f = \int_{\Phi_{-1}(N)} (f \circ \Phi)\,|\det \Phi'|\,, \quad \text{existuje-li jeden z integrálů}\,.$$

Z praktického hlediska je velice důležité, že rovnost v (24) resp. v (24*) je zaručena existencí *kteréhokoli* z napsaných integrálů.[45])

Jsou-li splněny ostatní předpoklady věty, zejména tedy předpoklad, že zobrazení Φ je difeomorfní, můžeme substituci provést, aniž je nutné předem zjišťovat, zdali integrál na levé straně (24) *resp.* (24*), *v němž substituci provádíme, existuje!* Integrál se přitom substitucí může natolik zjednodušit, že se jeho existence (tj. existence integrálu na pravé straně (24) resp. (24*)) dá dokázat již daleko snadněji.

Příklady. 1. Jednoduchým příkladem difeomorfismu $\mathbb{R}^p$ na $\mathbb{R}^p$ je *permutace souřadnic*; je to zobrazení tvaru $\Phi(x_1, \ldots, x_p) := (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$, kde $(i_1, \ldots, i_p)$ je permutací p-tice $(1, \ldots, p)$. Je zřejmé, že pak $|\det \Phi'| = |\pm 1| = 1$.

Permutaci souřadnic můžeme tedy provést v každém integrálu; z toho např. ihned plyne, že při převodu p-rozměrného integrálu na sled p jednorozměrných integrací můžeme integrovat „podle jednotlivých proměnných“ *v libovolném pořadí*. To velmi účelně doplňuje Fubiniho větu a je pro početní praxi velice důležité.

2. Poněkud obecnějším příkladem difeomorfismu $\mathbb{R}^p$ na $\mathbb{R}^p$ je *lineární zobrazení*, jehož matice má nenulový determinant (tj. je regulární). Jacobiho determinantem tohoto zobrazení je determinant příslušné matice.

3. Důležitým difeomorfismem je zobrazení $\Phi(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, kde $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in I$, kde I je otevřený (jednorozměrný) interval délky 2π, tedy interval tvaru $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Tento difeomorfismus souvisí s přechodem od *polárních souřadnic* ke kartézským; zobrazuje $\mathbb{R}_+ \times (\alpha, \alpha + 2\pi)$ na rovinu $\mathbb{R}^2$, z níž je vynechána uzavřená polopřímka vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel α. Jeho jakobián, jak snadno nahlédneme, je roven r – viz též příklad 1 z dodatku k tomuto oddílu. Protože vynechaná polopřímka má dvojrozměrnou míru nula, *lze od kartézských souřadnic přejít k polárním při výpočtu integrálu přes jakoukoli rovinnou množinu M.*

V jednom z Keplerových zákonů se mluví o „ploše opsané průvodičem“ tělesa pohybujícího se pod vlivem sluneční přitažlivosti po některé z kuželoseček; vzorec pro obsah množiny M, dané v polárních souřadnicích podmínkami tvaru

$$(25) \qquad \alpha < \varphi < \beta,\ 0 < r < f(\varphi)\,,$$

kde $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$ a kde $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}_+$ je spojitá funkce, se potřebuje i v jiných souvislostech.

Množina M je pak otevřená (tedy měřitelná) a její míra se vypočte takto:

$$(26) \qquad \mu_2(M) = \iint\limits_M dxdy = \iint\limits_{\substack{\alpha<\varphi<\beta\\ 0<r<f(\varphi)}} r\,drd\varphi = \int_\alpha^\beta \Big(\int_0^{f(\varphi)} r\,dr\Big) d\varphi = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2} f^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

---

[45]) Je opět Jarníkovou zásluhou, že vyslovenou větu dokázal právě v tomto tvaru, tedy *bez předpokladu*, že integrály jsou konečné. V důsledku toho ji lze užít i k *důkazu existence resp. konvergence* integrálu. Snad je na místě i poznámka, že začátkem 50-tých let, kdy byl Lebesgueův integrál na MFF UK v Praze poprvé (v dějinách ČSR) zařazen do výuky formou *kursovní* přednášky, nebyly tyto souvislosti jasné *ani známým zahraničním odborníkům na teorii integrálu.*

4. Neméně důležitým difeomorfismem je zobrazení

$$\Psi(r,\varphi,\theta) := (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\,,$$

kde $(r,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}_+\times(0,2\pi)\times(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$. Souvisí s přechodem ze *sférických souřadnic* ke kartézským v prostoru $\mathbb{R}^3$. Oborem jeho hodnot je prostor $\mathbb{R}^3$, z něhož je vynechána uzavřená polorovina, která obsahuje kladnou část osy x a jejíž hranicí je osa z. Jak snadno zjistíme, je jakobián zobrazení Ψ je roven $r^2\cos\theta$ – sr. s příkladem 12 resp. 10 v dodatku k tomuto oddílu, kde se vyšetřuje difeomorfismus o něco obecnější. Protože vynechaná polorovina má trojrozměrnou míru nula, *lze od kartézských souřadnic přejít ke sférickým při výpočtu integrálu přes jakoukoli množinu* $M\subset\mathbb{R}^3$. $\square$

Dodatek k oddílu 6

Ačkoli si tento text neklade za úkol naučit čtenáře početní technice Lebesgueova integrálu, přece jen by bylo škoda neuvést některé užitečné příklady, které ukáží, jak se obecné věty obsažené na předcházejících stránkách aplikují. Příklady jsou částečně převzaty z Jarníkova JII, kde je početní technice věnována celá dlouhá kapitola VII a část kapitoly VIII.

Začneme jednoduchým, ale důležitým příkladem aplikace věty o substituci v kombinaci s Fubiniho větou. V komplexní analýze se sice *Fresnelovy integrály* $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$, $\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx$ počítají tzv. residuovou větou, ale potřebuje se při tom tento výsledek:

Příklad 1. Tzv. **Laplaceův integrál** je integrál

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,. \tag{1}$$

Je zřejmé, že existuje – integrand je nezáporný a spojitý, tedy měřitelný v $\mathbb{R}_+$. Z podobného důvodu existuje integrál

$$\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{\mathbb{R}_+}\Big(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}\,dx\Big)e^{-y^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}dx\cdot\int_{\mathbb{R}_+} e^{-y^2}dy = I^2\,; \tag{2}$$

všimněme si, že jsme užili Fubiniho věty oprávněně (integrand je měřitelný, nezáporný), a že se v tomto okamžiku vůbec nemusíme starat o to, zdali je konečný nebo ne.

V prvním integrálu v (2) proveďme substituci do polárních souřadnic, tj. položme

$$x = r\cos\varphi, \quad x = r\sin\varphi\,. \tag{3}$$

Zde je nutné být opatrnější a ověřit řádně předpoklady: Substituce, kterou máme na mysli, odpovídá funkci

$$\Phi(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad \text{kde} \;\; r\in\mathbb{R}_+,\;\varphi\in(0,\tfrac{1}{2}\pi)\,, \tag{3*}$$

která zřejmě uvedenou množinu bodů (r,φ) zobrazuje prostě na $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, což je obor, přes který v (2) integrujeme. Jakobián substituce je determinant její derivace, tedy funkce

$$\det\Phi'(r,\varphi) = \begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r > 0\,. \tag{4}$$

Jak vidíme, jsou všechny předpoklady věty o substituci splněny, takže podle (2) a (4) je

$$I^2 = \iint\limits_{\substack{0<r<+\infty\\ 0<\varphi<\pi/2}} re^{-r^2}\,drd\varphi = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr\Big)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\Big(\big[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\big]_0^{+\infty}\Big)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}\,d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Z toho plyne hodnota Laplaceova integrálu:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{5}$$

Substitucí $x = \sqrt{\alpha}\, t$, kde $\alpha \in \mathbb{R}_+$, získáme tento poněkud obecnější výsledek:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,. \quad \square \tag{6}$$

V celé řadě situací hrají nenahraditelnou úlohu funkce nazývané **gamma** (Γ) a **beta** (B). Jsou definovány rovnostmi

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-s}\, dx \qquad \text{pro každé } \ s \in \mathbb{R}_+\,, \tag{7}$$

$$\mathrm{B}(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \quad \text{pro každé } \ p \in \mathbb{R}_+ \ \text{ a každé } \ q \in \mathbb{R}_+\,; \tag{8}$$

jak snadno nahlédneme, jsou oba integrály pro uvedené hodnoty parametrů s, p, q kladné a konečné (zatímco pro všechny ostatní hodnoty těchto parametrů by byly rovny $+\infty$).

Příklad 2. Dokažme především, že

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{pro všechna } \ p \in \mathbb{R}_+,\ q \in \mathbb{R}_+\,. \tag{9}$$

D ů k a z . Podle definice funkce Γ a podle Fubiniho věty je

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y}\, dy = \iint_{\mathbb{R}_+^2} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}\, dxdy\,. \tag{10}$$

Funkce

$$\Phi(u,v) := (uv,\, u(1-v)), \quad \text{kde } \ u \in \mathbb{R}_+,\ v \in (0,1)\,, \tag{11}$$

je v uvedeném oboru prostá, neboť rovnice $x = uv$, $y = u(1-v)$ mají vzhledem k u, v jednoznačné řešení

$$u = x + y, \quad v = \frac{x}{x+y}\,; \tag{12}$$

přitom je patrné, že množina $\mathbb{R}_+^2$ se zobrazí funkcí Φ_{-1} (popsanou právě uvedenými vztahy (12)) na množinu $\mathbb{R}_+ \times (0,1)$. Protože Φ je třídy C_∞ a protože – jak snadno zjistíme – je $\det \Phi'(u,v) = -u$, lze na poslední integrál v (10) aplikovat větu o substituci, čímž dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \iint_{\mathbb{R}_+ \times (0,1)} u \cdot (uv)^{p-1} \cdot (u(1-v))^{q-1} \cdot e^{-u}\, dudv \\ &= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u}\, du \cdot \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dv = \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\,,\end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

V rovnosti (8) lze provést substituci $x = \omega(t) := \sin^2 t$, která zobrazuje interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$ prostě na interval $(0,1)$, přičemž $\omega'(t) = 2\sin t \cos t$ je v $(0, \frac{1}{2}\pi)$ spojitá a kladná. Tím dostaneme identitu

$$\mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\, dt\,;$$

píšeme-li ještě $\alpha := 2p$, $\beta := 2q$ a užijeme-li (9), vidíme, že

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} t \cos^{\beta-1} t\, dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}\beta)}{2\Gamma(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))} \quad \text{pro všechna } \ \alpha \in \mathbb{R}_+ \ \text{ a všechna } \ \beta \in \mathbb{R}_+\,. \tag{13}$$

Tím jsou všechny konvergentní integrály přes interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$ ze součinů mocnin (i s necelými exponenty!) funkcí sinus a kosinus vyjádřeny pomocí hodnot funkce Γ, které jsou podrobně tabelovány; v celých násobcích čísla $\frac{1}{2}$ je lze jednoduše vypočítat:

Integrací per partes získáme snadno identitu

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{pro každé} \quad s \in \mathbb{R}_+ \,; \tag{14}$$

uvážíme-li, že $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$, vidíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\,(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)\,,$$

tedy že

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{pro každé celé číslo} \quad n \geq 0\,. \tag{15}$$

Funkce $\Gamma(s)$ je tedy *rozšířením faktoriálu* $(n-1)!$ z $\mathbb{N}$ na celé $\mathbb{R}_+$; zároveň je vidět, že rovnost $0! = 1$, užívaná i v elementární matematice, má daleko hlubší důvody, než je např. jen platnost rovnosti

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pro všechna celá čísla $n \geq 0$, $k \geq 0$, pro něž je $0 \leq k \leq n$.

Provedeme-li v rovnosti (5) substituci $x = \sqrt{s}$, dostaneme rovnost

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,; \tag{16}$$

podle (14) je tedy

$$\Gamma\big(n+\tfrac{1}{2}\big) = \big(n-\tfrac{1}{2}\big)\big(n-\tfrac{3}{2}\big)\cdots\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \text{pro každé celé} \quad n \geq 0. \quad \square \tag{17}$$

Právě dokázané vzorce se nám budou hodit v několika dalších příkladech, v nichž se vyskytnou integrály typu (13); ušetří nám – např. v případě větších lichých α, β – někdy dosti pracnou integraci per partes.

Příklad 3. Vypočtěme obsah (neboli dvojrozměrnou Lebesgueovu míru) vnitřku „smyčky“ lemniskaty obsažené v polorovině $x \geq 0$, popsaného v kartézských souřadnicích x, y nerovnostmi

$$(x^2+y^2)^2 < 2a^2(x^2-y^2), \quad x > 0\,, \tag{18}$$

kde $a \in \mathbb{R}_+$. V polárních souřadnicích r, φ má nerovnost (18) tvar

$$r^2 < 2a^2\cos 2\varphi \tag{18a}$$

a polorovině $x > 0$ odpovídají přitom úhly $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Průmět množiny (18a) do osy φ je množina všech $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, pro něž existuje $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že platí (18a); je identický s množinou těch φ (z uvedeného intervalu), pro něž je $\cos 2\varphi > 0$, tedy s intervalem $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$. Při každém takovém φ integrujeme podle r od 0 do $a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Je proto

$$\mu_2(M) = \iint\limits_M dxdy = \iint\limits_{\substack{0<r<a\sqrt{2\cos 2\varphi}\\ -\pi/4<\varphi<\pi/4}} r\,drd\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \big[\tfrac{1}{2}r^2\big]_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\,d\varphi = a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = a^2\,. \quad \square$$

V právě uvedeném příkladu jsme přešli k polárním souřadnicím proto, že v nich je „kartézský“ výraz x^2+y^2 velmi jednoduchý. Z dalších dvou příkladů bude patrné, že polární souřadnice často modifikujeme se stejným cílem – aby se nerovnost, kterou je integrační obor popsán, zjednodušila.

Příklad 4. Buď

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ (x+y)^3 < xy,\ x > 0,\ y > 0\}\,; \tag{19}$$

nyní by se výpočet obsahu množiny M zjednodušil substitucí Φ popsanou rovnostmi

$$x = r\cos^2\varphi, \quad y = r\sin^2\varphi\,; \tag{20}$$

je však třeba zjistit, zdali je přípustná, tj. zdali je ve vhodném oboru difeomorfismem. Protože je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^2$ a protože její jakobián je

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -2r\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & 2r\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 2r\sin\varphi\cos\varphi > 0 \ \text{ pro každé } \ \varphi \in (0, \tfrac{1}{2}\pi)\,, \tag{21}$$

zbývá ještě dokázat, že je prostá v polopásu $N := \{(r,\varphi)\,;\, r \in \mathbb{R}_+,\, 0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi\}$ a že tento polopás zobrazuje na $\mathbb{R}^2_+$.

