5. Derivace

Derivace (oboustranná, zprava, zleva) reálné funkce f reálné proměnné v bodě $a \in \mathbb{R}$ byla definována v kapitole 4 (viz řádky (9) a (9±)); tato derivace se podrobněji nazývá **derivace řádu** 1. Oboustranné derivace řádu n, kde $n > 1$ je přirozené číslo, se definují indukcí, v níž zbývá provést indukční krok:

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a má-li funkce f v každém bodě x jistého okolí $U(a)$ derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n-1$, definujeme **derivaci** $f^{(n)}(a)$ **řádu** n **funkce** f **v bodě** a rovností

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a), \tag{1}$$

má-li pravá strana smysl. Dodejme, že **derivací řádu** 0 v bodě *a ležícím v definičním oboru funkce f* budeme rozumět číslo $f(a)$. Kromě názvu „derivace řádu n" se běžně užívá i termín „derivace n-tého řádu". *Jednostranné derivace* řádů $n > 1$ nebudeme nikde potřebovat, a proto je ani nebudeme definovat.

Říkáme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a, existuje-li *konečná* derivace $f'(a)$; říkáme, že f je **diferencovatelná v množině** $M \subset \mathbb{R}$, je-li diferencovatelná v každém bodě této množiny. Přechod od f ke *konečné* derivaci f' se nazývá **diferencování** (funkce f).

Připomeňme, že *funkce diferencovatelná v bodě a je v tomto bodě spojitá*, že *obrácené tvrzení neplatí*, a zopakujme dobře známá základní pravidla derivování:

Věta 5.1 (o derivaci součtu a rozdílu). *Existují-li derivace $f'(a)$, $g'(a)$, je*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a), \quad \text{má-li pravá strana smysl.} \tag{2}$$

Analogická tvrzení platí pro derivace zprava a zleva.

Věta 5.2 (o diferencování součinu). *Jsou-li funkce f, g diferencovatelné v bodě a, platí totéž o součinu fg, přičemž*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{3}$$

Analogická tvrzení platí pro derivace zprava a zleva.

Věta 5.3 (o diferencování podílu). *Jsou-li funkce f, g diferencovatelné v bodě a a je-li $g(a) \neq 0$, je i podíl f/g diferencovatelný v bodě a, přičemž*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \tag{4}$$

Analogická tvrzení platí pro derivace zprava a zleva.

Věta 5.4 (o diferencování superpozice). *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě a a funkce g v bodě $f(a)$, je superpozice $g \circ f$ diferencovatelná v bodě a, přičemž*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a). \tag{5}$$

Poznámka 5.1. Všimněme si, že větu o derivaci součtu (rozdílu) lze *na rozdíl od vět* 5.2 – 5.4 užít i za některých situací, kdy jsou derivace *nekonečné*.[1]) Je proto zcela korektní napsat např.

$$(6)\qquad \bigl(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}\bigr)' = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{1}{5}x^{-4/5} & \text{pro} \;\; x\neq 0 \\ +\infty+\infty=+\infty & \text{pro} \;\; x=0 \end{matrix}\right\}.$$

Větu 5.1 však *nelze užít* k výpočtu derivace rozdílu $h(x) := \sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}$ v bodě 0, protože bychom dostali výraz $+\infty-(+\infty)$, který nemá smysl. *To samozřejmě nevyvrací existenci této derivace*; vzhledem k tomu, že

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{x} = x^{-2/3}-x^{-4/5} = x^{-4/5}\bigl(x^{2/15}-1\bigr) \to -\infty \;\;\text{pro}\;\; x\to 0\,,$$

je $h'(0)=-\infty$.

Příklad 5.1. První derivací funkce $f(x) := \lg(1+x)$ v intervalu $(-1,+\infty)$ je funkce $1/(1+x)$. Předpokládáme-li platnost identity

$$(7)\qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \;\;\text{pro každé}\;\; x\in(-1,+\infty)$$

a některé $n\in\mathbb{N}$, ihned vidíme, že

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n-1}(-n)\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

všude v $(-1,+\infty)$; tím je platnost (7) dokázána pro každé $n\in\mathbb{N}$.

