3. Limity posloupností

V této kapitole bude slovo **posloupnost** znamenat zobrazení množiny $\mathbb{N}$ (nebo obecněji množiny $\mathbb{N}(N) := \{n \in \mathbb{Z};\, n \geq N\}$, kde $N \in \mathbb{Z}$) do množiny $\mathbb{R}$ všech (konečných) reálných čísel. Je-li a posloupnost, měli bychom (v souladu s obecnými pravidly teorie množin) *hodnotu* tohoto zobrazení *v čísle* n značit $a(n)$. Je však zvykem nazývat toto číslo n-**tý člen** posloupnosti, značit je a_n, pro posloupnost samu užívat např. symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v obecnějším případě $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$, a nazývat ji **posloupnost o členech** a_n. Nehrozí-li záměna s jednobodovou množinou, lze pro tuto posloupnost užít i stručnější označení $\{a_n\}$.

Je-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ (obecněji: pro každé $n \geq N$, kde $N \in \mathbb{Z}$) dán výrok $V(n)$, říkáme, že **výrok** $V(n)$ **platí pro skoro všechna** $n \in \mathbb{N}$ (obecněji: **pro skoro všechna** $n \geq N$), existuje-li konečná množina $K \subset \mathbb{N}$ (obecněji: $K \subset \mathbb{N}(N)$) tak, že výrok $V(n)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N} - K$ (obecněji: pro každé $n \in \mathbb{N}(N) - K$). Nehrozí-li nedorozumění, říkáme, že $V(n)$ platí **pro skoro všechna** n; místo „skoro všechna“ píšeme většinou „s. v.“.

Poznamenejme ještě, že výrok „$V(n)$ platí pro s.v. n“ je *ekvivalentní* s výrokem „existuje n_0 tak, že $V(n)$ platí pro všechna $n > n_0$“.

Zatímco *členy* posloupností reálných čísel jsou konečné, *limity* takových posloupností budou moci být rovny i $\pm\infty$. Pro pohodlí čtenáře zopakujeme základní **definice** vztahující se k číslům z $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, tedy k reálným číslům [1]):

0) **Uspořádání:** $-\infty$ je nejmenší, $+\infty$ největší reálné číslo, takže nerovnosti $-\infty < a < +\infty$ platí pro každé $a \in \mathbb{R}$ a je ovšem i $-\infty < +\infty$; $\operatorname{sgn}(+\infty) := +1$, $\operatorname{sgn}(-\infty) := -1$, $-(+\infty) := -\infty$, $-(-\infty) := +\infty$, $|\pm\infty| := +\infty$.

1) **Součet:**

$$a + b := +\infty\,, \ \text{ je-li buď } a = +\infty \text{ a } b > -\infty, \text{ nebo } b = +\infty \text{ a } a > -\infty;$$
$$a + b := -\infty\,, \ \text{ je-li buď } a = -\infty \text{ a } b < +\infty, \text{ nebo } b = -\infty \text{ a } a < +\infty;$$

součet $a + b$ **nemá smysl**, právě když je jedno z čísel a, b rovno $+\infty$, druhé $-\infty$.

2) **Rozdíl** $a - b$ je definován jako součet $a + (-b)$, má-li tento součet smysl podle bodu 1); rozdíl $a - b$ **nemá smysl**, právě když jsou a, b nekonečná čísla téhož znaménka.

3) **Součin**

$$ab := \begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}, \ \text{ je-li } \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ a buď } a = \pm\infty, \text{ nebo } b = \pm\infty;$$

součin ab **nemá smysl**, právě když je jedno z čísel a, b rovno $\pm\infty$, zatímco druhé z nich je 0.

---

[1]) Čísla z $\mathbb{R}$ se podrobněji nazývají *konečná*, čísla $\pm\infty$ jsou *nekonečná*. Slovo *nevlastní* zde ani pro čísla, ani pro limity neužíváme, protože může budit dojem, že to nejsou „plnoprávná“ čísla resp. limity. Kromě toho považujeme za zbytečné mít pro jeden pojem dva různé názvy.