Je zřejmé, že $\Phi(N) \subset \mathbb{R}^2_+$; protože lze z rovnic (20) pro každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ jednoznačně vypočítat

$$r = x + y \ \ (\in \mathbb{R}_+), \quad \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y}{x}} \ \ \bigl(\in (0, \tfrac{1}{2}\pi)\bigr)\,, \tag{20a}$$

je zobrazení prosté a *na* $\mathbb{R}^2_+$. Vztahy (20a) popisují ovšem zobrazení Φ_{-1}. V „křivočarých“ souřadnicích r, φ má množina M popis $0 < r < \sin^2\varphi\cos^2\varphi$, z něhož je patrné, že průmětem do osy φ je celý interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Věta o substituci a vzorce (13) a (15) vedou k tomuto výsledku:

$$\mu_2(M) = \iint\limits_M dxdy = \iint\limits_{\substack{0<r<\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\ 0<\varphi<\pi/2}} 2r\sin\varphi\cos\varphi\, drd\varphi = \int_0^{\pi/2} \Bigl(\int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} 2r\,dr\Bigr) \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \bigl[r^2\bigr]_0^{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi\cos^5\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma^2(3)}{2\Gamma(6)} = \frac{2^2}{2\cdot 120} = \frac{1}{60}\,.$$

Příklad 5. K výpočtu obsahu vnitřku M astroidy, tedy množiny popsané v kartézských souřadnicích nerovností

$$x^{2/3} + y^{2/3} < a^{2/3}\,, \tag{22}$$

kde $a \in \mathbb{R}_+$, užijeme opět křivočarých souřadnic, v nichž se tato nerovnost velice podstatně zjednoduší. Užijeme substituci $\Phi(r,\varphi)$ popsanou rovnostmi

$$x = r\cos^3\varphi, \quad y = r\sin^3\varphi\,, \tag{23}$$

která je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a – jak snadno nahlédneme – prostá např. v oboru $\mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi)$, který zobrazuje na $\mathbb{R}^2 - \{(x,0)\,;\, x \in \langle 0, +\infty)\}$. Protože se však její jakobián

$$\det \Phi'(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi \tag{24}$$

anuluje právě ve všech bodech (r,φ), jejichž obrazy leží na osách souřadných, bylo by třeba před aplikací věty o substituci tyto body odstranit. Patrně o trochu jednodušší je postupovat takto:

Vzhledem k tomu, že nerovnost (22) splňují spolu s každým bodem (x,y) i body $(\pm x, \pm y)$, je $\mu_2(M) = 4\mu_2(M \cap \mathbb{R}^2_+)$, přičemž pro (r,φ) z množiny $\Omega := \mathbb{R}_+ \times (0, \frac{1}{2}\pi)$ je determinant (24) nenulový; rovnosti (23) jsou pak ekvivalentní s rovnostmi

$$r = \bigl(x^{2/3} + y^{2/3}\bigr)^{3/2} \ (\in \mathbb{R}_+), \quad \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \ \ (\in (0, \tfrac{1}{2}\pi))\,, \tag{23a}$$

což dokazuje prostotu restrikce $\Phi\,|\,\Omega$ a zároveň i rovnost $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2_+$. Nerovnost (22) přejde v nových souřadnicích r, φ ve zcela jednoduchou nerovnost $r < a$.

Podle věty o substituci a vzorců (13) a (17) je tedy

$$\mu_2(M) = 4\iint\limits_{M} dxdy = 6\iint\limits_{\substack{0<\varphi<\pi/2\\0<r<a}} 2r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,drd\varphi = 6a^2\cdot\frac{\Gamma^2(\frac{3}{2})}{2\Gamma(3)} = 6a^2\cdot\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^2}{4} = \frac{3}{8}\pi a^2\,.$$

Příklad 6. Tzv. *Descartesův list* je křivka popsaná parametricky vztahy

$$x = \frac{t}{1+t^3} \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}, \quad \text{kde } \ t \in (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\,; \tag{25}$$

její geometrický obraz obsahuje „smyčku“ obsaženou v prvním kvadrantu[46]), jejíž vnitřek M se dá v kartézských souřadnicích popsat nerovnostmi

$$x^3+y^3 < xy, \quad x>0,\ y>0\,. \tag{26}$$

Substituce

$$x = r\cos^{2/3}\varphi, \quad y = r\sin^{2/3}\varphi, \quad r\in\mathbb{R}_+,\ \varphi\in(0,\tfrac{1}{2}\pi)\,, \tag{27}$$

splňuje všechny předpoklady věty o substituci: Je v uvedeném oboru třídy C_∞, rovnice z (27) lze jednoznačně vyřešit vzhledem k r a φ (je-li $x\in\mathbb{R}_+$, $y\in\mathbb{R}_+$, je $r=\sqrt[3]{x^3+y^3}\in\mathbb{R}_+$, $\varphi=\operatorname{arctg}((y/x)^{3/2})\in(0,\frac{1}{2}\pi)$) a jakobián

$$\begin{vmatrix} \cos^{2/3}\varphi & -\frac{2}{3}r\cos^{-1/3}\varphi\sin\varphi \\ \sin^{2/3}\varphi & \frac{2}{3}r\sin^{-1/3}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\,r\sin^{-1/3}\varphi\cos^{-1/3}\varphi$$

je všude v uvedeném oboru nenulový (a neomezený, což ovšem při aplikaci věty 6.6 nevadí). (26) přejde v nerovnost $r<\sin^{2/3}\varphi\cos^{2/3}\varphi$, z níž je patrné, že průmět do osy φ je interval $(0,\frac{1}{2}\pi)$. Obsah množiny M je roven integrálu z jakobiánu přes obor $\Omega := \{(r,\varphi)\,;\,0<\varphi<\frac{1}{2}\pi,\ 0<r<\sin^{2/3}\varphi\cos^{2/3}\varphi\}$, tj.

$$\begin{aligned}\mu_2(M) &= \frac{1}{3}\iint_\Omega 2r\sin^{-1/3}\varphi\cos^{-1/3}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\big[r^2\big]_0^{\sin^{2/3}\varphi\cos^{2/3}\varphi}\sin^{-1/3}\varphi\cos^{-1/3}\varphi\,d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^{4/3}\varphi\cos^{4/3}\varphi\cdot\sin^{-1/3}\varphi\cos^{-1/3}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Příklad 7. Jak jsme již několikrát řekli, přecházíme od kartézských souřadnic ke vhodným „křivočarým souřadnicím“ velmi často proto, abychom zjednodušili popis dané množiny. Množina

$$M := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,ax^2<y<bx^2,\ cy^2<x<dy^2\}\,, \tag{28}$$

kde $0<a<b<+\infty$, $0<c<d<+\infty$, je část $\mathbb{R}^2_+$ vymezená čtyřmi parabolami, ale v souřadnicích

$$u := \frac{y}{x^2}, \quad v := \frac{x}{y^2} \tag{29}$$

by táž množina byla obdélník $\Omega := (a,b)\times(c,d)\subset\mathbb{R}^2_+$. Ověřme proto předpoklady věty o substituci: V $\mathbb{R}^2_+$ je zobrazení $\Psi(x,y)$ popsané rovnostmi (29) třídy C_∞, přičemž $\Psi(\mathbb{R}^2_+)\subset\mathbb{R}^2_+$; z těchto rovnic lze přitom při $(u,v)\in\mathbb{R}^2_+$ jednoznačně vypočítat

$$x = (u^2v)^{-1/3}\in\mathbb{R}_+, \quad y=(uv^2)^{-1/3}\in\mathbb{R}_+\,. \tag{30}$$

Zobrazení $\Psi:\mathbb{R}^2_+\overset{\text{na}}{\to}\mathbb{R}^2_+$ je proto prosté a (30) je popisem zobrazení $\Phi := \Psi_{-1}$. Protože i jakobián

$$\det\Phi'(u,v) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}u^{-5/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-4/3} \\ -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{-2/3} & -\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-5/3}\end{vmatrix} = \frac{1}{3u^2v^2} \tag{31}$$

[46]) „Smyčka“ odpovídá hodnotám parametru t z intervalu $\langle 0,+\infty)$.

je všude v $\mathbb{R}^2_+$ nenulový, je (podle věty o substituci)

$$\mu_2(M) = \iint\limits_M dxdy = \iint\limits_{\substack{a<u<b\\ c<v<d}} \frac{dudv}{3u^2v^2} = \frac{1}{3}\int_a^b \frac{du}{u^2}\cdot\int_c^d \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{u}\Big]_a^b\Big[-\frac{1}{v}\Big]_c^d = \frac{(b-a)(d-c)}{3\,abcd}. \quad \square$$

V příkladu, který jsme právě vyřešili, byl integrační obor určen vztahy tvaru

$$a < f(x,y) < b, \quad c < g(x,y) < d\,; \tag{32}$$

pokud zobrazení popsané rovnostmi

$$u = f(x,y)\,, \quad v = g(x,y) \tag{33}$$

splňuje předpoklady věty o substituci, převede se jeho zavedením integrace přes obor (32) na integraci přes obdélník. Podobně je tomu i v prostorech větší dimenze:

Příklad 8. Objem neboli trojrozměrnou Lebesgueovu míru množiny

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; A < xyz < B,\, Cz < xy < Dz,\, Eyz < x < Fyz\}\,, \tag{34}$$

kde $A < B$, $C < D$, $E < F$ jsou čísla z $\mathbb{R}_+$, vypočteme zavedením nových souřadnic

$$u = xyz\,, \quad v = \frac{xy}{z}\,, \quad w = \frac{x}{yz}\,. \tag{35}$$

Je ovšem nutné ověřit předpoklady věty 6.6 a najít jakobián inverzní transformace Φ; protože $uw = x^2$, $v/w = y^2$, $u/v = z^2$, je Φ popsáno rovnicemi

$$x = \sqrt{uw}\,, \quad y = \sqrt{\frac{v}{w}}\,, \quad z = \sqrt{\frac{u}{v}}\,. \tag{36}$$

Φ je tedy prosté zobrazení třídy C_∞ v 1. oktantu $\mathbb{R}^3_+$, přičemž zřejmě $\Phi(\mathbb{R}^3_+) = \mathbb{R}^3_+$; obrazem kvádru $\Omega := (A,B)\times(C,D)\times(E,F)$ je množina M.

Jakobián difeomorfismu Φ jsme zatím vždy počítali přímo z definice; v případech, kdy se jakobián inverzního zobrazení $\Psi := \Phi_{-1}$ vypočte snadněji, lze však s výhodou postupovat i jinak: Protože obě superpozice $\Phi\circ\Psi$, $\Psi\circ\Phi$ jsou identická zobrazení, jsou podle věty o diferencování superpozice obě matice $(\Phi'\circ\Psi)\bullet\Psi'$, $(\Psi'\circ\Phi)\bullet\Phi'$ [47]) jednotkové, a pro příslušné determinanty platí identity

$$\det\Phi' = \frac{1}{\det\Psi'\circ\Phi}\,, \quad \det\Psi' = \frac{1}{\det\Phi'\circ\Psi}\,, \tag{37}$$

každá z nich v příslušném oboru difeomorfnosti.

V našem případě dáme právě tomuto postupu přednost, protože v (35) nejsou odmocniny; protože

$$\det\Psi'(x,y,z) = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ y/z & x/z & -xy/z^2 \\ 1/yz & -x/y^2z & -x/yz^2 \end{vmatrix} = -4\,\frac{x^2}{z^2} \neq 0 \ \text{ všude v } \ \mathbb{R}^3_+\,,$$

je $\det\Phi'(u,v,w) = -1/4vw$.

Objem množiny (34) je proto roven

$$\mu_3(M) = \frac{1}{4}\iiint_\Omega \frac{dudvdw}{vw} = \frac{1}{4}\int_A^B du\cdot\int_C^D \frac{dv}{v}\cdot\int_E^F \frac{dw}{w} = \frac{1}{4}\,(B-A)\lg\frac{D}{C}\lg\frac{F}{E}\,.$$

Příklad 9. Vypočítejme objem čtyřstěnu vymezeného souřadnými rovinami v $\mathbb{R}^3$ a rovinou procházející body $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$, kde a, b, c jsou tři libovolná čísla z $\mathbb{R}_+$, tedy množiny

$$M := \{(x,y,z)\,;\; x>0,\ y>0,\ z>0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} < 1\}\,. \tag{38}$$

[47]) Znak $\bullet$ užíváme pro maticové násobení.

Trojný integrál rozložíme nejdříve na dvojný (vně) a jednorozměrný (uvnitř), v němž budeme integrovat např. podle z.[48]) Průmětem množiny M do roviny xy je pak zřejmě trojúhelník

$$N := \{(x,y)\,;\, x > 0,\ y > 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1\}\,;$$

k bodu $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ existuje totiž číslo $z \in \mathbb{R}_+$ tak, že $(x,y,z) \in M$, právě tehdy, když je $(x,y) \in N$. Je-li přitom $(x,y) \in N$, leží (x,y,z) v M právě tehdy, když je $0 < z < c(1 - x/a - y/b)$.

Je tedy

$$\mu_3(M) = \iiint_M dxdydz = \iint_N \Big(\int_0^{c(1-x/a-y/b)} dz \Big)\, dxdy = c \iint_N \Big(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\, dxdy\,. \tag{39}$$

Protože průmět množiny N do osy x je interval $(0,a)$ a protože pro každé $x \in (0,a)$ je $(x,y) \in N$ právě tehdy, když je $0 < y < b(1 - x/a)$, je

$$\begin{aligned}\mu_3(M) &= c \int_0^a \Big(\int_0^{b(1-x/a)} \Big(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\, dy \Big)\, dx = c \int_0^a \Big[\Big(1 - \frac{x}{a}\Big) y - \frac{y^2}{2b} \Big]_{y=0}^{b(1-x/a)}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, bc \int_0^a \Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^2 dx = \frac{1}{2}\, bc \cdot \Big(-\frac{a}{3}\Big) \Big[\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^3 \Big]_0^a = \frac{1}{6}\, abc\,.\end{aligned}$$

Příklad 10. Vyskytne-li se při integraci přes nějakou část $\mathbb{R}^3$ výraz $x^2 + y^2 + z^2$, je často vhodné přejít od kartézských souřadnic x, y, z ke sférickým souřadnicím r, φ, θ; i výraz $x^2 + y^2$ je sice v těchto souřadnicích celkem jednoduchý, ale někdy je vhodné dát přednost tzv. *souřadnicím válcovým*, při nichž např. souřadnici z ponecháme beze změny a klademe $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Vypočítejme objem tzv. *Vivianiho tělesa*, což je množina tvaru

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x^2 + y^2 \le Rx\}\,, \tag{40}$$

kde $R \in \mathbb{R}_+$. Jak je patrné, jde o průnik koule o středu v počátku a poloměru R s válcem, jehož osa je rovnoběžná s osou z a jehož průmět do roviny xy je kruh $N := \{(x,y)\,;\, (x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}R^2\} = \{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \le Rx\}$ o středu $(\frac{1}{2}R, 0)$ a poloměru $\frac{1}{2}R$; osa z zřejmě leží na povrchu tohoto válce.

Protože při každé pevném $(x,y) \in N$ je $(x,y,z) \in M$ právě tehdy, když je $-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, je

$$\mu_3(M) = \iiint_M dxdydz = 2 \iint_N \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\,.$$

Protože nerovnost $x^2 + y^2 \le Rx$ přejde v polárních souřadnicích v nerovnost $r \le R\cos\varphi$, je průmět příslušné množiny do osy φ interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, v němž je pravá strana nerovnosti kladná. Je tedy

$$\begin{aligned}\mu_3(M) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r\, dr \Big)\, d\varphi \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[-\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} \Big]_{r=0}^{R\cos\varphi} d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(1 - \big|\sin^3\varphi\big|\big)\, d\varphi\,;\end{aligned}$$

při dosazování horní meze $R\cos\varphi$ bylo samozřejmě třeba správně odmocnit: $(R^2 - R^2\cos^2\varphi)^{3/2} = R^3\,(\sin^2\varphi)^{3/2}$ je rovno $R^3\,\big|\sin^3\varphi\big|$, nikoli $R^3\sin^3\varphi$![49]) Protože $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \pi$ a $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big|\sin^3\varphi\big|\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} (\cos^2\varphi - 1)(-\sin\varphi)\, d\varphi = 2\big[\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi\big]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}$, je

$$\mu_3(M) = \tfrac{2}{3}\, R^3 (\pi - \tfrac{4}{3})\,. \quad \square$$

---

[48]) Na pořadí integrací podle jednotlivých proměnných zde nezáleží v tom smyslu, že postup je stejně jednoduchý ve všech případech.