Příklad 5.2. Jak snadno nahlédneme, platí všude v $\mathbb{R}$ a pro všechna celá čísla $n\geq 0$ identity

$$(8_1)\qquad \sin^{(4n)}=\sin,\;\; \sin^{(4n+1)}=\cos,\;\; \sin^{(4n+2)}=-\sin,\;\; \sin^{(4n+3)}=-\cos,$$

$$(8_2)\qquad \cos^{(4n)}=\cos,\;\; \cos^{(4n+1)}=-\sin,\;\; \cos^{(4n+2)}=-\cos,\;\; \cos^{(4n+3)}=\sin\,.$$

Příklad 5.3. Aplikujeme-li dvakrát větu o diferencování superpozice, dostaneme identitu

$$(\operatorname{arctg}(\exp(\operatorname{tg}x)))' = \frac{1}{\exp(2\operatorname{tg}x)+1}\cdot\exp(\operatorname{tg}x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

platnou všude v $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}(2k+1)\pi\,;k\in\mathbb{Z}\}$. V. 5.4 lze užít, protože každá ze tří zúčastněných funkcí je diferencovatelná všude ve svém definičním oboru. □

[1]) Zdůraznili jsme to tím, že jsme věty 5.2 – 5.4 nazvali větami o *diferencování* součinu, podílu a superpozice.

Ve větě V. 5. 4 se mluví jen o „oboustranné“ diferencovatelnosti – jinou jsme ani nezavedli; *jednostranné a nekonečné derivace pomocí ní počítat nelze*. Často však lze užít následující jednoduché a velmi užitečné tvrzení, k němuž se uchylujeme zejména v případech, kdy se pro výpočet (oboustranné nebo jednostranné) derivace nehodí žádná ze zatím uvedených vět.

Věta 5.5. *Je-li $a \in \mathbb{R}$, je-li f spojitá v jistém $U(a)$ ($U^+(a)$, $U^-(a)$) a je-li limita $f'(a\pm)$ ($f'(a+)$, $f'(a-)$) rovna $A \in \mathbb{R}^*$, existuje i derivace $f'(a)$ ($f'_+(a)$, $f'_-(a)$) a rovná se A.*

Z právě uvedené věty ihned plyne, že např.

$$\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_- 1 = +\infty\,, \quad \arccos'_+(-1) = \arccos'_- 1 = -\infty\,. \tag{9}$$

Příklad 5.4. Pro každé $x \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$ nechť je

$$f(x) := \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\lg\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{10}$$

Funkce $\arccos x$ a $\sqrt{1-x^2}$ jsou diferencovatelné v každém bodě $x \in (-1, 1)$, zlomek v logaritmu je kladný, je-li navíc $x \neq 0$, funkce lg je diferencovatelná v $\mathbb{R}_+$. Je-li tedy $0 < |x| < 1$, jsou splněny všechny předpoklady V. 5. 4 a je proto

$$\begin{aligned} f'(x) = &-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{x} - \arccos x\cdot\frac{1}{x^2} \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Při diferencování prvního zlomku v (10) jsme dali přednost větě V. 5. 2 před větou V. 5. 3; logaritmus zlomku na pravé straně jsme před diferencováním rozložili na rozdíl logaritmu čitatele a jmenovatele, což je možné, protože jak čitatel, tak i jmenovatel jsou kladné funkce. Protože výraz ve druhé řádce (11) je roven $1/\big(x\sqrt{1-x^2}\,\big)$, dokázali jsme zatím, že

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\arccos x\,, \ \text{ je-li } \ 0 < |x| < 1\,. \tag{12}$$

Oboustranné derivace funkce f v bodech ± 1 neexistují např. proto, že definiční obor funkce f neobsahuje žádné oboustranné okolí žádného z těchto bodů; zbývá však rozhodnout, zdali existují jednostranné derivace $f'_+(-1)$ a $f'_-(+1)$. Jak jsme již řekli, větu 5.4 nelze aplikovat. [2]) Mohli bychom se sice pokusit postupovat podle definice, ale daleko jednodušší je aplikovat V. 5. 5; to je možné, protože

[2]) Nejen proto, že oboustranné derivace nejsou k dispozici, ale že jednostranné derivace funkcí $\arccos x$ a $\sqrt{1-x^2}$ jsou v bodech ± 1 nekonečné. Z nemožnosti aplikovat větu 5.4 samozřejmě *neplyne*, že uvedené derivace neexistují.