4) **Podíl**

$$\frac{a}{b} := \left\{ \begin{array}{ll} +\infty\,, & \text{je-li } a = \pm\infty,\ 0 \neq b \neq \pm\infty,\ \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = +1 \\ -\infty\,, & \text{je-li } a = \pm\infty,\ 0 \neq b \neq \pm\infty,\ \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = -1 \\ \ 0\,, & \text{je-li } a \in \mathbb{R},\ b = \pm\infty \end{array} \right\};$$

podíl a/b **nemá smysl**, právě když je buď $b = 0$, nebo $|a| = |b| = +\infty$.

5) **Mocniny** čísel $\pm\infty$ se definují takto:

$$(\pm\infty)^n := \left\{ \begin{array}{ll} (\pm 1)^n \cdot (+\infty)\,, & \text{je-li } \ n \in \mathbb{N} \\ 0\,, & \text{je-li } \ -n \in \mathbb{N} \end{array} \right\};$$

výrazy $(\pm\infty)^0$, $a^{\pm\infty}$ (kde $a \in \mathbb{R}^*$) **nemají smysl**; *připomeňme však, že* $0^0 := 1$. $\square$

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (\text{nebo např. } \ a_n \to a \ \text{ pro } \ n \to \infty)$$

a číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazýváme **limita posloupnosti** $\{a_n\}$, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

(1′) pro každé $a' < a$ je $a_n > a'$ pro s.v. n,

(1″) pro každé $a'' > a$ je $a_n < a''$ pro s.v. n.

Je-li $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (nebo že čísla a_n **konvergují**) k číslu a; je-li $a = \pm\infty$, říkáme, že a_n k a **divergují**. **Konvergentní posloupnost** je posloupnost mající *konečnou* limitu; **divergentní** jsou všechny ostatní posloupnosti, tedy posloupnosti s limitou $\pm\infty$ a posloupnosti, které limitu nemají. $\square$

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená**, existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $|a_n| \leq K$ platí pro všechna n. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená shora** resp. **zdola**, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že je $a_n \leq K$ resp. $a_n \geq K$ pro všechna n. $\square$

Platí např. tato tvrzení:

1. *Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, právě když je omezená shora i zdola.*

2. *Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n < +\infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} a_n > -\infty$), je posloupnost $\{a_n\}$ omezená shora (resp. zdola). Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Poznámka 3.1. *Na rozdíl od literatury, v níž se konečné a nekonečné limity zavádějí zpravidla třemi různými definicemi, jsou zde všechny možnosti shrnuty do jedné definice.* Je-li $a \in \mathbb{R}$, je konjunkce $(1') \wedge (1'')$ ekvivalentní s výrokem, že

(1_k) pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro s.v. n;

je-li $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$), je podmínka (1″) (resp. (1′)) *prázdná*, protože nelze splnit její premisu, a podmínku (1′) (resp. (1″)) lze napsat v ekvivalentním tvaru

(1_n) pro každé $K \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $a_n > K$ (resp. $a_n < K$) pro s.v. n.

Čtenář se může sám přesvědčit, že se s podmínkami $(1')$ a $(1'')$ pracuje aspoň tak dobře jako s podmínkami (1_k) a (1_n). $\square$

V této kapitole se budeme zabývat jen limitami, které lze vypočítat elementárními úpravami, známe-li limity některých jednoduchých výrazů, jako např.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{pro každé } x \in (-1,1) \\ +\infty & \textit{pro každé } x \in (1,+\infty) \end{array} \right\}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \quad \textit{pro každé } x \in \mathbb{R}_+ . \tag{3}$$

Je ovšem nutné znát i základní věty o limitách posloupností:

Věta 3.1 (o limitě absolutní hodnoty). *Je-li* $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$, *je* $|a_n| \to |a|$. *Je-li* $|a_n| \to 0$, *je* $a_n \to 0$.