[49]) Pokud zde uděláme naznačenou chybu, bude výsledek *nesprávný*, protože integrál v mezích $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ z liché funkce $\sin^3\varphi$ bude roven 0. Kdybychom však užili rovnost $\mu_3(M) = 2\mu_3(M \cap \mathbb{R}_+^3)$, integrovali bychom podle φ přes interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$ a uvedenou chybu bychom „neměli příležitost“ udělat.

Ve dvou dalších příkladech budeme řešit určité *fyzikální úlohy*: Jak známo, je *hmotnost* tělesa M o hustotě $\rho(x, y, z)$ je dána integrálem

$$\iiint_M \rho(x, y, z)\, dxdydz\,, \tag{41}$$

jeho *statický moment* vzhledem k rovině yz resp. xz resp. xy integrálem

$$\iiint_M \rho(x, y, z)\, x\, dxdydz \;\text{ resp. }\; \iiint_M \rho(x, y, z)\, y\, dxdydz \;\text{ resp. }\; \iiint_M \rho(x, y, z)\, z\, dxdydz\,. \tag{42}$$

Souřadnice těžiště tělesa M o hustotě ρ se získají dělením statických momentů tělesa M vzhledem k jednotlivým souřadným rovinám (v pořadí, v němž byly ve (42) napsány) hmotností tohoto tělesa.

Je-li těleso *homogenní*, tedy o konstantní hustotě, lze ρ ze všech integrálů vytknout; při dělení se pak ρ zkrátí, takže lze od začátku bez újmy na obecnosti předpokládat, že jde o těleso s hustotou 1.

Příklad 11. Najděme polohu těžiště průniku homogenního elipsoidu se středem v počátku, jehož poloosy mají (kladné konečné) délky a, b, c, s prvním oktantem, tedy těžiště množiny

$$M := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 \le 1,\; x \ge 0,\; y \ge 0,\; z \ge 0\Big\}\,. \tag{43}$$

K výpočtu hmotnosti a statického momentu tělesa M užijeme *zobecněné sférické souřadnice*

$$x = ar\cos\varphi\cos\theta\,, \quad y = br\sin\varphi\cos\theta\,, \quad z = cr\sin\theta\,; \tag{44}$$

oktantu $\mathbb{R}^3_+$ odpovídá množina $G := \{(r, \varphi, \theta)\,;\, 0 < r < +\infty,\, 0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi,\, 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi\}$. [50]) Protože

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 = r^2\left((\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2\,,$$

odpovídá vnitřku množiny M v nových souřadnicích kvádr $\Omega := (0, 1)\times(0, \frac{1}{2}\pi)\times(0, \frac{1}{2}\pi)$. Pro $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$ mají rovnice (44) jednoznačné řešení

$$r = \sqrt{\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{c}\Big)^2}\,, \quad \varphi = \operatorname{arccotg}\frac{bx}{ay}\,, \quad \theta = \operatorname{arccotg}\sqrt{\Big(\frac{c}{z}\Big)^2\Big(\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2\Big)}\,,$$

přičemž zřejmě $(r, \varphi, \theta) \in G$. Zobrazení Φ popsané rovnicemi (44) je tedy v G prosté a $\Phi(G) = \mathbb{R}^3_+$.

Jakobián zobrazení Φ, tj.

$$\det\Phi'(r, \varphi, \theta) = abc\cdot\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta\end{vmatrix} = abcr^2\cos\theta\,,$$

je všude v Ω nenulový; protože Φ je třídy C_∞ (v celém $\mathbb{R}^3$), je $\Phi|G$ difeomorfismus.

Hmotnost tělesa M je (při $\rho = 1$) rovna jeho míře, tedy číslu

$$\iiint\limits_M dxdydz = \iiint\limits_\Omega abcr^2\cos\theta\, drd\varphi d\theta = abc\int_0^1 r^2\,dr\cdot\int_0^{\pi/2} d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi abc}{6}\,.$$

Statický moment množiny M vzhledem k rovině yz se rovná

$$\iiint\limits_M x\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega a^2bcr^3\cos\varphi\cos^2\theta\,drd\varphi d\theta = a^2bc\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= a^2bc\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi a^2bc}{16}\,;$$

[50]) V definici difeomorfismu je předpoklad, že jeho obor je otevřený; protože hranice množiny M má trojrozměrnou míru 0, je lhostejné, zdali integrujeme přes M nebo přes $\operatorname{int} M$, což je část $\mathbb{R}^3_+$.

jak snadno nahlédneme, dostanou se statické momenty vzhledem k rovinám zx a xy cyklickou permutací čísel a, b, c. Těžištěm tělesa M je tedy bod $\left(\frac{3}{8}a,\ \frac{3}{8}b,\ \frac{3}{8}c\right)$. $\square$

Moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k ose z je roven integrálu

$$\iiint_M \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)\,dxdydz\,; \tag{45}$$

momenty setrvačnosti vzhledem k ose x resp. y se získají cyklickou záměnou x, y, z.

Příklad 12. Vypočtěme moment setrvačnosti vzhledem k ose z *kulové vrstvy*

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2\}\,, \tag{46}$$

kde $0 < a < b < +\infty$, je-li hustota dána rovností $\rho(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

K výpočtu užijeme sférických souřadnic

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\theta\,; \tag{47}$$

jakobián tohoto zobrazení Φ je $r^2\cos\theta$ (sr. s příkladem 10), v oboru

$$\Omega := \{(r,\varphi,\theta)\,;\ 0 < r < +\infty,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi\} \tag{48}$$

je Φ difeomorfní, množina $\Phi(\Omega)$ vznikne z $\mathbb{R}^3$ vynecháním uzavřené poloroviny, jejíž hranicí je osa z a která obsahuje kladnou část osy x. Protože tato polorovina má míru 0, můžeme zobrazení Φ užít ve větě 6.6 o substituci pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$.

Uvážíme-li, že $x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta$, vidíme, že moment setrvačnosti, který máme počítat, je roven

$$\iiint\limits_M \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz = \iiint\limits_{\substack{a<r<b,\,0<\varphi<2\pi\\ -\pi/2<\theta<\pi/2}} r^3\cos^3\theta\,drd\varphi d\theta$$

$$= \int_a^b r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_{\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \tfrac{1}{4}(b^4-a^4)\cdot 2\pi\cdot\tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3}\pi(b^4-a^4)\,.$$

Poznamenejme, že moment setrvačnosti kulové vrstvy (46) bychom mohli stejnou metodou počítat pro všechny hustoty, které mají ve sférických souřadnicích tvar $\rho(r) = r^{-\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$; stejnou metodou bychom vypočetli i moment setrvačnosti koule o poloměru $R \in \mathbb{R}_+$, ale jen pro hustoty $\rho(r) = r^{-\alpha}$, kde $\alpha < 5$, protože pro ostatní α by byl integrál $\int_0^R r^{4-\alpha}\,dr$ roven $+\infty$. Vůbec by přitom *„z matematického hlediska"* nevadilo, že pro $\alpha > 0$ není hustota v počátku definována a že je v každém okolí tohoto bodu neomezená. Pro hustoty $\rho(r) = r^{-\alpha}$ s $\alpha < 5$ by bylo možné moment setrvačnosti množiny (46) počítat jako rozdíl momentů setrvačnosti koulí o poloměrech b a a.

Příklad 13. Nakonec ještě vypočteme *objem p-rozměrné koule*. Nechť $V_p(r)$ znamená p-rozměrnou míru p-rozměrné koule

$$M_p(r) := \{x \in \mathbb{R}^p\,;\ \|x\| < r\} \tag{49}$$

o středu v počátku a poloměru $r \in \mathbb{R}_+$. Položíme-li $x = ry$, je zřejmě $\|x\| < r \Leftrightarrow \|y\| < 1$; protože jakobián této substituce je roven r^p, je $V_p(r) = r^pV_p(1) = r^pW_p$, kde W_p znamená (p-rozměrnou) míru jednotkové (p-rozměrné) koule $\|y\| < 1$.

V (49) jsme užili vektorový zápis bodů z $\mathbb{R}^p$. Užívejme nyní složkové značení $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ a uvažme, že integraci přes jednotkovou kouli $M_p(1)$ charakterizovanou nerovností $x_1^2+\cdots+x_{p-1}^2+x_p^2 < 1$, můžeme podle Fubiniho věty převést na sled jednorozměrné integrace podle proměnné x_p přes interval $(-1,1)$ a $(p-1)$-rozměrné integrace přes obor $x_1^2+\cdots+x_{p-1}^2 < 1-x_p^2$, což je koule dimenze $p-1$ o poloměru $(1-x_p^2)^{1/2}$. Je tedy

$$W_p = \int\limits_{M_p(1)} dx = \int_{-1}^1\Big(\int\limits_{M_{p-1}((1-x_p^2)^{1/2})}\!\!\!\cdots\int dx_1\ldots dx_{p-1}\Big)\,dx_p = \int_{-1}^1 V_{p-1}((1-x_p^2)^{1/2})\,dx_p \tag{50}$$

$$= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(p-1)/2}\,W_{p-1}\,dt = W_{p-1}I_{p-1}\,,$$

kde

$$I_n := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n/2}\, dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^{n/2}\, dt \quad \text{pro každé} \quad n \ge -1\,. \tag{51}$$

Provedeme-li substituci $t = \sin s$, $s \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, a užijeme-li (13), vidíme, že

$$I_n = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} s\, ds = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}(n+2))}{\Gamma(\frac{1}{2}(n+3))} \quad \text{pro každé} \quad n \ge -1\,. \tag{52}$$

Z identity $W_p = W_{p-1} I_{p-1}$ plyne identita

$$W_p = W_{p-2} I_{p-1} I_{p-2} \quad \text{pro každé} \quad p \in \mathbb{N}\,, \tag{53}$$

přičemž (podle (52), (16), (14))

$$I_{p-1}I_{p-2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}(p+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(p+2))} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}p)}{\Gamma(\frac{1}{2}(p+1))} = \pi\, \frac{\Gamma(\frac{1}{2}p)}{\Gamma(\frac{1}{2}p+1)} = \pi\, \frac{\Gamma(\frac{1}{2}p)}{\frac{1}{2}p\Gamma(\frac{1}{2}p)} = \frac{2\pi}{p}\,. \tag{54}$$

Uvážíme-li ještě, že $W_1 = 2$ (délka úsečky $(-1,1)$) a $W_2 = \pi$ (obsah jednotkového kruhu), vidíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} W_{2n} &= W_{2(n-1)}\, I_{2n-1}\, I_{2n-2} = W_{2(n-1)}\, \frac{\pi}{n} = W_{2(n-2)}\, \frac{\pi}{n}\, \frac{\pi}{n-1} = \cdots \\ &= W_2\, \frac{\pi}{n}\, \frac{\pi}{n-1} \cdots \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^n}{n!}\,, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= W_{2n-1}\, I_{2n}\, I_{2n-1} = W_{2n-1}\, \frac{2\pi}{2n+1} = W_{2n-3}\, \frac{2\pi}{2n+1}\, \frac{2\pi}{2n-1} = \cdots \\ &= W_1\, \frac{2\pi}{2n+1}\, \frac{2\pi}{2n-1} \cdots \frac{2\pi}{3} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n+1)!!}\,; \end{aligned} \tag{56}$$

poslední zlomek lze rozšířením výrazem $2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2 = 2^n \cdot n!$ upravit na tvar

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}\pi^n n!}{(2n+1)!}\,. \tag{56a}$$

Abychom dostali objemy koulí o obecném poloměru $r \in \mathbb{R}_+$, stačí násobit příslušnou mocninou poloměru; je tedy

$$V_{2n}(r) = \frac{(\pi r^2)^n}{n!}\,, \quad V_{2n+1}(r) = \frac{2^{2n+1}\pi^n r^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{57}$$

Speciálně: objemy koulí dimenzí $3, 4, 5$ jsou po řadě $\frac{4}{3}\pi r^3$, $\frac{1}{2}\pi^2 r^4$, $\frac{8}{15}\pi^2 r^5$. Jak je patrné, mocnina čísla π s rostoucí dimenzí koule *roste*, ale „poloviční rychlostí“ v porovnání s dimenzí prostoru (dimenzím $2n$ a $2n+1$ odpovídá n-tá mocnina čísla π); objem $2n$-rozměrné koule je n-tou mocninou obsahu kruhu o stejném poloměru dělenou příslušným faktoriálem $n!$, vzorec pro liché dimenze je složitější.

7. Hilbertův prostor

Říkáme, že metrický prostor (X, ρ) je **separabilní**, má-li hustou spočetnou část (tj. existuje-li spočetná množina $Y \subset X$, pro niž je $\overline{Y} = X$).

Připomeňme, že *množina $Y \subset X$ je hustá v X právě tehdy, když*

(1) *každý bod $x \in X$ je limitou jisté posloupnosti bodů $x_n \in Y$*,

a také právě tehdy, když

(1*) *pro každé* $x \in X$ *a pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* $y \in Y$ *tak, že* $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Příklady. 1. Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^p$ je separabilní pro každé $p \in \mathbb{N}$; jeho hustou spočetnou částí je např. množina $\mathbb{Q}^p$ všech bodů, jejichž všechny souřadnice jsou racionální.

2. *Každý podprostor* X_1 *separabilního prostoru* X *je separabilní*: Je-li prostor X konečný, je tvrzení zřejmé; je-li prostor X nekonečný, je i každá jeho hustá část nekonečná. Předpokládejme, že se hustá spočetná část Y prostoru X skládá z bodů y_k, kde $k \in \mathbb{N}$; pak je i systém všech okolí tvaru $U_{kn} := U(y_k, 1/n)$, kde $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, spočetný. Zvolme v každém neprázdném průniku $U_{kn} \cap X_1$ bod a označme jej z_{kn}. Bodů z_{kn} je spočetně mnoho; dokažme, že množina všech těchto bodů je hustá v X_1.

Nechť $x \in X_1$ a nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; buď $n \in \mathbb{N}$ tak velké, že $2/n < \varepsilon$. Protože je množina Y hustá v X, existuje bod $y_k \in Y$ tak, že $\rho(x, y_k) < 1/n$. Okolí U_{kn} obsahuje bod $x \in X_1$ a patří tedy mezi ta okolí, z nichž byl vybrán bod $z_{kn} \in X_1$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je přitom $\rho(x, z_{kn}) \leq \rho(x, y_k) + \rho(y_k, z_{kn}) < 1/n + 1/n < \varepsilon$. Tím je tvrzení dokázáno.

