1. Nerovnosti

Řešit nerovnost znamená najít množinu M všech (konečných reálných) čísel, která tuto nerovnost splňují. Jak lze v jednoduchých případech množinu M znázornit na číselné ose, ukazuje obrázek na této stránce dole.

Příklad 1.1. Rozřešme nerovnost $f(x) \geq 0$, kde

$$f(x) := \frac{(x+1)(x-1)(x-2)^2(x-3)}{x}\,. \tag{1}$$

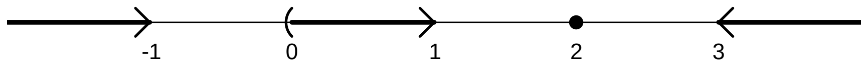
Zlomek vpravo má smysl, právě když je $x \neq 0$, a je součinem výrazu $1/x = x^{-1}$ a faktorů v čitateli. Pro $x \neq 0$ je $f(x) \geq 0$, právě když se buď jeden z faktorů v čitateli rovná nule, nebo když je počet záporných faktorů sudý. Ze znamének jednotlivých faktorů můžeme utvořit takovouto tabulku:

	$(-\infty,-1\rangle$	$(-1,0)$	0	$(0,1\rangle$	$(1,2)$	2	$(2,3)$	$\langle 3,+\infty)$
x^{-1}	<0	<0	—	>0	>0	>0	>0	>0
$x+1$	≤ 0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0
$x-1$	<0	<0	<0	≤ 0	>0	>0	>0	>0
$(x-2)^2$	>0	>0	>0	>0	>0	$=0$	>0	>0
$x-3$	<0	<0	<0	<0	<0	<0	<0	≥ 0

Interval nebo číslo (v první řádce tabulky) patří do množiny $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \geq 0\}$, právě když v příslušném sloupci není vodorovná linka — (která znamená, že faktor není definován), a je v něm buď $= 0$, nebo sudý počet symbolů < 0, ≤ 0. Zřejmě je

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0\} = (-\infty,-1\rangle \cup (0,1\rangle \cup \{2\} \cup \langle 3,+\infty)\,, \tag{2}$$

čímž je daná nerovnost vyřešena. Na číselné ose vyznačíme množinu všech jejích řešení např. takto:



Znaky „$<$“ , „$>$“ resp. „(“ , „)“ znamenají, že příslušný krajní bod k intervalu patří resp. nepatří. Izolovaný bod množiny (2) je vyznačen malým černým kolečkem.

Cvičení

Řešte následující nerovnosti a výsledné množiny řešení vyznačte na číselné ose.

1.01. $|x| < |x+1|$

1.02. $|x+3| \leq |x-1|$

1.03. $|x-1| \leq |2x-5|$

1.04. $|x+4| - |x+1| \leq x$

1.05. $|x-2| - x > 1$

1.06. $\dfrac{1}{x} < |x+2|$

1.07. $\dfrac{x-1}{x+1} \leq 1$

1.08. $\dfrac{x-2}{x+4} \leq \dfrac{x+1}{x-3}$

1.09. $\dfrac{x-3}{x-1} \leq |x+1|$

1.10. $x \leq \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$

1.11. $x+1 \leq x^2+7x+6$

1.12. $x^2 \leq |x^2-2x-3|$

1.13. $|x^2-2x-3| < 5-x$

1.14. $|x-|x+1|| \leq 2x$

1.15. $|x+1| > x^2+7x+6$

1.16. $|2x^2+6x-7| < |x^2-5x-7|$

1.17. $x+1 \geq |x^2+4x+3|$

1.18. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+4x+5} < 1-2x$

1.19. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 1$

1.20. $\sqrt{x-1} + \sqrt{11-x} > 3$

1.21. $\sqrt{x^2+2x+3} > |x+1|$

1.22. $\sqrt{x^2+2x-3} < |x+1|$

1.23. $x^2 < \sqrt{x^2+1}$

1.24. $\sqrt{(x^2-1)(x^2+4)} < x^2$

1.25. $\sqrt[3]{x^2-1} \leq x+1$

1.26. $\sqrt[3]{x^2-9} \geq x-1$

1.27. $\sin x \leq \cos x$

1.28. $\sin 2x < \cos x$

1.29. $2\sin x \leq \dfrac{1}{\cos x}$

1.30. $\operatorname{tg} x > \operatorname{cotg} x$

1.31. $\sin x \leq 2\cos^2 x - 1$

1.32. $|\operatorname{tg} x + 1| \leq |\operatorname{tg} x - 1|$

Často je třeba najít množinu všech čísel splňujících dvě nebo více nerovností, po případě vyřešit nerovnost(i) s jedním nebo více parametry.