Věta 3.2 (o limitě součtu (rozdílu), součinu a podílu). *Z relací* $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$, $b_n \to b \in \mathbb{R}^*$ *plyne, že*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_n \pm b_n \to a \pm b \\ a_n b_n \to ab \\ a_n/b_n \to a/b \end{array} \right\}, \textit{ má-li příslušná pravá strana smysl.} \tag{4}$$

Dodatek. *Nechť* $a_n > 0$ (*resp.* $a_n < 0$) *pro s.v.* n; *pak* $a_n \to 0 \Rightarrow 1/a_n \to +\infty$ (*resp.* $1/a_n \to -\infty$).

Věta 3.3. 1. *Je-li* $a_n \to 0$ *a je-li* $\{b_n\}$ *omezená posloupnost, je* $a_n b_n \to 0$.

2. *Je-li* $\{a_n\}$ *omezená posloupnost a je-li* $|b_n| \to +\infty$, *je* $a_n/b_n \to 0$.

V mnohých případech, v nichž se k výpočtu limity žádná z právě uvedených vět přímo nehodí, může vést k cíli tato *věta o limitním přechodu v nerovnostech*:

Věta 3.4. *Pro každé tři posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí:*

1. $a_n \le b_n$ *pro s.v.n*, $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$;
2. $a_n \le b_n$ *pro s.v.n*, $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$;
3. $a_n \le b_n$ *pro s.v.n*, $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a \le b$;
4. $a_n \le b_n \le c_n$ *pro s.v.n*, $a_n \to b$, $c_n \to b \Rightarrow b_n \to b$.

Poznámka 3.2. Jak se čtenář snadno přesvědčí, je implikace

$$\alpha \in \mathbb{R},\ a \in (1,+\infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \tag{5}$$

přímým důsledkem tohoto užitečného tvrzení:

Věta 3.5. *Pro každou posloupnost čísel* $a_n \neq 0$ *platí:*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \quad \square \tag{6}$$

Ilustrujme nyní na několika příkladech, jak lze počítat limity posloupností elementárními úpravami:

Příklad 3.1. Abychom dokázali rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 3\sqrt[4]{n^3} - 10\sqrt{n^2-1} + \sin n^3}{\sqrt[3]{n^2+n+\sqrt{n}} + 3\sqrt[4]{n^4-3}} = -3\,,$$

stačí všechny sčítance v čitateli i ve jmenovateli dělit n. Nové sčítance budou pak mít po řadě limity $1, 0, -10, 0$ (čitatel) a $0, 3$ (jmenovatel) a stačí aplikovat V. 3.2.

Poznamenejme, že v podobných případech vytýkáme z čitatele i ze jmenovatele *nejvyšší* mocniny n, čímž (po případné úpravě) získáme výraz tvaru

$$n^\alpha \cdot \frac{a_n + \cdots}{b_n + \cdots}\,, \quad \text{kde } 0 \neq \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}\,,\ 0 \neq \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}\,,$$

a v němž tečky znamenají součty výrazů, z nichž každý má nulovou limitu. Na takto upravený výraz lze pak aplikovat V. 3.2. Číslo α je rozdíl exponentů mocnin vytknutých v čitateli a ve jmenovateli; výsledná limita závisí podstatným způsobem na tom, zdali je $\alpha < 0$, nebo $\alpha = 0$, nebo $\alpha > 0$.