3. Prostor M všech omezených funkcí $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ se supremovou normou *není separabilní*. Leží v něm totiž množina M_0 všech funkcí f_x, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$, definovaných podmínkami $f_x(x) := 1$, $f_x(t) := 0$ pro všechna $t \neq x$. Protože $x \neq y \Rightarrow \| f_x - f_y \| = 1$, je M_0 *diskrétní* podprostor prostoru M a jeho jedinou hustou částí je *celý* podprostor M_0. Protože je to nespočetná množina, není M_0 separabilní; tím spíše není separabilní prostor M.

4. *Je-li* $X = \bigcup_n X_n$ *a je-li každý ze (spočetně mnoha) prostorů* X_n *separabilní, je separabilní i prostor* X. Je-li totiž Y_n hustá spočetná část prostoru X_n, je $Y := \bigcup_n Y_n$ hustá spočetná část prostoru X.

5. *Existuje-li v* X *podprostor* X_1*, který je hustý v* X *a zároveň separabilní, je i prostor* X *separabilní*; každá množina Y hustá v X_1 je totiž zřejmě hustá i v X. $\square$

Abstraktním Hilbertovým prostorem rozumíme lineární prostor H, v němž je zaveden skalární součin [51]) a který splňuje tyto podmínky:

1. Algebraická dimenze prostoru H je nekonečná.
2. Při metrice ρ generované skalárním součinem je prostor H úplný a separabilní.

Každý *konkrétní* prostor, který tyto podmínky splňuje, se nazývá **realizace** (abstraktního) Hilbertova prostoru.

Důležitý příklad. Z elementů analýzy je nám znám prostor ℓ^2 všech nekonečných posloupností $\{x_n\}$ reálných čísel, pro něž řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konverguje; víme, že je lineární. **Skalární součin** elementů $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ tohoto prostoru a **norma** x jsou definovány rovnostmi

$$(x \cdot y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n , \quad \| x \| := \sqrt{(x \cdot x)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} .$$

Připomeňme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $e_n := \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ (jednička na n-tém místě, na ostatních místech nuly) **jednotkový vektor** n**-té souřadné osy** v ℓ^2; n**-tá souřadná osa** je množina všech násobků vektoru e_n.

Dokažme, že

(2) *prostor* ℓ^2 *je realizací abstraktního Hilbertova prostoru* :

Prostor ℓ^2 *má nekonečnou dimenzi*, protože vektory e_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou lineárně nezávislé.

Dokažme, že *prostor* ℓ^2 *je separabilní*: Protože množina

$$R_p := \{\{x_n\} \in \ell^2;\ x_n = 0 \text{ pro všechna } n > p\}$$

[51]) Skalárním součinem, jehož hodnotu v bodě $(x, y) \in H \times H$ značíme $(x \cdot y)$, se v H generuje automaticky i norma $\| x \| := \sqrt{(x \cdot x)}$ a metrika $\rho(x, y) := \| x - y \|$; připomeňme, že $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow (x_n \cdot y_n) \to (x \cdot y)$, tj. že skalární součin je *spojitý* v $H \times H$, a že *ortogonalita* vektorů $x \in H$, $y \in H$ je definována rovností $(x \cdot y) = 0$.

je pro každé $p \in \mathbb{N}$ izometricky izomorfní s $\mathbb{R}^p$, je separabilní, a totéž tedy platí o množině $R_\omega := \bigcup_{p=1}^\infty R_p$ (sr. s příkladem 4).

Pro každý bod $x = \{x_n\} \in \ell^2$ a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ přitom existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{n=p+1}^\infty x_n^2 \le \varepsilon^2$; bod $y := \{x_1, \dots, x_p, 0, 0, \dots\}$ leží zřejmě v R_ω a $\|x - y\|^2 = \sum_{n=p+1}^\infty x_n^2 \le \varepsilon^2$. Tím je dokázáno, že množina R_ω je hustá v ℓ^2, a důkaz separability ℓ^2 je tím (podle příkladu 5) dokončen.

Dokažme, že *prostor* ℓ^2 *je úplný*: Buď $x^{(m)} = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots\}$ cauchyovská posloupnost bodů z ℓ^2. Protože každá cauchyovská posloupnost je omezená, existuje $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že $\|x^{(m)}\| \le K$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Protože je posloupnost $\{x^{(m)}\}$ cauchyovská a protože nerovnost $|x_n^{(k)} - x_n^{(m)}| \le \|x^{(k)} - x^{(m)}\|$ platí pro každou trojici přirozených čísel n, k, m, je i každá posloupnost $\{x_n^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ (reálných čísel) cauchyovská, tedy konvergentní. Označme $x_n := \lim_{m\to\infty} x_n^{(m)}$ a dokažme, že bod $x := \{x_1, x_2, \dots\}$ je limitou posloupnosti $\{x^{(m)}\}$ v prostoru ℓ^2:

Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ a každé $p \in \mathbb{N}$ je $\sum_{n=1}^p (x_n^{(m)})^2 \le \|x^{(m)}\|^2 \le K^2$ a protože $\sum_{n=1}^p x_n^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^p (x_n^{(m)})^2$, je $\sum_{n=1}^p x_n^2 \le K^2$ pro každé $p \in \mathbb{N}$, a tedy i $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 \le K^2$, takže $x \in \ell^2$.

Buď opět dáno nějaké $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Podle B.C. podmínky existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m > N$ a každé $k > N$ je $\|x^{(m)} - x^{(k)}\|^2 \le \varepsilon^2$; tím spíše platí pro taková m, k a pro každé $p \in \mathbb{N}$ nerovnost $\sum_{n=1}^p |x_n^{(m)} - x_n^{(k)}|^2 \le \varepsilon^2$. Z ní plyne limitním přechodem pro $k \to \infty$ nerovnost $\sum_{n=1}^p |x_n^{(m)} - x_n|^2 \le \varepsilon^2$ a dalším limitním přechodem pro $p \to \infty$ nerovnost $\sum_{n=1}^\infty |x_n^{(m)} - x_n|^2 \le \varepsilon^2$ pro každé $m > N$. Protože součet vlevo je roven $\|x^{(m)} - x\|^2$, je tím dokázáno, že $x^{(m)} \to x$.

Tím je důkaz tvrzení (2) dokončen. $\square$

Množinu všech funkcí f, měřitelných v (měřitelné) množině $M \subset \mathbb{R}^p$, pro něž je

$$\int_M f^2 < +\infty\,, \tag{3}$$

budeme značit $\mathcal{L}^2(M)$. Poznamenejme, že každá funkce $f \in \mathcal{L}^2(M)$ je (podle věty 5.15) *skoro všude* v M konečná, takže každá lineární kombinace funkcí z $\mathcal{L}^2(M)$ je nejen definována, ale také konečná s. v. v M.

Dokažme především, že

$$\mathcal{L}^2(M) \text{ je lineární prostor}\,, \tag{4}$$

což znamená, že spolu s každými dvěma funkcemi patří do $\mathcal{L}^2(M)$ i každá jejich lineární kombinace; protože spolu s funkcí f patří do $\mathcal{L}^2(M)$ zřejmě i každá funkce cf, kde $c \in \mathbb{R}$, obraťme se k součtu dvou funkcí z $\mathcal{L}^2(M)$.

Budeme potřebovat dvě tvrzení:

Věta 7.1. *Pro každé dvě funkce f, g měřitelné v M je*

$$\int_M |fg| \le \sqrt{\int_M f^2} \cdot \sqrt{\int_M g^2}\,. \tag{5}$$

D ů k a z . Je-li některý z integrálů vpravo roven 0, je příslušná funkce rovna 0 s. v. v M, totéž platí o součinu fg, a na obou stranách (5) jsou nuly. Zbývá případ, že oba integrály vpravo – značme je I_f a I_g – jsou kladné; protože případ, že některý z těchto integrálů je roven $+\infty$, je triviální, zbývá případ, že obě funkce f, g leží v $\mathcal{L}^2(M)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že funkce f, g jsou pak konečné *všude* v M.

Uvažme, že pro každá dvě čísla a, b z $\mathbb{R}$ a také pro každé dvě konečné funkce a, b platí nerovnost $|ab| \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Položíme-li v této nerovnosti $a := |f|/\sqrt{I_f}$, $b := |g|/\sqrt{I_g}$, integrujeme-li a násobíme-li výsledek výrazem $\sqrt{I_f I_g}$, dostaneme

$$\int_M |fg| \le \sqrt{I_f I_g} \cdot \Big(\frac{1}{2I_f}\int_M f^2 + \frac{1}{2I_g}\int_M g^2\Big) = \sqrt{I_f I_g}\,.$$

Věta 7.2. *Pro každé dvě funkce f, g měřitelné a skoro všude konečné v M platí nerovnost*

(6) $$\sqrt{\int_M (f+g)^2} \le \sqrt{\int_M f^2} + \sqrt{\int_M g^2}\,.$$

D ů k a z . Je-li vpravo $+\infty$ nebo vlevo 0, je vše zřejmé; zbývá případ, kdy funkce f, g leží v $\mathcal{L}^2(M)$ a integrál vlevo je kladný. Podle věty 7.1 platí nerovnosti

$$\int_M |f|\,|f+g| \le \sqrt{\int_M f^2}\cdot\sqrt{\int_M (f+g)^2}, \quad \int_M |g|\,|f+g| \le \sqrt{\int_M g^2}\cdot\sqrt{\int_M (f+g)^2},$$

a protože $(f+g)^2 = |f+g|\,|f+g| \le |f|\,|f+g| + |g|\,|f+g|$ (podle trojúhelníkové nerovnosti), je

$$\int_M (f+g)^2 \le \int_M |f|\,|f+g| + \int_M |g|\,|f+g| \le \left(\sqrt{\int_M f^2} + \sqrt{\int_M g^2}\right)\cdot\sqrt{\int_M (f+g)^2}\,.$$

Stačí pak již jen dělit poslední odmocninou. Právě dokázaná věta ukazuje, že spolu s f, g patří do $\mathcal{L}^2(M)$ i funkce $f+g$; tím je důkaz tvrzení (4) dokončen. □

Podle (5) je číslo

(7) $$(f\cdot g) := \int_M fg$$

konečné pro každé dvě funkce f, g z $\mathcal{L}^2(M)$, přičemž $(f\cdot f)\ge 0$, $(f\cdot g) = (g\cdot f)$, $(cf\cdot g)$ pro každé $c\in\mathbb{R}$ a $((f+g)\cdot h) = (f\cdot h)+(g\cdot h)$. Jen jediná překážka nám brání prohlásit (7) za skalární součin v $\mathcal{L}^2(M)$: Z podmínky $(f\cdot f) = 0$ *neplyne*, že $f\equiv 0$ v M, ale jen $f = 0$ s. v. v M (viz větu 5.15). Jsou dvě možnosti, jak situaci „napravit“:

1. Prohlásíme, že rovnost na množině $\mathcal{L}^2(M)$ není obvyklá rovnost funkcí (rovnost definičních oborů a rovnost hodnot *v každém bodě* společného definičního oboru), ale rovnost *skoro všude v* M, tj. ekvivalence $\sim$. Znamená to zavést **úmluvu**, podle níž *ztotožníme* dvojice funkcí ekvivalentních v M.

Takový postup se může setkat s (oprávněnými) námitkami z narušení jednoho z nejzákladnějších pojmů teorie funkcí – definice jejich rovnosti. V tom případě nezbývá nic jiného, než postupovat opatrněji:

2. Vytvoříme prostor $\mathcal{O}$ všech funkcí skoro všude v M rovných nule, který je zřejmě lineárním podprostorem prostoru $\mathcal{L}^2(M)$, a pak prostor $\mathcal{L}^2(M)/\mathcal{O}$ všech zbytkových tříd podle tohoto podprostoru. [52]) Je zřejmé, že integrály dvou funkcí z téže třídy jsou rovny, takže lze definovat „integrál třídy“ jakožto společnou hodnotu integrálů všech funkcí z této třídy. Kdybychom chtěli užít tuto metodu, museli bychom i definici prostoru $\mathcal{L}^2(M)$ modifikovat tak, že se ve skutečnosti nejedná o prostor funkcí, ale o prostor zbytkových tříd. □

Obsahově se obě metody neliší. Metoda 2 je bezesporu po logické stránce daleko uspokojivější (zejména proto, že nepotřebuje žádné licence a že je pojmově naprosto přesná), ale v konkrétních situacích je někdy těžkopádná, protože vyžaduje zavedení řady nových symbolů a definic. Přikloníme se proto k metodě 1, ale budeme pamatovat, že *je založena na odlišné definici rovnosti funkcí.* [53])

Rovnost (7) budeme tedy považovat za definici skalárního součinu; číslo

(8) $$\|f\| := \sqrt{\int_M f^2}$$

---

[52]) Dvě funkce f, g z $\mathcal{L}^2(M)$ patří do téže třídy právě tehdy, když jejich rozdíl patří do $\mathcal{O}$, tj. když je $f\sim g$ v M. Protože je tato binární relace zřejmě reflexívní, symetrická a tranzitivní, je to ekvivalence ve smyslu obecné teorie množin. Nulovou třídou je ovšem podprostor $\mathcal{O}$, funkce z tohoto podprostoru mají integrál nulový. Proces vytváření prostoru všech zbytkových tříd je dobře znám z teorie množin i z algebry a stejně dobře je znám způsob, jak se algebraické operace přenesou z původního prostoru na prostor všech tříd; jistě tedy není třeba zabývat se detaily.

[53]) Jarník při své mimořádné pečlivosti zvolil metodu 2, takže čtenář, který by nebyl spokojen s naším postupem, může vše nastudovat v JII. Většina autorů však není tak úzkostlivá a užívá metodu 1.

je pak ovšem **norma** funkce $f \in \mathcal{L}^2(M)$ a **vzdálenost** $\rho(f, g)$ dvou funkcí f, g je rovna $\| f - g \|$. □

V následující větě učiníme další krok v postupu, který nás (aspoň v některých speciálních případech) přivede ke zjištění, že prostor $\mathcal{L}^2(M)$ je realizací abstraktního Hilbertova prostoru.

Věta 7.3. *Prostor $\mathcal{L}^2(M)$ je úplný.*

D ů k a z . Buď dána nějaká cauchyovská posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{L}^2(M)$. Lze předpokládat, že funkce f_n jsou konečné všude v M, a jistě též existuje posloupnost indexů $n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ tak, že $\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \| < 2^{-k}$. Abychom se vyhnuli psaní indexů 2. řádu, položme $g_k := f_{n_k}$; řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_M (g_k - g_{k+1})^2 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$$

pak konverguje. Dokažme, že *posloupnost $\{g_k\}$ konverguje skoro všude v M*:

Protože (každá měřitelná) množina M je sjednocením spočetně mnoha množin konečné míry, stačí tvrzení dokázat za dodatečného předpokladu, že $\mu(M) < +\infty$. Podle věty 7.1 je pak

$$\int_M |g_k - g_{k+1}| \le \sqrt{\int_M 1} \cdot \sqrt{\int_M (g_k - g_{k+1})^2} \le \sqrt{\mu(M)} \cdot \| g_k - g_{k+1} \| \le \frac{\sqrt{\mu(M)}}{2^k}.$$

Z konvergence řady, jejímž k-tým členem je integrál vlevo, však podle věty 5.20 plyne konvergence skoro všude v M řady $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k - g_{k+1}|$; tím spíše tedy konverguje s. v. v M řada $\sum_{k=1}^{\infty}(g_k - g_{k+1})$. To znamená, že s. v. v M existuje konečná $\lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1}(g_k - g_{k+1}) = \lim_{r\to\infty}(g_1 - g_r)$.