Příklad 1.2. Jsou-li x a x_0 dva body z $\mathbb{R}$, je $|x-x_0|$ jejich vzdálenost na číselné ose. Pro každé $\delta \in \mathbb{R}_+$ je tedy

$$|x-x_0| < \delta \;\Leftrightarrow\; x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),$$
$$|x-x_0| > \delta \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, x_0-\delta) \cup (x_0+\delta, +\infty).$$

Kromě toho je

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\,.$$

Příklad 1.3. Rozřešme nerovnost

$$f(x) := ax^2 + bx + c > 0\,, \tag{3}$$

kde a, b, c jsou libovolné (reálné) parametry.

Označme M množinu všech řešení a rozeznávejme tyto situace:

1. $a = b = c = 0$; pak nerovnost (3) neplatí pro žádné $x \in \mathbb{R}$, tj. $M = \emptyset$.

2. $a = b = 0 \neq c$; pak je $M = \mathbb{R}$ pro $c > 0$ a $M = \emptyset$ pro $c \leq 0$.

3. $a = 0 \neq b$; pak se nerovnost (3) redukuje na nerovnost $bx + c > 0$, která je ekvivalentní s nerovností $x > -c/b$ (tj. s rovností $M = (-c/b, +\infty)$) v případě, že $b \in \mathbb{R}_+$, a s nerovností $x < -c/b$ (tj. s rovností $M = (-\infty, -c/b)$) v případě, že $b \in \mathbb{R}_-$.

4. $a \neq 0$; označme $D := b^2 - 4ac$ a vyřešme odděleně tyto dva případy:

4a. $D \geq 0$; pak je

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ kde } x_1 := \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \leq x_2 := \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \tag{4a}$$

jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$. Znaménko polynomu $f(x)$ závisí na tom, zdali počet záporných faktorů v rozkladu (4a) je sudý, nebo lichý.

Při $a > 0$ je proto $f(x) > 0$, právě když je buď $x < x_1$ (tedy i $x < x_2$), nebo $x > x_2$ (tedy i $x > x_1$); to znamená, že

$$M = \left(-\infty\,, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, +\infty\right). \tag{5a}$$

Při $a < 0$ je $f(x) > 0$, právě když je $x_1 < x < x_2$ (protože nemůže být $x < x_1$ a zároveň $x > x_2$); tomu odpovídá množina

$$M = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right). \tag{5b}$$

4b. $D < 0$; nyní je

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a^2}\right)\right], \tag{4b}$$

přičemž výraz $[\ldots]$ je zřejmě kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že při $a > 0$ resp. $a < 0$ je $M = \mathbb{R}$ resp. $M = \emptyset$.

Cvičení

Řešte následující nerovnosti a výsledné množiny řešení vyznačte na číselné ose.

1.33. $1 < |x+3| < 3-x$

1.34. $-4 < x^2 - x - 6 \leq 5$

1.35. $1 \leq |10 - x^2| \leq 6$

1.36. $2x < |x^2 - 5| \leq 4x$

Řešte následující nerovnosti s reálnými parametry a, b a výsledné množiny řešení vyznačte na číselné ose.

1.37. $|1 + ax| < 2$

1.38. $|a(x^2-1)| < 1$

1.39. $|ax + b| \leq b$

1.40. $|ax^2 - b| < a$

Řešení

1.01. $\big(-\frac{1}{2}, +\infty\big)$

1.02. $(-\infty, -1\rangle$

1.03. $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 4, +\infty)$

1.04. $\langle 3, +\infty)$

1.05. $\big(-\infty, \frac{1}{2}\big)$

1.06. $\mathbb{R}_- \cup \big(\sqrt{2}-1, +\infty\big)$

1.07. $(-1, +\infty)$

1.08. $\big(-4, \frac{1}{5}\big\rangle \cup (3, +\infty)$

1.09. $\big(\infty, -\frac{1}{2}(\sqrt{17}+1)\big\rangle \cup (1, +\infty)$

1.10. $(-\infty, 3) \cup \big(3, 2+\sqrt{6}\big)$

1.11. $(-\infty, -5\rangle \cup \langle -1, +\infty)$

1.12. $\big(-\infty, -\frac{3}{2}\big\rangle \cup \big\langle \frac{1}{2}(1-\sqrt{7}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{7})\big\rangle$