Příklad 3.2. Užitím identity $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$ (platné pro každá dvě komplexní čísla a, b) vypočteme např. limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0.$$

Aplikací obecnějšího vzorce

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \tag{7}$$

(platného pro každé $n \in \mathbb{N}$) na rozdíl

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+1} = \sqrt[6]{(n^2+n+1)^3} - \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \tag{8}$$

dostaneme zlomek s čitatelem

$$\begin{aligned} &(n^2+n+1)^3 - (n^3+1)^2 \\ &= (n^6 + 3n^5 + 6n^4 + 7n^3 + 6n^2 + 3n + 1) - (n^6 + 2n^3 + 1) \\ &= 3n^5 + 6n^4 + 5n^3 + 6n^2 + 3n = n^5\,(3 + \cdots)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

kde tečky znamenají výraz, který má pro $n \to \infty$ limitu 0, a se jmenovatelem

$$\begin{aligned} &\sqrt[6]{(n^2+n+1)^{15}} + \sqrt[6]{(n^2+n+1)^{12}(n^3+1)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(n^3+1)^{10}} \\ &= n^5\left(\sqrt[6]{(1+n^{-1}+n^{-2})^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(1+n^{-3})^{10}}\,\right); \end{aligned} \tag{10}$$

v závorkách v posledním řádku je přitom 6 sčítanců, z nichž každý má limitu 1.

Z (9) a (10) ihned plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \right) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}\,. \quad \square$$

Jak jsme již řekli, mohou tam, kde selhávají rovnosti, pomoci nerovnosti a např. V.3.4 ; ilustrujme to opět příkladem:

Příklad 3.3. Abychom vypočetli limitu

$$b := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + n^5}\,,$$

uvážíme, že $\lim_{n\to\infty} (n^5/2^n) = 0$ (sr. s (5)), z čehož plyne, že nerovnost $n^5 < 2^n$, a tedy i relace

$$2 \le \sqrt[n]{2^n+n^5} \le \sqrt[n]{2^n+2^n} = 2\sqrt[n]{2}$$

platí pro všechna dostatečně velká n. [2]) Protože $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (sr. s (3)), je $b = 2$ podle 4. části V.3.4.

Příklad 3.4. Abychom vypočítali limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} k^2\,, \tag{11}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, užijeme vzorec

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$$

ze Cv.2.3, z něhož je patrné, že pro $\alpha = 3$ je limita rovna 1/3. Podle věty o limitě součinu je proto limita (11) rovna 0 pro všechna $\alpha > 3$ a $+\infty$ pro všechna $\alpha < 3$.

Příklad 3.5. Dokažme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,. \tag{12}$$

Protože je $\sqrt[n]{n} \ge 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ pro vhodné číslo $h_n \ge 0$. Pro všechna $n > 1$ je přitom podle binomické věty

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1+h_n\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \ge \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)\, h_n^2\,;$$

z toho ihned plyne, že $h_n^2 \le 2/(n-1)$, takže $0 \le h_n \le \sqrt{2/(n-1)} \to 0$. Podle V.3.4 je tedy i $h_n \to 0$; podle V.3.2 proto $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to 1$.

---

[2]) Tj. „od určitého indexu počínaje“. Čtenář může ověřit, že nerovnost $n^5 < 2^n$ platí pro všechna $n > 22$, zatímco $22^5/2^{22} \doteq 1.23 > 1$. Pro náš výpočet jsou ovšem tyto podrobnosti zbytečné.

Cvičení

Vypočtěte limity pro $n \to \infty$ těchto výrazů:

3.01. $\dfrac{n^2 + (n+1)^2}{(n+3)^2 + (n+4)^2}$

3.02. $\dfrac{2n^3 + (2n-1)^3}{(1-3n)^3 + n^3}$

3.03. $\dfrac{n + 2n^2 + 3n^3}{(n+1)^3 + (n+2)^2 + (n+3)}$

3.04. $\dfrac{n + \sqrt[4]{(n+1)^3} - 2\sqrt{n^2-1}}{4\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[8]{(n-1)^7} - n}$

3.05. $\dfrac{a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_p n^{\alpha_p}}{b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_q n^{\beta_q}}$, kde $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $a_1 \neq 0 \neq b_1$ a $\alpha_1 > \cdots > \alpha_p$, $\beta_1 > \cdots > \beta_q$