Odtud je patrné, že posloupnost funkcí $f_{n_k} = g_k$ má s. v. v M konečnou limitu; označme ji f a dokažme, že $f \in \mathcal{L}^2(M)$. Protože $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost, existuje pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ číslo $N \in \mathbb{N}$ tak, že $n > N$, $m > N \Rightarrow \| f_n - f_m \| \le \varepsilon$; existuje ovšem i $K \in \mathbb{N}$ tak, že $k > K \Rightarrow n_k > N$. Pro každé (pevné) $n > N$ platí tedy nerovnost $\| f_n - g_k \| \le \varepsilon$ pro všechna $k > K$ a podle Fatouova lemmatu tedy je pak

$$\int_M (f_n - f)^2 = \int_M (f_n - \lim_{k\to\infty} g_k)^2 = \int_M \liminf_{k\to\infty} (f_n - g_k)^2 \le \liminf_{k\to\infty} \int_M (f_n - g_k)^2 \le \varepsilon^2. \tag{9}$$

Z toho plyne, že funkce $f_n - f$ leží (pro každé $n > N$) v $\mathcal{L}^2(M)$; protože již víme, že je to lineární prostor, leží v důsledku toho v $\mathcal{L}^2(M)$ i funkce $f = f_n - (f_n - f)$.

Předcházející úvaha nám ukázala, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje N tak, že $n > N \Rightarrow \| f_n - f \|^2 = \int_M (f_n - f)^2 \le \varepsilon^2$; z toho je patrné, že $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$, neboli $f_n \to f$.

Každá cauchyovská posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{L}(M)$ má tedy limitu; věta 7.3 je dokázána. □

Lze *obecně* dokázat, že

(10) *prostor $\mathcal{L}^2(M)$ je pro každou měřitelnou množinu $M \subset \mathbb{R}^p$ separabilní*,

ale nemáme bohužel k dispozici větu, která by nám důkaz dovolila provést. Jedná se o důležité tvrzení z teorie metrických prostorů známé pod názvem

Tietzova věta. *Pro každou spojitou reálnou funkci f definovanou na uzavřené podmnožině Y metrického prostoru X existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$ tak, že $f = F|Y$. Funkci F lze navíc volit tak, že* $\inf F(X) = \inf f(Y)$, $\sup F(X) = \sup f(Y)$.

Čtenář ji najde např. v Jarníkově DII (věta 175). Protože její důkaz nepatří k nejkratším, vyhneme se jí tím, že se při důkazu separability prostoru $\mathcal{L}^2(M)$ omezíme na $p = 1$, tj. na měřitelné množiny $M \subset \mathbb{R}$.

Věta 7.4. *Pro každou měřitelnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ je prostor $\mathcal{L}^2(M)$ separabilní.*

D k a z provedeme tak, že po zjištění, že separabilita obecného prostoru $\mathcal{L}^2(M)$ plyne ze separability prostoru $X_0 := \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, budeme v X_0 postupně konstruovat menší a menší podprostory $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_6$, a to tak, že vždy bude $\overline{X_k} \supset X_{k-1}$. Je zřejmé, že každý z podprostorů X_k bude pak hustý v X_0; protože poslední podprostor X_6 bude spočetný, bude tím separabilita prostoru X_0 dokázána.

(Sr. s příkladem 5 na začátku tohoto oddílu.) U všech funkcí z $\mathcal{L}^2(M)$ můžeme jistě předpokládat, že jsou definovány všude v M, nikoli jen skoro všude.

0. Každé funkci $f \in \mathcal{L}^2(M)$ přiřaďme funkci F_f, která se rovná f v M a nule jinde. Je zřejmé, že toto přiřazení je izometrický izomorfismus $\mathcal{L}^2(M)$ do $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, takže k tomu, abychom dokázali separabilitu $\mathcal{L}^2(M)$, stačí dokázat separabilitu $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = X_0$. (Sr. s příkladem 2 na začátku tohoto oddílu.)

1. Je-li $f \in X_0$, položme $f_n := f$ v intervalu $I^n := \langle -n, n\rangle$, $f_n := 0$ v $\mathbb{R} - I^n$. Pak je zřejmě $f_n \to f$ v $\mathbb{R}$ a f^2 je majorantou z $\mathcal{L}$ všech funkcí $(f_n - f)^2$. Podle Lebesgueovy věty je proto

$$\| f_n - f \|^2 = \int_{\mathbb{R}} (f_n - f)^2 \to 0 \text{ pro } n \to \infty .$$

<u>Résumé 1</u>: *Prostor* $X_1 := \{f \in X_0 ;$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $f = 0$ *v* $\mathbb{R} - I^n\}$ *je hustý v* X_0.

2. Je-li $f \in X_1$, je $f \equiv 0$ vně nějakého intervalu I^k; pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I^k$ položme

$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} -n, & \text{je-li} & f(x) < -n \\ f(x), & \text{je-li} & |f(x)| \le n \\ n, & \text{je-li} & f(x) > n \end{array} \right\};$$

mimo I^k buď $f_n = 0$. Každá z funkcí f_n je pak omezená v $\mathbb{R}$, $f_n \to f$ v $\mathbb{R}$ a f^2 je majorantou z $\mathcal{L}$ všech funkcí $(f_n - f)^2$. Podle Lebesgueovy věty je proto opět $\| f_n - f \| \to 0$.

<u>Résumé 2</u>: *Prostor* X_2 *všech omezených funkcí z* X_1 *je hustý v* X_1.

3. Nechť $f \in X_2$; pak je f měřitelná v $\mathbb{R}$ a existují čísla $k \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že $f \equiv 0$ mimo I^k a $|f| \le K$ všude v $\mathbb{R}$. Podle věty 4.14 existují jednoduché funkce f_n, g_n v I^k tak, že $f_n \nearrow f^+$ a $g_n \nearrow f^-$ v I^k; rozšiřme je nulou na celé $\mathbb{R}$. Pak je zřejmě $h_n := f_n - g_n \to f$ všude v $\mathbb{R}$ a majorantou z $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ všech funkcí $(h_n - f)^2$ je funkce rovná K^2 v I^k a nule mimo I^k. Podle Lebesgueovy věty je tedy $\| h_n - f \| \to 0$.

<u>Résumé 3</u>: *Prostor* X_3 *všech omezených měřitelných funkcí* f, *které jsou rovny* 0 *vně některého z intervalů* I^k *a které nabývají jen konečného počtu hodnot, je hustý v* X_2.

4. Pro každou funkci $f \in X_3$ existuje k tak, že $f \equiv 0$ vně I^k; nic podstatného se nezmění, položíme-li $f(\pm k) := 0$. Jsou-li $a_1 < \cdots < a_q$ právě všechny hodnoty, kterých f nabývá v $(-k, k)$, jsou množiny $M_i := \{x \in (-k, k);\ f(x) = a_i\}$, $1 \le i \le q$, disjunktní a měřitelné, přičemž $\bigcup_{i=1}^q M_i = (-k, k)$. Buď $K \in \mathbb{R}_+$ zvoleno tak, že $|f| \le K$ (v $\mathbb{R}$), a buď dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Podle věty 3.4 existují kompaktní množiny $N_i \subset M_i$ tak, že $\mu(M_i - N_i) < \varepsilon^2/(4K^2 q)$ pro $i = 1, \ldots, q$; položme ještě $N_0 := \{-k\}$, $N_{q+1} := \{k\}$, $N := \bigcup_{i=0}^{q+1} N_i$. Pak je ovšem $I^k - N = \bigcup_{i=1}^q M_i - \bigcup_{i=1}^q N_i \subset \bigcup_{i=1}^q (M_i - N_i)$, takže $\mu\left(I^k - N\right) \le \sum_{i=1}^q \mu(M_i - N_i) < \varepsilon^2/4K^2$.

Restrikce $g := f\,|\,N$ je konstantní na každé z množin N_i (které jsou kompaktní a disjunktní, takže $0 \le i < j \le q \Rightarrow \operatorname{dist}(N_i, N_j) > 0$); na jejich sjednocení N je tedy spojitá. Otevřená množina $I^k - N$ je sjednocením jistého disjunktního spočetného systému otevřených intervalů J_m, jejichž krajní body $a_m < b_m$ leží v N.[54]) Rozšíříme-li funkci g na I^k tím, že ji v každém intervalu $\overline{J_m}$ interpolujeme lineárně (tj. klademe-li tam $g(x) := g(a_m) + (g(b_m) - g(a_m))(x - a_m)/(b_m - a_m)$),[55]) bude spojitá v I^k; protože v bodech $\pm k$ je rovna 0, bude spojitá v celém $\mathbb{R}$, položíme-li ji rovnu 0 v $\mathbb{R} - I^k$. Kromě toho bude $|g| \le K$, tedy i $|f - g| \le 2K$ v celém $\mathbb{R}$.

V důsledku toho je

$$\int_{\mathbb{R}} (f - g)^2 = \int_{I^k - N} (f - g)^2 \le 4K^2 \mu\left(I^k - N\right) < 4K^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{4K^2} = \varepsilon^2 .$$

<u>Résumé 4</u>: *Prostor* X_4 *všech spojitých funkcí* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *které jsou rovny* 0 *mimo jistý interval* I^k, *je hustý v prostoru* X_3.

[54]) Viz např. Jarník DII, věta 69.

[55]) V obecném $\mathbb{R}^p$ bychom na tomto místě potřebovali Tietzovu větu; až čtenář důkaz věty 7.4 dočte, bude mu jistě jasné, že nejen to, co jsme dosud dokázali, ale i všechny další kroky lze snadno modifikovat tak, aby je bylo možné provést i v $\mathbb{R}^p$.

5. Buď $f \in X_4$, takže f je spojitá v $\mathbb{R}$ a rovná 0 mimo jistý interval I^k. Nechť $K \in \mathbb{R}_+$ je zvoleno tak, že $|f| \le K$ všude v $\mathbb{R}$. Označme D_m^k dělení intervalu I^k na m stejně dlouhých intervalů a buď $x_{m,j}^k$ $(= -k + 2kj/m)$ koncový bod j-tého intervalu dělení D_m^k. Položme funkci g_m rovnu $f(x_{m,j}^k)$ v $(x_{m,j-1}^k, x_{m,j}^k)$ pro $j = 1, \ldots, m$ a rovnu 0 všude jinde. Ze stejnoměrné spojitosti funkce f v I^k plyne, že pak $g_m \to f$ pro $m \to \infty$ s. v. v $\mathbb{R}$ (všude, až snad na dělicí body všech dělení D_m^k), přičemž mimo I^k je $g_m = f = 0$ a v I^k platí nerovnost $|g_m| \le K$ v I^k, tedy i nerovnost $(f - g_m)^2 \le 4K^2 \in \mathcal{L}(I^k)$. Aplikací Lebesgueovy věty dostaneme:

$$\int_{\mathbb{R}} (f - g_m)^2 = \int_{I^k} (f - g_m)^2 \to 0 \text{ pro } m \to \infty .$$

Résumé 5: *Prostor X_5 všech funkcí f, k nimž existuje $k \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{N}$ tak, že f je konstantní v každém otevřeném intervalu dělení D_m^k a rovná 0 všude jinde, je hustá v prostoru X_4.* [56])

6. Nechť $f \in X_5$, takže existuje interval I^k a jeho dělení D_m^k tak, že f je konstantní v každém otevřeném intervalu Δ_j tohoto dělení a všude jinde je rovna 0; nechť c_j je její hodnota v Δ_j a nechť $K \in \mathbb{R}_+$ je zvoleno tak, že $|f| \le K$ všude v $\mathbb{R}$. Je-li dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, zvolme racionální čísla d_j tak, že pro každé $j = 1, \ldots, m$ je $|c_j - d_j| < \varepsilon/\sqrt{2k+1}$, a položme $g := d_j$ v Δ_j pro $j = 1, \ldots, m$ a $g := 0$ všude jinde. Pak je

$$\int_{\mathbb{R}} (f-g)^2 = \int_{I^k} (f-g)^2 = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Delta_j} (c_j - d_j)^2 \le \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon^2 \mu(\Delta_j)}{2k+1} = \varepsilon^2 \frac{2k}{2k+1} < \varepsilon^2 .$$

Résumé 6: *Prostor X_6 všech funkcí f, k nimž existuje interval I^k a jeho dělení D_m^k tak, že f je v každém otevřeném intervalu dělení D_m^k rovno nějakému racionálnímu číslu a všude jinde je nulová, je hustý v prostoru X_5.*

Intervalů I^k je spočetně mnoho, každému z nich je přiřazena posloupnost dělení D_m^k, každé dělení dělí I^k jen na konečný počet intervalů a pro každý z těchto intervalů lze volit hodnotu funkce $f \in X_6$ jen spočetně mnoha způsoby. Z toho je patrné, že prostor X_6 je spočetný. Věta 7.4 je dokázána. $\square$

Zbývá odpovědět na otázku, zdali je prostor $\mathcal{L}^2(M)$ nekonečnědimenzionální; to jistě *není* pravda v případě, že $\mu(M) = 0$, protože pak se tento prostor redukuje na nulovou funkci a má dimenzi 0. Jinak je však odpověď kladná:

Věta 7.5. *Je-li $M \subset \mathbb{R}^p$ množina kladné míry, má prostor $\mathcal{L}^2(M)$ nekonečnou algebraickou dimenzi.*

D ů k a z . Máme dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje v $\mathcal{L}^2(M)$ (aspoň) n lineárně nezávislých funkcí. Buď tedy $n \in \mathbb{N}$ dáno, zvolme $\delta \in \mathbb{R}_+$ tak, že $n\delta^p \le \mu(M)$, a srovnejme δ-síť krychlí v $\mathbb{R}^p$ do prosté posloupnosti $\mathcal{S} = \{K_j\}_{j=1}^{\infty}$. Protože $\mu(K_j) = \delta^p$ pro každé j a protože $\mu(M) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M \cap K_j)$, je mezi sčítanci v posledním součtu aspoň n kladných; protože na očíslování krychlí nezáleží, lze předpokládat, že kladnou míru mají množiny $M \cap K_j$, kde $1 \le j \le n$, a tedy i disjunktní množiny $M_j := M \cap \operatorname{int} K_j$. Protože tyto množiny jsou omezené, leží jejich charakteristické funkce f_j v $\mathcal{L}^2(M)$.