1) funkce f je spojitá jak v $\langle -1, 0)$, tak i v $(0, 1\rangle$;

2) existují limity

$$\lim_{x\to -1+} f'(x) = -\pi, \qquad \lim_{x\to 1-} f'(x) = 0.$$

Z V.5.5 proto plyne, že $f'_+(-1) = -\pi$, $f'_-(1) = 0$. $\square$

Je-li funkce f dána nějakým „vzorcem", budeme ji vyšetřovat v maximálních intervalech, v nichž má „vzorec" smysl. Sjednocení všech těchto intervalů budeme považovat za definiční obor funkce f; označíme jej $\mathcal{D}(f)$. V dalším budeme řešit úlohy, které krátce nazveme **vyšetření spojitosti a derivace** dané funkce. Úloha se standardně bude skládat z těchto částí:

1) Nalezení definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce f.

2) Nalezení všech maximálních intervalů, v nichž je f spojitá. Nalezení všech bodů $x \in \mathcal{D}(f)$, v nichž f *není* spojitá (oboustranně, zprava, zleva). Nalezení oboustranných resp. jednostranných limit funkce f v bodech $x \in \mathcal{D}(f)$, v nichž f není spojitá a v nichž tyto limity existují.

3) Nalezení (oboustranné resp. jednostranné) derivace funkce f ve všech bodech, kde existuje.

Protože z existence konečné derivace $f'(x)$ ($f'_+(x)$, $f'_-(x)$) funkce f plyne její spojitost (zprava, zleva), není nutné o ní v takových bodech *explicite* mluvit; spojitost je však důležitá v bodech, v nichž konečná derivace neexistuje. Podobně není nutné mluvit o jednostranných derivacích v bodech, v nichž existuje derivace oboustranná. $\square$

Budeme říkat, že **funkce f je spojitá ve svém definičním oboru**, je-li spojitá v každém maximálním intervalu, z nichž se skládá její definiční obor.

Při vyšetřování spojitosti bychom se jen stěží obešli bez znalosti těchto tvrzení:

Věta 5.6. 1. *Jsou-li funkce f, g spojité (oboustranně, zprava, zleva) v bodě a, platí totéž o funkcích $|f|$, $f \pm g$, fg, a také o funkci f/g, pokud je $g(a) \neq 0$.*

2. *Jsou-li funkce f, g spojité v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, platí totéž o funkcích $|f|$, $f \pm g$, fg, a také o funkci f/g, pokud je $g \neq 0$ všude v I.*

Věta 5.7. 1. *Je-li funkce f spojitá v bodě a a funkce g v bodě $f(a)$, je superpozice $g \circ f$ spojitá v bodě a.*

2. *Je-li funkce f spojitá v intervalu I a funkce g v nějakém intervalu J obsahujícím $f(I)$, je superpozice $g \circ f$ spojitá v I.*

Poznámka 5.2. V některých případech lze při vyšetřování spojitosti a derivace využít specifických vlastností dané funkce, jako je *sudost*, *lichost* nebo *periodicita*. Přestože předpokládáme, že tyto tři pojmy jsou čtenáři dobře známy, připomeneme jejich přesné definice:

Splňuje-li množina $M \subset \mathbb{R}$ podmínku $x \in M \Rightarrow -x \in M$, říkáme, že funkce f definovaná v M je **sudá** (resp. **lichá**), platí-li pro každé $x \in M$ rovnost $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Je-li $p \in \mathbb{R}_+$ a splňuje-li množina $M \subset \mathbb{R}$ podmínku $x \in M \Rightarrow x \pm p \in M$, říkáme, že funkce f definovaná v M je p-**periodická** (nebo že má **periodu** p), platí-li pro každé $x \in M$ rovnost $f(x \pm p) = f(x)$.