3.06. $\sqrt{\dfrac{n + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}{n+1}}$

3.07. $\sqrt{\dfrac{n + \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}}}{n+1}}$

3.08. $\dfrac{(n^3-1)(n^2+1) - 2^n}{n^3(n^3+5)}$

3.09. $\sqrt{n}\,\big(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\big)$

3.10. $n\big(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\big)$

3.11. $n\big(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\big)$

3.12. $n\big(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}\big)$

3.13. $\dfrac{1}{n - \sqrt{n^2-n}}$

3.14. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+2} - \sqrt[3]{n^2-n-2}}$

3.15. $n^\alpha\big(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\big)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$

3.16. $n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}\right)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$

3.17. $n^{\alpha}\left(\sqrt{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt{n^3-\sqrt{n}}\right)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$

3.18. $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k$

3.19. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k^2+k}}$

3.20. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2+k}}$

3.21. $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k}+\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}\right)$

3.22. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$

3.23. $\sqrt[n]{5^n+4^n+3^n+2^n+1^n}$

3.24. $n^{\alpha}\,(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$, kde $\alpha \neq 1$

3.25. $n^{\alpha}\,(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})$, kde $\alpha \neq 2$

3.26. $\sqrt[n]{n!}$

3.27. $\dfrac{n!}{n^n}$

3.28. $\dfrac{(n!)^2}{n^n}$

3.29. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$

3.30. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$

3.31. $\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$ $(\,|x|<1)$

Za předpokladu, že $k \in \mathbb{N}$, dokažte tato tvrzení:

3.32. 1) $a_n \to a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a_n^k \to a^k$

2) $a_n \to \pm\infty \;\Rightarrow\; a_n^k \to (\pm 1)^k \cdot (+\infty)$

3.33. 1) $a_n \geq 0$ *pro s.v.* n, $a_n \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \geq 0$, $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$

2) $a_n \to +\infty \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to +\infty$

3.34. 1) $a_n \to a \in \mathbb{R}$, k *je liché* $\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$

2) $a_n \to -\infty$, k *je liché* $\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to -\infty$ $\square$

Připomeňme nyní některé dobře známé pojmy: Je-li $X \subset \mathbb{R}$, říkáme, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je

$$\left\{\begin{matrix}\textbf{neklesající}\\ \textbf{rostoucí}\\ \textbf{nerostoucí}\\ \textbf{klesající}\\ \textbf{konstantní}\end{matrix}\right\} \textbf{ v } X, \text{ jestliže } x \in X,\ y \in X,\ x < y \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(x) \leq f(y)\\ f(x) < f(y)\\ f(x) \geq f(y)\\ f(x) > f(y)\\ f(x) = f(y)\end{matrix}\right\}.$$

Říkáme, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je **monotónní** (resp. **ryze monotónní**), je-li buď neklesající, nebo nerostoucí (resp. buď rostoucí, nebo klesající). Místo „funkce f je neklesající (rostoucí, nerostoucí, klesající) v X“ se též říká, že „f v X **neklesá** (**roste**, **neroste**, **klesá**)“.

Je-li $X = \mathbb{N}$ (nebo obecněji $X = \mathbb{N}(N)$, kde $N \in \mathbb{Z}$), je funkce $f : X \to \mathbb{R}$ *posloupností*. I když se tedy právě vyslovené definice vztahují i na posloupnosti, připomeneme jejich běžnější (ekvivalentní) podobu tímto jednoduchým tvrzením:

Posloupnost

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \textit{ je } \left\{\begin{matrix}\textit{neklesající}\\ \textit{rostoucí}\\ \textit{nerostoucí}\\ \textit{klesající}\\ \textit{konstantní}\end{matrix}\right\}, \textit{ právě když } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a_n \leq a_{n+1}\\ a_n < a_{n+1}\\ a_n \geq a_{n+1}\\ a_n > a_{n+1}\\ a_n = a_{n+1}\end{matrix}\right\}.$$