Funkce f_j jsou lineárně nezávislé, protože z identity $0 = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ (s. v. v $\mathbb{R}^p$) plyne pro každé $i = 1, \ldots, n$ identita $0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{M_i} f_j = c_i \mu(M_i)$, tedy rovnost $c_i = 0$. $\square$

Shrneme-li výsledky dokázané v tvrzení (4) a ve větách 7.3 – 7.5, vidíme, že platí

Věta 7.6. *Pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}$ kladné míry je prostor $\mathcal{L}^2(M)$ realizací abstraktního Hilbertova prostoru.*

[56]) Čtenář, který došel až na toto místo důkazu, jistě zpozoroval, že jsme v podstatě dokázali větu o aproximaci Lebesgueova integrálu ze spojité funkce přes kompaktní interval konečnými součty tvaru $\sum_m f(\xi_m)(x_m - x_{m-1})$. Toto tvrzení nemá nic společného s Tietzovou větou a dá se analogickou metodou dokázat i pro (kompaktní) p-rozměrné intervaly. Jsou tedy zcela mylné představy některých horlivých zastánců Riemannova integrálu, že „Lebesgueův integrál nesouvisí s konečnými „riemannovskými“ součty, které nutně potřebujeme“. Tento pseudoargument svědčí jen o neznalosti teorie integrálu obecně a teorie Lebesgueova integrálu zvlášť: Každý integrál – Newtonův, Riemannův, Lebesgueův, Perronův, Kurzweilův, atd. – *ze spojité funkce přes kompaktní interval* má totiž tuto vlastnost, protože integrály podle všech těchto definic pak existují a mají touž hodnotu. Bylo by skutečně na čase opustit již zastaralý Riemannův integrál s jeho velice nepříjemnými vlastnostmi a začít „v teorii“ užívat (více než sto let starý) integrál Lebesgueův a „v početní praxi“ integrál Newtonův.

Tušíme též, že tvrzení platí sice i za obecnějšího předpokladu $M \subset \mathbb{R}^p$, ale že k provedení důkazu bychom potřebovali Tietzovu větu. $\square$

Ortogonálním systémem v (abstraktním) Hilbertově prostoru H rozumíme každou nekonečnou posloupnost *nenulových* a navzájem ortogonálních elementů tohoto prostoru. Mají-li všechny prvky ortogonálního systému normu rovnou 1, mluvíme o **ortonormálním systému** v H.

Poznamenejme, že *z každého ortogonálního systému lze vytvořit systém ortonormální tím, že každý element systému dělíme jeho normou.*

Ortogonální systém $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ v H je nazývá **úplný**, je-li jediným vektorem ortogonálním ke všem vektorům f_n vektor nulový. (Každý vektor f_n určuje v H jistou osu souřadnou; úplnost systému $\{f_n\}$ znamená, že k těmto osám již nelze přidat žádnou další osu ke všem z nich kolmou.)

Příkladem úplného ortonormálního systému v prostoru ℓ^2 je systém složený ze všech jednotkových vektorů e_n souřadných os. Je-li totiž $x = \{x_n\} \in \ell^2$, je $(x \cdot e_n) = x_n$; jsou-li všechny tyto skalární součiny nulové, je $x = 0$. $\square$

Trigonometrický systém se skládá z funkcí

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots \tag{12}$$

a je příkladem ortogonálního systému v $\mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$, protože všechny skalární součiny

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx,\ \text{ kde } n \in \mathbb{N},\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx,\ \text{ kde } n \neq m, \tag{13}$$

jsou – jak se snadno ověří – nulové. Systém však *není* ortonormální, protože čtverce norem jsou

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi \ \text{ a } \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi \ \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Lze však ukázat, že *trigonometrický systém je úplný*; důkaz viz Jarníkův JII, věta 187. $\square$

Jedním z nejdůležitějších problémů týkajících se ortogonálních systémů je otázka *nejlepší aproximace elementů $f \in H$ lineárními kombinacemi prvků tohoto systému*:

Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém v H a nechť $f \in H$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a při každé volbě konstant $c_1, \ldots, c_n$ je pak (v důsledku ortogonality)

$$\begin{aligned} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \Big\|^2 &= \Big(\Big(f - \sum_{j=1}^{n} c_j f_j\Big) \cdot \Big(f - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k\Big)\Big) \\ &= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k\,(f \cdot f_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k^2\,\|f_k\|^2 \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \Big(c_k\,\|f_k\| - \frac{(f \cdot f_k)}{\|f_k\|}\Big)^2 - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{(f \cdot f_k)}{\|f_k\|}\Big)^2; \end{aligned} \tag{15}$$

z toho je patrné, že nejlepší aproximací bude lineární kombinace s koeficienty

$$c_k := \frac{(f \cdot f_k)}{\|f_k\|^2}, \tag{16}$$

což jsou tzv. **Fourierovy koeficienty** vektoru f v daném ortogonálním systému $\{f_k\}$. Dosadíme-li je do (15), získáme rovnost

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f \cdot f_k)}{\|f_k\|^2} f_k \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{(f \cdot f_k)}{\|f_k\|}\Big)^2. \tag{17}$$

Tyto relace mají velmi jednoduchý geometrický význam: Při pevném $n \in \mathbb{N}$ utvoříme lineární obal $\mathcal{O}_n$ elementů $f_1, \ldots, f_n$, což je jistý n-rozměrný lineární podprostor (nekonečněrozměrného) prostoru H. Nejblíže k danému $f \in H$ je v tomto podprostoru *ortogonální průmět*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|^2} f_k \tag{18}$$

vektoru f do $\mathcal{O}_n$; o tom, že *vektor*

$$f - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|^2} f_k \tag{19}$$

je ortogonální ke všem vektorům $f_1, \dots, f_n$ se snadno přesvědčíme tím, že vypočteme příslušné skalární součiny.

Protože číslo (17) je nezáporné, platí *vždy* (tj. pro každý ortogonální systém, každý vektor f a každé $n \in \mathbb{N}$) nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|} \right)^2 \le \| f \|^2 , \tag{20}$$

a z ní limitním přechodem pro $n \to \infty$ vyplývající tzv. **Besselova nerovnost**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|} \right)^2 \le \| f \|^2 ; \tag{21}$$

řada vlevo je tedy vždy konvergentní.

V každém normovaném lineárním prostoru X lze mluvit o **konvergenci podle normy řad** elementů $a_k \in X$: Utvoříme částečné součty $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ a za **součet řady** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ prohlásíme vektor $s \in X$, pro který je $\| s_n - s \| \to 0$ pro $n \to \infty$. Je-li prostor X navíc *úplný*, platí i příslušná **B.C. podmínka konvergence**:

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje právě tehdy, když pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* N *tak, že*

$$n > N,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right\| < \varepsilon . \tag{22}$$

Vše, co jsme právě řekli, lze ovšem aplikovat na Hilbertův prostor. Ze (17) je patrné, že *rovnost*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|^2} f_k \tag{23}$$

platí právě tehdy, když místo Besselovy nerovnosti platí tzv. **Parsevalova rovnost**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|} \right)^2 = \| f \|^2 . \tag{24}$$

Řada na pravé straně (23) se nazývá **Fourierova řada** vektoru f v (daném ortogonálním) systému $\{f_n\}$; *konverguje vždy*, neboť z rovnosti

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|^2} f_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|} \right)^2$$

a z konvergence řady na levé straně (21) je patrná platnost B.C. podmínky.

Utvořením příslušných skalárních součinů se snadno přesvědčíme, že *vektor*

$$f - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f \cdot f_k)}{\| f_k \|^2} f_k \tag{25}$$

je vždy ortogonální ke všem vektorům f_k. *Pokud je tedy systém vektorů* f_k *úplný, je vektor* (25) *nulový, takže* (*každý*) *vektor* $f \in H$ *je pak součtem své Fourierovy řady.*

Dále: Platí-li (23), leží f jistě v uzávěru lineárního obalu $\mathcal{O}$ všech vektorů f_k. Nechť je obráceně $f \in \overline{\mathcal{O}}$; pak je $f = \lim_{m\to\infty} g_m$ pro vhodně zvolené vektory $g_m \in \mathcal{O}$. Každé g_m leží v jistém $\mathcal{O}_{n_m}$ a – vzhledem k tomu, že je posloupnost $\{\mathcal{O}_n\}$ rostoucí – lze předpokládat, že i posloupnost $\{n_m\}$ roste. Nechť s_m znamená n_m-tý částečný součet Fourierovy řady vektoru f. Protože s_m je *nejlepší* aproximací f v $\mathcal{O}_{n_m}$, je $\| f - s_m \| \le \| f - g_m \|$; protože $\| f - g_m \| \to 0$, je $s_m \to f$, takže f je součtem své Fourierovy řady.

Následující věta shrnuje některé z právě dokázaných výsledků.

Věta 7.7. *Nechť $\{f_k\}$ je ortogonální systém v Hilbertově prostoru H. Pak platí:*

1. *Fourierova řada každého vektoru $f \in H$ konverguje, přičemž rozdíl* (25) *je ortogonální ke všem vektorům f_k.*

2. *Pro každý vektor $f \in H$ platí Besselova nerovnost; Parsevalova rovnost platí právě tehdy, když se f rovná součtu své Fourierovy řady, a také právě tehdy, když f leží v uzávěru $\overline{\mathcal{O}}$ lineárního obalu $\mathcal{O}$ všech vektorů f_k.*

3. *Systém $\{f_k\}$ je úplný právě tehdy, když je splněna některá z těchto vzájemně ekvivalentních podmínek:*
   a) *Každý vektor f je součtem své Fourierovy řady.*
   b) *Pro každý vektor f platí Parsevalova rovnost.*
   c) *Lineární obal $\mathcal{O}$ všech vektorů f_k je hustý v H.*

Poznámka. Geometrický význam Parsevalovy rovnosti je nejlépe patrný v případě ortonormálních systémů: Vektor f je rozložen na složky $(f \cdot f_k) f_k$; leží-li v uzávěru lineárního obalu vektorů f_k, je čtverec $\| f \|^2$ délky vektoru f roven součtu $\sum_{k=1}^{\infty} (f \cdot f_k)^2$ čtverců délek všech složek. Je-li systém úplný (tj. není-li v H možné k osám určeným vektory f_k přidat žádnou další osu, k nim všem ortogonální), platí rovnost $\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f \cdot f_k)^2$ pro *každý* vektor f.

Z toho je patrné, že *Parsevalova rovnost je zobecněním Pythagorovy věty na nekonečněrozměrný prostor H, v němž je dán „úplný systém os souřadných“.* □

Velmi důležitá je pro teorii ortogonálních systémů tato existenční věta:

Věta 7.8. *V každém Hilbertově prostoru existují úplné ortonormální systémy.*

V důkazu budeme potřebovat toto

Lemma. *Každý konečněrozměrný* (*lineární*) *podprostor X prostoru H je uzavřený v H.*

D k a z lemmatu. Jak je známo z algebry (a jak ostatně uvidíme i v důkazu věty 7.8), existují v X ortonormální báze; nechť $\xi_1, \dots, \xi_q$ je takovou bází. Máme dokázat, že pro každou posloupnost vektorů $x_n \in X$, která v H konverguje, je $\lim x_n \in X$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují čísla $c_{nj} \in \mathbb{R}$ tak, že $x_n = \sum_{j=1}^{q} c_{nj} \xi_j$. Protože posloupnost $\{x_n\}$ konverguje, je cauchyovská, takže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje N tak, že $n > N$, $m > N \Rightarrow \| x_n - x_m \| < \varepsilon$. Z relací

$$\| x_n - x_m \|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{q} (c_{nj} - c_{mj}) \xi_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{q} (c_{nj} - c_{mj})^2 \ge (c_{nj} - c_{mj})^2$$

platných pro každé $j = 1, \dots, q$ je patrné, že každá posloupnost $\{c_{nj}\}_{n=1}^{\infty}$ je též cauchyovská, tedy konvergentní. Označíme-li $c_j := \lim_{n\to\infty} c_{nj}$, je $x := \sum_{j=1}^{q} c_j \xi_j \in X$ a

$$\| x_n - x \|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{q} (c_{nj} - c_j) \xi_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{q} (c_{nj} - c_j)^2 \to 0\,;$$

tím je lemma dokázáno. □

D k a z věty 7.8. Prostor H má podle předpokladu hustou spočetnou část; nechť ji tvoří vektory F_n, $n \in \mathbb{N}$. Značme $\mathcal{O}(u, v, w, \dots)$ lineární obal všech vektorů napsaných v závorce za symbolem $\mathcal{O}$. Protože samy vektory F_n tvoří hustou část prostoru H, platí to tím spíše o jejich lineárním obalu $\mathcal{O}_\omega$.

Buď n_1 nejmenší přirozené číslo, pro něž je $F_{n_1} \ne 0$; pak je ovšem $\mathcal{O}_1 := \mathcal{O}(F_{n_1}) = \mathcal{O}(F_1, \dots, F_{n_1})$. Jsou-li již pro některé $k \in \mathbb{N}$ sestrojena přirozená čísla $n_1 < \dots < n_k$ tak, že vektory $F_{n_1}, \dots, F_{n_k}$

jsou lineárně nezávislé a že $\mathcal{O}_k := \mathcal{O}(F_{n_1}, F_{n_2}, \dots, F_{n_k}) = \mathcal{O}(F_1, F_2, \dots, F_{n_k})$, definujme n_{k+1} jako nejmenší přirozené číslo větší než n_k, pro něž vektor $F_{n_{k+1}}$ nepatří do $\mathcal{O}_k$. Takový vektor existuje, protože prostor $\mathcal{O}_k$ má (konečnou) dimenzi k, je proto podle lemmatu uzavřený, tj. rovný svému uzávěru, a nemůže tedy obsahovat všechny vektory F_n, protože uzávěr jejich lineárního obalu je nekonečnědimenzionální prostor H.

Je zřejmé, že právě popsaná konstrukce vede k nekonečné posloupnosti čísel $n_1 < \dots < n_k < \dots$, která mají tu vlastnost, že lineární obal všech vektorů $G_j := F_{n_j}$, kde $1 \le j \le k$, je roven $\mathcal{O}_k$, takže lineární obal *všech* vektorů G_k splývá s lineárním obalem $\mathcal{O}_\omega$ všech vektorů F_n; vektory G_k jsou však navíc lineárně nezávislé.

Položíme-li $f_1 := G_1 / \| G_1 \|$, je $\| f_1 \| = 1$ a $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}_1$; předpokládejme, že jsou pro některé k sestrojeny jednotkové, navzájem ortogonální vektory $f_1, \dots, f_k$ tak, že $\mathcal{O}(f_1, \dots, f_k) = \mathcal{O}_k$. Položme

$$f^*_{k+1} := G_{k+1} - a_1 f_1 - \dots - a_k f_k \tag{26}$$

a koeficienty a_j zvolme tak, aby platily rovnosti

$$\left(f^*_{k+1} \cdot f_j \right) = \left(G_{k+1} \cdot f_j \right) - a_j \left(f_j \cdot f_j \right) = \left(G_{k+1} \cdot f_j \right) - a_j = 0 \text{ pro každé } j = 1, \dots, k. \tag{27}$$

Volba $a_j := \left(G_{k+1} \cdot f_j \right)$ zaručuje vzájemnou ortogonalitu všech vektorů $f_1, \dots, f_k, f^*_{k+1}$; tato podmínka zůstane zachována, nahradíme-li poslední vektor jednotkovým vektorem $f_{k+1} := f^*_{k+1} / \left\| f^*_{k+1} \right\|$. Rovnost $\mathcal{O}(f_1, \dots, f_k, f_{k+1}) = \mathcal{O}_{k+1}$ je jistě zřejmá. Jistě je též zřejmé, že posloupnost vektorů f_k, získaná právě provedenou indukcí, je hledaným úplným ortonormálním systémem. $\square$

Algoritmus, kterým se v právě provedeném důkazu z husté spočetné části vytvořil úplný ortonormální systém, vypadá celkem jednoduše, zejména pokud bychom vyšli z posloupnosti $\{G_k\}$ *lineárně nezávislých* vektorů, jejichž lineární obal je hustý v H. Pak totiž stačí ortogonalizovat a – pokud by měl být výsledkem ortonormální systém – ještě dělit výsledky příslušnými normami. (Zdánlivě) jednoduchý a přitom užitečný příklad nám ukáže, jaký může být rozdíl mezi (jednoduchou) teorií a (někdy dosti svízelnou) praxí. Nejdříve tedy *teorie*:

Věta 7.9. *Množina všech polynomů je hustá v každém prostoru $\mathcal{L}^2(\langle a, b \rangle)$, kde $-\infty < a < b < +\infty$.*

D ů k a z . Z résumé 4 v důkazu věty 7.4 snadno plyne, že množina C všech spojitých funkcí $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ je hustá v $\mathcal{L}^2(\langle a, b \rangle)$; stačí proto dokázat, že množina všech polynomů je hustá v C.