Při počítání derivací nám část práce mohou ušetřit tato tři tvrzení:

Věta 5.8. *Sudá nebo lichá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je v bodě $a \in M$ spojitá zprava (zleva), právě když je spojitá v bodě $-a$ zleva (zprava).*

Důsledek. *Sudá nebo lichá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M$, právě když je spojitá v bodě $-a$.*

Věta 5.9. *Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ sudá (lichá) funkce a je-li $a \in M$, je $f'_+(a) = -f'_-(-a)$ $(f'_+(a) = f'_-(-a))$, má-li jedna strana rovnosti smysl.*

Důsledek. *Je-li sudá (lichá) funkce $f : M \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v M, je f' funkce lichá (sudá).*

Věta 5.10. *Nechť $p \in \mathbb{R}_+$ a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je p-periodická funkce; pak platí tato dvě tvrzení:*

1. *Je-li f spojitá v bodě $a \in M$ zleva (zprava, oboustranně), platí totéž v každém bodě $a + np$, kde $n \in \mathbb{Z}$.*

2. *Pro každé $a \in M$ a každé $n \in \mathbb{Z}$ je $f'_+(a) = f'_+(a + np)$, $f'_-(a) = f'_-(a + np)$, $f'(a) = f'(a + np)$, má-li jedna strana příslušné rovnosti smysl.*

Příklad 5.5. Funkce

$$f(x) := \sqrt[3]{\sin x} \tag{13}$$

je spojitá v celém $\mathbb{R}$, ale V.5.4 lze aplikovat jen v bodech $x \not\equiv 0 \bmod \pi$, protože $(\mathrm{Id}^{1/3})'(0) = +\infty$ a V.5.4 předpokládá diferencovatelnost. Protože

$$f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} \quad \text{pro všechna} \quad x \notin \{n\pi\,;\ n \in \mathbb{Z}\}, \tag{14}$$

protože $\lim_{x\to n\pi} \cos x = \cos n\pi = (-1)^n$ a protože $\sqrt[3]{\sin^2 x}$ konverguje k 0 pro $x \to n\pi$ a je kladná všude kromě bodů $n\pi$, je podle V.5.5

$$f'(n\pi) = \lim_{x\to n\pi} f'(x) = \left\{ \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \right\} \text{ pro všechna } n \left\{ \begin{matrix} \text{sudá} \\ \text{lichá} \end{matrix} \right\}. \tag{15}$$

Příklad 5.6. Jednostranné derivace π-periodické funkce $f(x) := \sqrt[3]{|\sin x|}$ lze v bodě 0 počítat přímo z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} = +\infty, \quad f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \Big(-\frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x}\Big) = -\infty;$$

podle V.5.10 je v důsledku toho $f'_+(n\pi) = +\infty$, $f'_-(n\pi) = -\infty$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Příklad 5.7. Funkce

$$f(x) := \lg\big(|x| - \sqrt{x^2 - 1}\,\big) \tag{16}$$

je spojitá a sudá ve svém definičním oboru $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$; snadno zjistíme, že je

$$\big(\lg(x - \sqrt{x^2-1}\,)\big)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{v} \quad (1, +\infty)$$

a že $f'_+(1) = f'(1+) = -\infty$. Podle V.5.9 je její derivace lichá, tedy rovná $1/\sqrt{x^2-1}$ v $(-\infty, -1)$, a navíc je $f'(-1-) = +\infty$.

Příklad 5.8. Funkce

$$f(x) := x(|\cos(\lg x)| - |\sin(\lg x)|) \tag{17}$$

je spojitá ve svém definičním oboru $\mathbb{R}_+$. Protože absolutní hodnota (identity) nemá derivaci v počátku, nelze V.5.4 aplikovat v žádném bodě $x \in \mathbb{R}_+$, v němž je buď $\cos(\lg x) = 0$, nebo $\sin(\lg x) = 0$, tedy v žádném bodě $a_n := \exp(n\pi/2)$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

Není-li $x \in \mathbb{R}_+$ rovno žádnému z čísel a_n, je

$$\begin{aligned} f'(x) &= |\cos(\lg x)| - |\sin(\lg x)| \\ &\quad -x\Big(\operatorname{sgn}(\cos(\lg x)) \cdot \sin(\lg x) \cdot \frac{1}{x} + \operatorname{sgn}(\sin(\lg x)) \cdot \cos(\lg x) \cdot \frac{1}{x}\Big) \\ &= \operatorname{sgn}(\cos(\lg x))(\cos(\lg x) - \sin(\lg x)) \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\sin(\lg x))(\cos(\lg x) + \sin(\lg x)). \end{aligned} \tag{18}$$