Dodejme ještě, že posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **stacionární**, existuje-li m tak, že $a_n = a_m$ pro každé $n > m$. $\square$

Má-li se dokázat jen *existence* limity, hodí se často tato obecná věta:

Věta 3.6 (o existenci limity monotónní posloupnosti). *Každá monotónní posloupnost má (konečnou nebo nekonečnou) limitu. Konečnou limitu má právě každá omezená monotónní posloupnost.*

P o d r o b n ě j i : *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající (nerostoucí), je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \quad \big(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\big).$$

Příklad 3.6. Ukažme, že *první z posloupností*

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{13}$$

roste, druhá klesá.

Nechť a_n je n-tý člen první posloupnosti; jednoduchým výpočtem a užitím Bernoulliho nerovnosti (viz Cv. 2.10) dostaneme vztahy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n$$
$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ge \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1\,,$$

které dokazují, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Nechť b_n je n-tý člen druhé z posloupností (13); podobným postupem jako nahoře získáme pro každé $n > 1$ relace

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$$
$$= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \ge \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1\,,$$

z nichž je patrné, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Ze zřejmé nerovnosti $a_n < b_n$ platné pro každé $n \in \mathbb{N}$ ihned plyne, že obě posloupnosti jsou omezené; podle V. 3.6 mají tedy jisté konečné limity a resp. b. Protože je $b_n = a_n\,(n+1)/n$ a protože $(n+1)/n \to 1$ pro $n \to \infty$, je $a = b$.

Společná limita

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{14}$$

posloupností (13) se nazývá **Eulerovo číslo**; je základem tzv. *přirozených logaritmů.*

Cvičení

Pomocí vět V. 3.6 a V. 3.4 dokažte existenci konečných limit těchto dvou posloupností:

3.35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ **3.36.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$, kde $\alpha > 2$. □

3.37. Buď $a_0 := \sqrt{2}$ a $a_n := \sqrt{2+a_{n-1}}$, je-li $n \in \mathbb{N}$; dokažte, že $a_n \to 2$.

3.38. Proveďte do všech podrobností důkaz tohoto tvrzení:

Věta 3.7. *Pro každou posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^* \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a\,. \tag{15}$$

(Návod: Je-li dáno $a' < a$, zvolíme pomocné $b' \in (a', a)$ a najdeme $p \in \mathbb{N}$ tak, že je $a_n > b'$ pro každé $n > p$. Protože $(a_1 + \ldots + a_p)/n \to 0$ a $(n-p)b'/n \to b'$ pro $n \to \infty$, existuje $q > p$ tak, že pro všechna $n > q$ je

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_p}{n} + \frac{a_{p+1} + \ldots + a_n}{n} > \frac{a_1 + \ldots + a_p}{n} + \frac{n-p}{n} b' > a'\,.$$

Podobně postupujeme v případě, že je dáno $a'' > a$.)

3.39. Pomocí V. 3.7 ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k} = 1\,. \quad \square$$

* * *

Je-li $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, říkáme, že $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **posloupnost vybraná** z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z definice limity ihned plyne, že

$$a_n \to a \;\Rightarrow\; a_{n_k} \to a\,. \tag{16}$$

Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, existuje-li posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $a_{n_k} \to a$ (pro $k \to \infty$). Množinu všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme $\operatorname{Ls} a_n$. [3])

Platí tato tři důležitá tvrzení:

Věta 3.8. (Bolzano–Weierstrassova.) *Každá posloupnost má aspoň jeden hromadný bod v* $\mathbb{R}^*$. *Každá omezená posloupnost má aspoň jeden hromadný bod v* $\mathbb{R}$.

Věta 3.9. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, *právě když je* $\operatorname{Ls} a_n = \{a\}$.

Věta 3.10. *Pro každou posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *existuje* $\min \operatorname{Ls} a_n$ *i* $\max \operatorname{Ls} a_n$.