Z Weierstrassovy věty, kterou čtenář najde v dodatku k tomuto oddílu,[57]) však plyne, že pro každé $f \in C$ a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje polynom g tak, že $| f - g | < \varepsilon / \sqrt{b - a}$ všude v $\langle a, b \rangle$; čtverec vzdálenosti funkcí f, g v metrice prostoru $\mathcal{L}^2(\langle a, b \rangle)$ je pak roven

$$\| f - g \|^2 = \int_a^b (f - g)^2 \le \frac{\varepsilon^2}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon^2 .$$

Tím je hustota množiny všech polynomů v C dokázána[58]) a podle věty 7.8 tedy v $\mathcal{L}^2(\langle a, b \rangle)$ *existuje* úplný ortogonální systém polynomů. $\square$

Nyní k jeho *praktickému nalezení*: Protože množina všech polynomů je lineární obal všech celočíselných mocnin Id^n s nezáporným exponentem n, stačilo by posloupnost $\{\mathrm{Id}^n\}_{n=0}^\infty$ ortogonalizovat postupem vysvětleným v důkazu věty 7.8. Přitom bychom uvážili, že funkce Id^n jsou lineárně nezávislé a že pokud dovedeme ortogonalizační postup uskutečnit např. v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, je již velmi snadné najít ortogonální systém v obecném intervalu $\langle a, b \rangle$: Je-li f_n (pro každé $n \ge 0$) polynom stupně n a tvoří-li polynomy f_n úplný ortogonální systém v $\mathcal{L}^2(\langle -1, 1 \rangle)$, tvoří polynomy $g_n(x) := f_n((x - a)/(b - a))$ úplný ortogonální systém v $\mathcal{L}^2(\langle a, b \rangle)$, přičemž g_n má opět stupeň n.

Předpokládejme tedy, že $\langle a, b \rangle = \langle -1, 1 \rangle$; tím se ortogonalizace mocnin Id^n trochu zjednoduší. Nebudeme-li trvat na jednotkových normách, můžeme položit $f_0 := 1$, $f_1 = \mathrm{Id}$, protože $\int_{-1}^1 f_0 f_1 =$

[57]) Zařadili jsme ji do dodatku, abychom nenarušovali souvislost výkladu soustřeďujícího se v tomto oddílu hlavně na ortogonální systémy v Hilbertových prostorech. Weierstrassova věta se všeobecně počítá mezi *nejzávažnější tvrzení* analýzy, a to jak pro svou značnou teoretickou cenu, tak i proto, že hraje podstatnou roli v celé řadě důležitých aplikací.

[58]) Všimněme si, že podle Weierstrassovy věty je množina všech polynomů hustá v C při *supremové normě*, zatímco ve větě 7.9 jde o hustotu při *normě prostoru* $\mathcal{L}^2(\langle a, b \rangle)$. Jak je patrné z krátkého důkazu věty 7.9, je první podmínka podstatně silnější než podmínka druhá.

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$. Polynom $f_2(x) = x^2 - a - bx$ má splňovat podmínky $0 = (f_2 \cdot f_0) = \int_{-1}^{1}(x^2 - a)\,dx = 2(\frac{1}{3} - a)$, $0 = (f_2 \cdot f_1) = -b\int_{-1}^{1} x^2\,dx = -\frac{2}{3}b$,[59]), takže lze klást $f_2(x) := x^2 - \frac{1}{3}$. K určení koeficientů polynomu $f_3(x) = x^3 - A - Bx - Cx^2$ bychom museli spočítat tři integrály; vyšlo by $f_3(x) := x^3 - \frac{3}{5}x$, atd. Bohužel není vůbec jasné, jak bychom měli získat *všechny* polynomy f_n; na první pohled není totiž patrná žádná závislost (rekurentní vztah) mezi koeficienty polynomu f_n a koeficienty polynomů $f_0, \ldots, f_{n-1}$. Tato cesta se tedy jeví jako neschůdná.

K cíli, jak se ukáže, vede tato myšlenka: Položíme $f_0 := 1$; pro každé $n \in \mathbb{N}$ má mít polynom f_n stupeň n a má být ortogonální ke všech polynomům stupňů menších. Protože každý polynom stupně n je n-tou derivací nějakého polynomu g_n stupně $2n$, pišme $f_n = g_n^{(n)}$ a ptejme se, jak máme zvolit polynomy g_n. Protože má být $(f_n \cdot h) = 0$ pro každý polynom h stupně menšího než n, napišme příslušný integrál a integrujme celkem n-krát per partes:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f_n h = \int_{-1}^{1} g_n^{(n)} h &= \Big[g_n^{(n-1)}(x)h(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g_n^{(n-1)} h' \\
&= \Big[g_n^{(n-1)}(x)h(x) - g_n^{(n-2)}(x)h'(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g_n^{(n-2)} h'' = \cdots \\
&= \Big[g_n^{(n-1)}(x)h(x) - g_n^{(n-2)}(x)h'(x) + \cdots + (-1)^{n-1} g_n h^{(n-1)}\Big]_{-1}^{1};
\end{aligned}
\tag{28}
$$

vzali jsme přitom v úvahu, že $\int_{-1}^{1} g_n h^{(n)}\,dx = 0$, protože $h^{(n)} \equiv 0$. Výraz za posledním rovnítkem v (28) bude přitom (pro každý polynom h) roven 0, bude-li mít polynom g_n v bodech ± 1 kořeny násobnosti n; vzhledem k tomu, že g_n má mít stupeň $2n$, určuje jej tato podmínka jednoznačně až na multiplikativní konstantu: Musí být $g_n(x) = A_n (x^2 - 1)^n$, kde $A_n \neq 0$. Pak tvoří polynomy

$$
f_n(x) := A_n \left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n)} \quad (\text{kde } \ n \geq 0)
\tag{29}
$$

úplný ortogonální systém v $\mathcal{L}^2(\langle -1, 1\rangle)$; f_n má stupeň n a vhodnou volbou čísel A_n lze dosáhnout např. toho, že koeficient u mocniny x^n v $f_n(x)$ je roven 1, nebo že $\| f_n \| = 1$.

To je sice již dosti uspokojivý výsledek, ale koeficienty polynomu f_n bychom zatím museli pro každé n počítat zvlášť, přičemž výpočet by asi vzhledem k nutnosti n-krát derivovat nepatřil k nejpřehlednějším. Hledejme proto nějaký *rekurentní vztah* mezi polynomy f_n. Dokažme především toto

Lemma. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují (konečná reálná) čísla $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ tak, že*

$$
\alpha_n f_{n+1}(x) = (x + \beta_n) f_n(x) + \gamma_n f_{n-1}(x).
\tag{30}
$$

D ů k a z . Znamená-li λ_n (pro každé $n \geq 0$) koeficient u mocniny x^n v $f_n(x)$, je

$$
\frac{f_{n+1}(x)}{\lambda_{n+1}} - x\,\frac{f_n(x)}{\lambda_n} = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i(x)
\tag{31}
$$

pro vhodná $c_i \in \mathbb{R}$, protože polynom vlevo má stupeň nejvýše rovný n. Je-li $n > 1$, utvořme na obou stranách (31) skalární součiny s polynomy f_k, kde $0 \leq k \leq n-2$. Vzhledem k ortogonalitě dostaneme vlevo nulu, vpravo $c_k (f_k \cdot f_k)$, takže $c_0 = \cdots = c_{n-2} = 0$. Platí tedy identita tvaru

$$
\frac{f_{n+1}(x)}{\lambda_{n+1}} - x\,\frac{f_n(x)}{\lambda_n} = c_n f_n(x) + c_{n-1} f_{n-1}(x);
\tag{31'}
$$

pro $n = 1$ je (31′) totéž co (31). Násobíme-li (31′) číslem λ_n a položíme-li $\alpha_n := \lambda_n/\lambda_{n+1}$, $\beta_n := \lambda_n c_n$, $\gamma_n := \lambda_n c_{n-1}$, dostaneme (30). $\square$

Lemma je dokázáno, ale zbývá najít čísla $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$: Protože podle binomické věty je $(x^2 - 1)^n = x^{2n} - nx^{2n-2} + \cdots$, plyne z (29), že

$$
f_n(x) = A_n\big((2n)(2n-1)\cdots(n+1)\,x^n - n(2n-2)(2n-3)\cdots(n-1)\,x^{n-2} + \ldots\big),
$$

[59]) Liché mocniny nepíšeme, protože mají integrál rovný 0.

což lze napsat i ve tvaru

$$f_n(x) = A_n\Big(\frac{(2n)!}{n!}\,x^n - n\frac{(2n-2)!}{(n-2)!}\,x^{n-2} + \ldots\Big)\,. \tag{32}$$

Jak je patrné, je polynom f_n pro každé liché (sudé) n lineární kombinací lichých (sudých) mocnin identity; z toho plyne, že v identitě (30) je $\beta_n = 0$. Dosadíme-li do (30) podle (32), lze koeficienty α_n, γ_n získat porovnáním koeficientů u mocnin x^{n+1} a x^{n-1}: Relace

$$\alpha_n A_{n+1}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = A_n\frac{(2n)!}{n!} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = \frac{A_n}{A_{n+1}}\frac{1}{2\,(2n+1)} \tag{33a}$$

získáme porovnáním koeficientů u x^{n+1}; porovnáním koeficientů u x^{n-1} dostaneme rovnost

$$\alpha_n A_{n+1}(n+1)\frac{(2n)!}{(n-1)!} = nA_n\frac{(2n-2)!}{(n-2)!} + \gamma_n A_{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\,,$$

tedy – po dosazení vypočtené hodnoty α_n a po úpravě – rovnost

$$\gamma_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{2n^2}{2n+1}\,. \tag{33b}$$

Dosadíme-li tyto výsledky do (30), převedeme-li vše na jednu stranu a násobíme-li výrazem $2\,(2n+1)$, dostaneme rekurentní vztah

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}f_{n+1}(x) - 2\,(2n+1)\,x\,f_n(x) + 4n^2\frac{A_n}{A_{n-1}}f_{n-1}(x) = 0\,, \tag{34}$$

který bude zvláště jednoduchý, rozhodneme-li se položit

$$A_n := \frac{1}{2^n n!}\,; \tag{35}$$

pak totiž přejde identita (34) v rekurentní vztah

$$(n+1)\,f_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,f_n(x) + nf_{n-1}(x) = 0\,. \tag{36}$$

Poznamenejme, že při volbě (35) čísel A_n jsou f_n tzv. **Legendrovy polynomy**. [60])

Polynomy f_0, f_1 najdeme z definice (29), další počítáme pomocí (36); bez obtíží zjistíme, že

$$f_0(x) \equiv 1\,,\ f_1(x) = x\,, f_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\,,\ f_3(x) = \tfrac{1}{2}\,x\,(5x^2-3)\,,$$
$$f_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,,\ f_5(x) = \tfrac{1}{8}\,x\,(63x^4 - 70x^2 + 15)\,,\quad \text{atd.}$$

Jak vidíme, cesta k numerickému výpočtu polynomů, které vzniknou ortogonalizací posloupnosti $\{\mathrm{Id}^n\}_{n=0}^{\infty}$, byla dosti dlouhá a úspěch byl založen i na několika ne zcela triviálních obratech. Poznamenejme ještě, že volba koeficientů (35) má za následek, že

$$f_n(1) = 1 \ \text{ a } \ f_n(-1) = (-1)^n \ \textit{ pro všechna celá čísla } \ n \geq 0\,; \tag{37}$$

plyne to z (36) snadnou indukcí (kterou přenecháváme čtenáři). Méně snadné je dokázat, že

$$|\,f_n\,| \leq 1 \ \textit{ všude v } \langle -1, 1\rangle \textit{ a pro všechna celá čísla } \ n \geq 0\,; \tag{38}$$

je to provedeno v Jarníkově JII (věta 215).

Dokažme však ještě, že

(39) *Legendrův polynom f_n má (pro každé $n \geq 0$) v $\langle -1, 1\rangle$ právě n různých kořenů* ;

[60]) Adrien Marie Legendre (1752 – 1833): francouzský matematik, po němž je pojmenována i diferenciální rovnice $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha\,(\alpha+1)y = 0$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$; je-li $\alpha = n \geq 0$ celé číslo, vyhovuje jí Legendrův polynom $f_n(x)$.

jsou tedy všechny jednoduché a mimo interval $(-1,1)$ polynom f_n žádné kořeny nemá.

D ů k a z . Protože pro $n = 0$ je tvrzení triviální, buď $n \in \mathbb{N}$ a nechť $x_1 < \cdots < x_p$ jsou všechny kořeny funkce f_n v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ mající lichou násobnost. Položme

$$g(x) := \prod_{k=1}^{p} (x - x_k)\,,$$

kde v případě $p = 0$ je pravá strana definována jako 1. Polynom $f_n g$ má pak v $\langle -1,1\rangle$ jen kořeny sudé násobnosti, takže je tam buď všude nezáporný nebo všude nekladný. Protože to není nulový polynom, je v důsledku toho $\int_{-1}^{1} f_n g \neq 0$. Z toho však plyne, že $p = n$, neboť v případě $p < n$ by polynom g byl ortogonální k f_n a právě napsaný integrál by byl nulový.

Tím je tvrzení (39) dokázáno. $\square$

Poslední věta tohoto krátkého exkursu do teorie ortogonálních systémů má nesmírný význam, a to nejen pro matematiku samou, ale např. i pro fyziku.

Věta 7.10. *Každé dva Hilbertovy prostory jsou izometricky izomorfní.*

S p e c i á l n ě : Každý Hilbertův prostor je izometricky izomorfní s prostorem ℓ^2.

D ů k a z . Stačí dokázat speciálnější část věty, protože dva prostory izometricky izomorfní s ℓ^2 jsou i navzájem izometricky izomorfní.

Buď tedy H Hilbertův prostor; zvolme v něm pevně nějaký úplný ortonormální systém $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pro každé $f \in H$ definujme $\Phi(f)$ jako nekonečnou posloupnost, jejímž k-tým členem je skalární součin $(f \cdot f_k)$, a ukažme, že Φ je hledané izometrické izomorfní zobrazení H na ℓ^2.

Protože f_k jsou nyní jednotkové vektory, má konvergentní řada v (24) členy $(f \cdot f_k)^2$; z toho plyne, že $\Phi(f) \in \ell^2$, a to pro každé $f \in H$. Z rovnosti (24), kterou lze nyní napsat ve tvaru $\|\Phi(f)\|^2 = \|f\|^2$, je zároveň patrné, že zobrazení Φ je izometrické.

Z vlastností skalárního součinu je zřejmé, že zobrazení Φ je lineární (tj. aditivní a homogenní). Protože je izometrické, je prosté, tedy izomorfní.