1.13. $\big(\frac{1}{2}(1-\sqrt{33}), 1\big) \cup (2, \frac{1}{2}(1+\sqrt{33}))$

1.14. $\big\langle \frac{1}{2}, +\infty\big)$

1.15. $(-7, -1)$

1.16. $\big(-11,-\frac{7}{3}\big)\cup(0,2)$

1.17. $\{-1\}$

1.18. $\big(-\infty,-\frac{1}{2}(\sqrt{13}+3)\big)\cup\big(-1,\frac{1}{2}(\sqrt{13}-3)\big)$

1.19. $\big\langle 1,\frac{5}{4}\big)$

1.20. $(1,11)$

1.21. $\mathbb{R}$

1.22. $(-\infty,-3\rangle\cup\langle 1,+\infty)$

1.23. $|x|<\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}\doteq 1.2720$

1.24. $1\leq|x|<\frac{2}{3}\sqrt{3}\doteq 1.1547$

1.25. $x\geq -1$

1.26. $x\leq -1$

1.27. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\big\langle(2k-\frac{3}{4})\pi,(2k+\frac{1}{4})\pi\big\rangle$

1.28. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\big((2k-\frac{1}{2})\pi,(2k+\frac{1}{6})\pi\big)\cup\big((2k+\frac{1}{2})\pi,(2k+\frac{5}{6})\pi\big)\Big)$

1.29. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\{(2k-\frac{3}{4})\pi\}\cup\big((2k-\frac{1}{2})\pi,(2k+\frac{1}{2})\pi\big)\Big)$

1.30. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\big((k-\frac{1}{4})\pi,k\pi\big)\cup\big((k+\frac{1}{4})\pi,(k+\frac{1}{2})\pi\big)\Big)$

1.31. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\langle(2k-\frac{7}{6})\pi,(2k+\frac{1}{6})\pi\rangle$

1.32. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,k\pi\rangle$

1.33. $(-\infty,-4)\cup(-2,0)$

1.34. $\big\langle\frac{1}{2}(1-3\sqrt{5}),-1\big)\cup\big(2,\frac{1}{2}(1+3\sqrt{5})\big\rangle$

1.35. $\big\langle-4,-\sqrt{11}\big\rangle\cup\langle-3,-2\rangle\cup\langle 2,3\rangle\cup\big\langle\sqrt{11},4\big\rangle$

1.36. $\big\langle 1,\sqrt{6}-1\big)\cup\big(\sqrt{6}+1,5\big\rangle$

1.37. pro $a=0:\ \mathbb{R}$;
pro $a\neq 0:$ otevřený interval s krajními body $-3/a,1/a$

1.38. pro $a = 0:\ \mathbb{R}$;

je-li $0 < |a| < 1:\ (-A, A)$, kde $A := \sqrt{1 + 1/|a|}$;

je-li $|a| \geq 1:\ (-A, -B) \cup (B, A)$, kde $B := \sqrt{1 - 1/|a|}$

1.39. pro $b < 0:\ \emptyset$;

je-li $b \geq 0 = a:\ \mathbb{R}$;

je-li $b = 0 \neq a$: $\{0\}$;

je-li $b > 0 \neq a$: uzavřený interval s krajními body $-2b/a,\ 0$

1.40. pro $a \leq 0:\ \emptyset$;

je-li $a > 0,\ a + b \leq 0:\ \emptyset$;

je-li $a > 0,\ a + b > 0,\ b < a:\ (-C, C)$, kde $C := \sqrt{b/a + 1}$;

je-li $b \geq a > 0,\ a + b > 0:\ (-C, -D) \cup (D, C)$, kde $D := \sqrt{b/a - 1}$