Čísla $\min \operatorname{Ls} a_n$ a $\max \operatorname{Ls} a_n$ se nazývají **limes inferior** a **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značí se např. takto:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min \operatorname{Ls} a_n\,, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max \operatorname{Ls} a_n\,;$$

symbol „$n \to \infty$“ pod znaky lim inf a lim sup se často vynechává.

[3]) Označení je převzato z obecné topologie, kde znamená *topologický limes superior*; latinský *limes* je na rozdíl od české *limity* rodu mužského.

Snadno nahlédneme, že *posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu, právě když je* $\min \operatorname{Ls} a_n = \max \operatorname{Ls} a_n$; *limita je pak rovna společné hodnotě* $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$.

Obráceně: *K tomu, aby posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neměla limitu, je nutné a stačí, aby měla aspoň dva různé hromadné body, tj. aby bylo* $\liminf a_n < \limsup a_n$.

Cvičení

Pro každou z následujících posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ najděte množinu $\operatorname{Ls} a_n$ a čísla $\liminf a_n$, $\limsup a_n$.

3.40. $(-1)^n$

3.41. $(-1)^n n$

3.42. $(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

3.43. $(-1)^n(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\,)$

3.44. $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

3.45. $(-1)^n \, \dfrac{n^2+1}{n+1}$

3.46. $1 + \dfrac{n}{n+1} \cos\left(\frac{1}{2} n\pi\right)$

3.47. $n \sin\left(\frac{1}{4}\pi n\right)$

3.48. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \cos n\pi$

3.49. $\sin \dfrac{n\pi}{k}$, kde $k \in \mathbb{N}$

Dále:

3.50. Dokažte, že posloupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ nemají limitu.

(Návod pro první posloupnost. Označíme-li

$$I_k := \left\langle \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi, \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle, \quad J_k := \left\langle -\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, -\tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle,$$

je $\sin x \geq \frac{1}{2}$ všude v I_k a $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ všude v J_k pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Protože délka každého z intervalů I_k, J_k je $\frac{2}{3}\pi > 2$, existují dvě rostoucí posloupnosti přirozených čísel $m_k \in I_k$, $n_k \in J_k$ tak, že $\sin m_k \geq \frac{1}{2}$ a $\sin n_k \leq -\frac{1}{2}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Z toho snadno plyne, že posloupnost $\sin n$ nemá limitu.)

Řešení

3.01. 1. **3.02.** $-\frac{5}{13}$. **3.03.** 3. **3.04.** $-\frac{1}{3}$.

3.05. a_1/b_1 pro $\alpha_1 = \beta_1$; $\operatorname{sgn}(a_1/b_1) \cdot (+\infty)$ pro $\alpha_1 > \beta_1$; 0 pro $\alpha_1 < \beta_1$.

3.06. 1. **3.07.** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **3.08.** $-\infty$. **3.09.** $-\frac{1}{2}$. **3.10.** 1. **3.11.** $+\infty$.

3.12. 1. **3.13.** 2. **3.14.** $+\infty$.

3.15. $\frac{2}{3}$ pro $\alpha = \frac{4}{3}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{4}{3}$; 0 pro $\alpha < \frac{4}{3}$.

3.16. 1 pro $\alpha = \frac{1}{2}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$; 0 pro $\alpha < \frac{1}{2}$.

3.17. 1 pro $\alpha = 1$; $+\infty$ pro $\alpha > 1$; 0 pro $\alpha < 1$.

3.18. $\frac{1}{2}$. **3.19.** $+\infty$. **3.20.** $+\infty$. **3.21.** $1-\sqrt{2}$. **3.22.** $+\infty$. **3.23.** 5.

3.24. $+\infty$ pro $\alpha > 1$; 0 pro $\alpha < 1$. **3.25.** $+\infty$ pro $\alpha > 2$; 0 pro $\alpha < 2$.

3.26. $+\infty$. **3.27.** 0. **3.28.** $+\infty$. **3.29.** 0. **3.30.** $\frac{1}{2}$. **3.31.** $1/(1-x)$.