Zbývá dokázat, že Φ zobrazuje H *na* ℓ^2, tj. dokázat, že každý bod $c := \{c_n\} \in \ell^2$ je obrazem některého vektoru $f \in H$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $p \in \mathbb{N}$ je

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k f_k \right\|^2 = \left(\Big(\sum_{j=n+1}^{n+p} c_j f_j \Big) \cdot \Big(\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k f_k \Big)\right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 \tag{40}$$

a protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ konverguje, splňuje B.C. podmínku, a z ní a ze (40) plyne, že i řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ ji splňuje. Tato řada tedy v H konverguje, a označíme-li f její součet, je zřejmě $c_k = (f \cdot f_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, tj. $\Phi(f) = c$, což jsme měli dokázat.

Závěrečná poznámka. Disciplína, která velmi účelně spojuje algebru s matematickou analýzou, vznikla kolem roku 1930; jmenuje se *funkcionální analýza*.[61]) Za dobu své existence se rozrostla na mohutný vědní obor, který má svou „lineární“ a „nelineární“ část; obě přinesly a stále přinášejí velmi efektivní nástroje k řešení problémů, při nichž klasická analýza většinou selhává. Bez funkcionálně-analytických metod si dnes např. nelze představit řešení problémů souvisejících s integrálními nebo parciálními diferenciálními rovnicemi; i moderní numerické a přibližné metody využívají funkcionální analýzu ničím nenahraditelným způsobem.

Lineární funkcionální analýza se zabývá studiem normovaných (nebo obecněji metrických nebo topologických) lineárních prostorů, a to zejména prostorů nekonečné algebraické dimenze; malou exkurzi do funkcionální analýzy představuje obsah právě končícího oddílu. Zůstali jsme však na samém začátku, protože funkcionální analýza vyšetřuje podrobně např. funkcionály na normovaných

---

[61]) I když nevěřím, že tyto poznámky bude číst někdo z početného zástupu lidí, kteří ve veřejných sdělovacích prostředcích (a asi i jinde) užívají zcela nesmyslné slovo „potencionální“ (existuje snad nějaký „potencionál“?), přece jen bych rád vyslovil prosbu, aby se slovo „funkcionální“ nestalo argumentem pro oprávněnost uvedeného jazykového zmetku, který vytvořili lidé postrádající jakýkoli cit pro český jazyk a který ihned nalezl kladnou odezvu u dalších polovzdělanců. Připomeňme, že slovo „funkcionální“ nevzniklo ze slova „funkce“, ale ze slova „funkcionál“, které se ve funkcionální analýze užívá pro zobrazení (vektorových) prostorů do $\mathbb{R}$ nebo do $\mathbb{C}$.

lineárních prostorech, vzájemná zobrazení takových prostorů, tedy tzv. *operátory*, a ovšem dlouhou řadu dalších, někdy značně komplikovaných pojmů. [62])

Matematické disciplíny studují *invarianty* nejrůznějších tříd zobrazení: Elementární geometrie se zabývá invarianty posunutí, otočení, stejnolehlosti, event. i zrcadlení; obecná topologie studuje invarianty homeomorfních zobrazení; lineární algebru zajímají mj. invarianty izomorfních zobrazení; v teorii metrických prostorů se vyšetřují invarianty izometrických zobrazení. Jedním z hlavních předmětů zájmu lineární funkcionální analýzy jsou *invarianty izometrických izomorfních zobrazení*. Tak jako nelze v topologii roviny „rozeznat" např. kruh od čtverce, jsou pro funkcionální analýzu „nerozeznatelné" dvojice izometricky izomorfních prostorů; z hlediska funkcionální analýzy se takové prostory liší jen „pojmenováním svých prvků". Vzhledem k větě 7.10 existuje pro funkcionální analýzu jen jeden Hilbertův prostor – pokud ovšem nezměníme jeho definici.[63])

Velmi brzy našla funkcionální analýza i své aplikace v moderní, zejména kvantové fyzice. Zde jsou známy již od dvacátých let dva způsoby přístupu k vysvětlování fyzikálních jevů: Jeden z nich, spojovaný s Heisenbergovým jménem, pracuje s principem nespojitě rozložené hmoty (hmoty rozložené do částic); de Broglie a Schrödinger vycházeli ve své „vlnové teorii" ze spojitého rozložení hmoty. Ke značnému údivu fyziků vedly tyto *filozoficky* zcela odlišné přístupy k týmž výsledkům. *Matematicky* lze souhlas vysvětlit velice jednoduše: Při prvním přístupu se v podstatě pracuje v prostoru ℓ^2, při druhém v prostoru $\mathcal{L}^2$; protože tyto prostory jsou izometricky izomorfní, není divu, že výsledky musí být – po patřičné interpretaci – identické.[64]) Navíc je zřejmé, že ani v budoucnu nemůže jedna z těchto teorií poskytnout žádné výsledky, které by se nemohly odvodit pomocí druhé teorie. Z hlediska funkcionální analýzy není dokonce mezi oběma teoriemi *žádný rozdíl*. V začátcích kvantové fyziky šlo tedy o nesmírně zajímavý proces vytvoření dvou jen zdánlivě zcela odlišných matematických modelů fyzikální reality. Protože *model není totéž co skutečnost*, nelze ovšem žádnou *matematickou* argumentací rozhodnout, jakou „podstatu" má tato realita.

Dodatek k oddílu 7

Weierstrassova věta o stejnoměrné aproximaci spojité funkce polynomy. *Pro každou funkci f spojitou na kompaktním intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje polynom p tak, že nerovnost $|p - f| < \varepsilon$ platí v celém $\langle a, b\rangle$.*

Důsledek. *Za uvedených předpokladů o funkci f existuje posloupnost polynomů p_n konvergující v $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně k funkci f.*

---

[62]) Jedním z prvních výsledků, které funkcionální analýza dokázala zcela jiným způsobem, než bylo do té doby obvyklé, byla existence spojitých funkcí, které nemají nikde derivaci. Nový přístup spočíval v tom, že funkce se nekonstruovala, ale dokázalo se, že v prostoru všech spojitých funkcí tvoří funkce, které mají aspoň v jednom bodě derivaci, z jistého hlediska „zanedbatelnou" část – v jistém smyslu „většina" spojitých funkcí nemá derivaci v žádném bodě.

[63]) V literatuře se studují jak lineární prostory se skalárním součinem, které *nejsou úplné*, tak i prostory, které mají *nespočetnou* algebraickou dimenzi (takže *nejsou separabilní*); terminologie sice kolísá, ale i takové prostory se často nazývají Hilbertovy. Není snad nutné podotýkat, že na takové obecnější prostory nelze teorii, kterou jsme v oddílu 7 vyložili, aplikovat.

[64]) Poznamenejme, že ani zde by se Riemannův integrál nehodil; kdybychom např. chtěli utvořit prostor analogický $\mathcal{L}^2((0,1))$, ale s Riemannovým integrálem, snadno bychom zjistili, že *není úplný*: Posloupnost funkcí definovaných podmínkami $f_n(x) := x^{-1/3}$, je-li $x \in \langle 1/n, 1\rangle$, a $f_n(x) := 0$, je-li $x \in \langle 0, 1/n)$, je cauchyovská, protože

$$n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n > m \ \Rightarrow\ \int_0^1 (f_n - f_m)^2 = \int_{1/n}^{1/m} x^{-2/3}\,dx = \Big[3\sqrt[3]{x}\,\Big]_{1/n}^{1/m} = 3\Big(\sqrt[3]{\frac{1}{m}} - \sqrt[3]{\frac{1}{n}}\Big) \le 3\sqrt[3]{\frac{1}{m}}\,.$$

V „lebesgueovském" $\mathcal{L}^2((0,1))$ tato posloupnost konverguje k funkci $f(x) := x^{-1/3}$; kdyby konvergovala k nějaké funkci v „riemannovském" $\mathcal{L}^2((0,1))$, musela by limitní funkce být rovna $f(x)$ s.v. v $(0,1)$, protože „riemannovský" $\mathcal{L}^2$ je obsažen v „lebesgueovském" $\mathcal{L}^2$ a v témž prostoru nemůže mít posloupnost dvě různé limity.Čtverec žádné takové funkce však riemannovsky integrovatelný není, protože není omezený. Protože úplnost je podstatnou podmínkou k tomu, aby prostory $\mathcal{L}^2$ a ℓ^2 byly izometrické a izomorfní, je neúplnost „riemannovského" $\mathcal{L}^2$ z hlediska teorie i aplikací neodstranitelnou vadou – jedinou možností je vzdát se tohoto integrálu.

D ů k a z . Uvažme především, že tvrzení důsledku je ve skutečnosti *ekvivalentní* s tvrzením hlavní části věty: Je-li $|p_n - f| < 1/n$ v $\langle a, b\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je $p_n \to f$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$. Obráceně, je-li $p_n \to f$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$ a je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, platí v $\langle a, b\rangle$ nerovnost $|p_n - f| < \varepsilon$ pro každé dost velké n.

Dále: Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a položíme-li $\varphi(t) := a + (b-a)t$ pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$, je funkce $g := f \circ \varphi$ spojitá v $\langle 0, 1\rangle$. Nerovnost $|p - g| < \varepsilon$ v $\langle 0, 1\rangle$ je ekvivalentní s nerovností $|p \circ \varphi_{-1} - g| < \varepsilon$ v $\langle a, b\rangle$. Funkce p je polynom právě tehdy, když totéž platí o funkci $p \circ \varphi_{-1}$. Při důkazu Weierstrassovy věty můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$.

Pro každou funkci f spojitou v intervalu $I := \langle 0, 1\rangle$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $p(f, n)$ funkce, jejíž hodnota v bodě $x \in \mathbb{R}$ je definována rovností

$$p(f, n; x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}; \tag{1}$$

funkce $p(f, n)$ se nazývá n-**tý Bernsteinův polynom** funkce f.

Ověřme především několik vlastností Bernsteinových polynomů; α, β, γ nechť jsou přitom konečná reálná čísla, n nechť je přirozené číslo a funkce f, g, h nechť jsou spojité v I. Ukažme, že platí:

$$p(\alpha f + \beta g, n) = \alpha p(f, n) + \beta p(g, n), \tag{2}$$

$$f \le g \Rightarrow p(f, n) \le p(g, n), \tag{3}$$

$$|f| \le g \Rightarrow |p(f, n)| \le p(g, n), \tag{4}$$

$$p(\gamma, n) = \gamma, \tag{5}$$

$$p(\mathrm{Id}, n) = \mathrm{Id}, \tag{6}$$

$$p(\mathrm{Id}^2, n) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Id} + \frac{n-1}{n}\,\mathrm{Id}^2\,. \tag{7}$$

Ad (2): Lineární závislost polynomu $p(f, n)$ na první proměnné je patrná přímo z (1).

Ad (3): Je-li $f \le g$, je $f(k/n) \le g(k/n)$ pro $k = 0, \dots, n$; tyto nerovnosti tedy stačí vynásobit nezápornými výrazy $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ a sečíst.

Ad (4): Nerovnost $|f| \le g$ je ekvivalentní s nerovnostmi $-g \le f \le g$, z nichž podle (3) a (2) plynou nerovnosti $-p(g, n) \le p(f, n) \le p(g, n)$, které jsou ekvivalentní s dokazovanou nerovností.

Ad (5): Je-li f konstantní funkce rovná γ, je $f(k/n) = \gamma$ pro $k = 0, \dots, n$, takže tento faktor lze z (1) vytknout; podle binomické věty je přitom

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1\,. \tag{8}$$

Ad (6): Je

$$p(\mathrm{Id}, n; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!}\, x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} = x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x\,.$$

Ad (7): Podle (1) a (6) je

$$p(\mathrm{Id}^2,n;x)-\frac{x}{n}=p(\mathrm{Id}^2,n;x)-p(\mathrm{Id},n;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2-k}{n^2}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}\,x^k(1-x)^{n-k}=\frac{n-1}{n}\,x^2\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{j!\,(n-2-j)!}\,x^j(1-x)^{n-2-j}$$

$$=\frac{n-1}{n}\,x^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{n-2-j}=\frac{n-1}{n}\,x^2\,.$$

Tím jsou tvrzení (2) – (7) dokázána; obraťme se nyní k vlastnímu důkazu Weierstrassovy věty: Stačí dokázat, že pro každé $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ existuje $N\in\mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n>N$ je $|p(f,n)-f|<\varepsilon$ v I. Buď tedy dáno $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$; protože f je v I stejnoměrně spojitá, existuje $\delta\in\mathbb{R}_+$ tak, že

(9) $$x\in I\,,\ y\in I\,,\ |y-x|\le\delta\ \Rightarrow\ |f(y)-f(x)|\le\tfrac12\varepsilon\,.$$

Protože f je v I omezená, existuje $K\in\mathbb{R}_+$ tak, že $|f|\le K$ v I.

Splňují-li body x,y z I nerovnost $|y-x|\le\delta$, platí závěr implikace (9); je-li $|y-x|\ge\delta$, je $(y-x)^2/\delta^2\ge1$, takže $|f(y)-f(x)|\le|f(y)|+|f(x)|\le 2K\le 2K\,(y-x)^2/\delta^2$. Položíme-li $L:=2K/\delta^2$, platí tedy implikace

(10) $$x\in I\,,\ y\in I\ \Rightarrow\ |f(y)-f(x)|\le\tfrac12\varepsilon+L\,(y-x)^2\,.$$

Buď $x\in I$ na chvilku pevné a napišme nerovnost ze závěru právě dokázané implikace ve tvaru[65])

(11) $$|f-f(x)|\le\tfrac12\varepsilon+L\,(\mathrm{Id}^2-2x\,\mathrm{Id}+x^2)\,.$$

Utvoříme-li pro každý z napsaných výrazů n-tý Bernsteinův polynom, dostaneme nerovnost

(12) $$|p(f,n)-f(x)|\le\tfrac12\varepsilon+L\Big(\frac1n\,\mathrm{Id}+\frac{n-1}{n}\,\mathrm{Id}^2-2x\,\mathrm{Id}+x^2\Big);$$

utvoříme-li hodnoty všech právě napsaných funcí v bodě x, tj. nahradíme-li všude symbol Id číslem $x\in I$, dostaneme nerovnost

(13) $$|p(f,n;x)-f(x)|\le\tfrac12\varepsilon+L\Big(\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}\,x^2-2x^2+x^2\Big)=\tfrac12\varepsilon+\frac{L}{n}\,x(1-x)\le\tfrac12\varepsilon+\frac{L}{4n}\,,$$

protože, jak snadno nahlédneme, je $0\le x\,(1-x)\le\frac14$ pro všechna $x\in I$. Zvolíme-li $N\in\mathbb{N}$ tak velké, že $L/4n<\varepsilon/2$, bude tedy platit implikace

$$x\in I, n>N\ \Rightarrow\ |p(f,n;x)-f(x)|<\varepsilon\,,$$

což jsme měli dokázat.

[65]) Nyní bude velmi záležet na tom, který ze symbolů v (11) znamená funkci a který konstantu nebo konstantní funkci. Budeme aplikovat tvrzení (2) – (7); jistě není třeba rozvádět, na kterém místě potřebujeme to nebo ono tvrzení – čtenář musí stejně celým myšlenkovým procesem projít krok po kroku sám.