Protože množina $\operatorname{Ls} a_n$ je ve všech příkladech 3.40 – 3.49 konečná, jistě není nutné uvádět její minimum $\liminf a_n$ a maximum $\limsup a_n$; omezujeme se proto jen na vyjmenování hromadných bodů.

3.40. ± 1. **3.41.** $\pm\infty$. **3.42.** ± 1. **3.43.** 0. **3.44.** $0, 1$. **3.45.** $\pm\infty$.

3.46. $0, 1, 2$. **3.47.** 0, $\pm\infty$. **3.48.** $\pm e$. **3.49.** $\pm\sin(j\pi/k)$, $0 \le j < k$.

Poznámka 3.3. Cvičení **3.24** s $\alpha = 1$ a **3.25** s $\alpha = 2$ nevyřešíme jednoduchými algebraickými úpravami; k výsledkům ($\lg(3/2) \doteq 0.405465$ resp. 1) však lze dojít metodami, které vyložíme v kapitole 6 (sr. s Po. 6.4 a příkladem 6.81).

Cvičení

3.51. Dokažte, že $a \in \operatorname{Ls} a_n$, *právě když každé okolí bodu* a *obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti* $\{a_n\}$, *tj. právě když pro každé* $U(a)$ *existuje nekonečně mnoho indexů* n, *pro něž je* $a_n \in U(a)$.

Dokažte dále, že v důsledku toho platí i toto tvrzení:

(17) $$b_k \in \operatorname{Ls} a_n \ \ \textit{pro všechna} \ \ k \in \mathbb{N},\ b_k \to b \Rightarrow b \in \operatorname{Ls} a_n .$$

3.52. Existují posloupnosti, jejichž členy jsou (právě) všechna racionální čísla; jednou z nich je např. tato posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$-\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2},$$
$$-\frac{9}{3}, -\frac{8}{3}, \dots, \frac{0}{3}, \dots, \frac{9}{3}, -\frac{16}{4}, -\frac{15}{4}, \dots, \frac{16}{4}, -\frac{25}{5}, \dots .$$

Protože pro každé číslo $q \in \mathbb{Q}$ existuje nekonečně mnoho indexů n tak, že $q = a_n$, je zřejmě $\mathbb{Q} \subset \operatorname{Ls} a_n$. Dokažte však, že $\operatorname{Ls} a_n = \mathbb{R}^*$, tj. že *každé číslo* $r \in \mathbb{R}^*$ *je hromadným bodem této posloupnosti.*

3.53. Srovnejte prvky „dvakrát nekonečné" matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{3} & 1+\frac{1}{4} & \dots \\ 2 & 2+\frac{1}{2} & 2+\frac{1}{3} & 2+\frac{1}{4} & \dots \\ 3 & 3+\frac{1}{2} & 3+\frac{1}{3} & 3+\frac{1}{4} & \dots \\ 4 & 4+\frac{1}{2} & 4+\frac{1}{3} & 4+\frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

po jejích *vedlejších diagonálách* do posloupnosti

$$1, 1+\tfrac{1}{2}, 2, 1+\tfrac{1}{3}, 2+\tfrac{1}{2}, 3, 1+\tfrac{1}{4}, 2+\tfrac{1}{3}, 3+\tfrac{1}{2}, 4, \dots$$

a dokažte, že hromadnými body této posloupnosti jsou právě všechna přirozená čísla a bod $+\infty$.

3.54. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, pro niž je $\operatorname{Ls} a_n = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

3.55. Rozhodněte, zdali existuje posloupnost $\{a_n\}$, pro niž je $\operatorname{Ls} a_n$ rovno $\mathbb{N}$ resp. $\{1/n;\, n \in \mathbb{N}\}$ resp. $\mathbb{Q}$. (Odpověď je „ne" na všechny tři otázky – viz (17).)