Vzhledem k π-periodicitě funkcí $|\cos x|$, $|\sin x|$ platí identity

$$\begin{aligned} f(xe^{\pm\pi}) &= |\cos(\lg(xe^{\pm\pi}))| - |\sin(\lg(xe^{\pm\pi}))| \\ &= |\cos(\lg x \pm \pi)| - |\sin(\lg x \pm \pi)| = |\cos(\lg x)| - |\sin(\lg x)| = f(x) \end{aligned} \tag{19}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$. Z rovnosti $a_{n\pm2} = a_n e^{\pm\pi}$ (kde $n \in \mathbb{Z}$) snadno plyne platnost identity

$$f'(a_{n\pm2}-) = f'(a_n-) \quad \text{resp.} \quad f'(a_{n\pm2}+) = f'(a_n+) \tag{20}$$

za předpokladu, že jedna její strana má smysl. Podle V.5.5 jsou tato čísla rovna $f'_-(a_n)$ resp. $f'_+(a_n)$. Zřejmě proto stačí vypočítat limity $f'(a_0-)$, $f'(a_0+)$, $f'(a_1-)$, $f'(a_1+)$, pokud ovšem existují; je-li tomu tak, jsou po řadě rovny $f'_-(a_0)$, $f'_+(a_0)$, $f'_-(a_1)$, $f'_+(a_1)$ a obecněji také rovny $f'_-(a_{2n})$, $f'_+(a_{2n})$, $f'_-(a_{2n+1})$, $f'_+(a_{2n+1})$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Tím bude naše úloha úplně vyřešena.

Protože je $\operatorname{sgn}(\cos(\lg x)) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sin(\lg x)) = -1$ v (a_{-1}, a_0), je v tomto intervalu $f'(x) = 2\cos(\lg x)$ (podle (14)), a v důsledku toho $f'(a_0-) = 2\cos(\lg 1) = 2$. Podobně zjistíme, že $f'(x) = -2\sin(\lg x)$ v (a_0, a_1), takže $f'(a_0+) = 0$, $f'(a_1-) = -2$, a že $f'(x) = -2\cos(\lg x)$ v (a_1, a_2), takže $f'(a_1+) = 0$.

Tím je dokázáno, že pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí rovnosti

$$f'_-(a_{2n}) = 2\,, \quad f'_+(a_{2n}) = 0\,, \quad f'_-(a_{2n+1}) = -2\,, \quad f'_+(a_{2n+1}) = 0\,. \tag{21}$$

Pro výpočet derivací vyšších řádů součinu dvou funkcí lze velmi často užít toto tvrzení (připomínající binomickou větu):

Věta 5.11. (Leibnizův vzorec.) *Existují-li konečné n-té derivace $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ funkcí f, g v bodě $a \in \mathbb{R}$, je v tomto bodě*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{22}$$

Příklad 5.9. Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnosti

$$\begin{aligned} \left(x^\lambda e^{\mu x}\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^\lambda\right)^{(k)} \left(e^{\mu x}\right)^{(n-k)} \\ &= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1) x^{\lambda-k} \mu^{n-k} \\ &= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} \binom{\lambda}{k} x^{\lambda-k} \mu^{n-k}. \end{aligned} \tag{23}$$

Připomeňme k tomu, že tzv. **binomické koeficienty** jsou pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ definovány vzorcem

$$\binom{\lambda}{k} := \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!} & \text{pro } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{pro } k = 0 \end{array} \right\}; \tag{24}$$

všimněme si přitom, že pro každé celé číslo $\lambda \geq 0$ a pro každé $k > \lambda$ je binomický koeficient (24) rovný 0.

Příklad 5.10. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} (x^3 \sin x)^{(9)} &= \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (x^3)^{(k)} (\sin x)^{(9-k)} = \sum_{k=0}^{3} \binom{9}{k} (x^3)^{(k)} (\sin x)^{(9-k)} \\ &= x^3 \cos x + 9 \cdot 3x^2 \cdot \sin x - 36 \cdot 6x \cdot \cos x - 84 \cdot 6 \cdot \sin x \\ &= x(x^2 - 216) \cos x + 9(3x^2 - 56) \sin x. \end{aligned}$$

Příklad 5.11. Indukcí se snadno dokáže, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\lg^{(n)} x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{25}$$

Z toho ihned plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ je např.

$$\begin{aligned} \left(x^2 \lg x\right)^{(7)} &= \binom{7}{0} x^2 (\lg x)^{(7)} + \binom{7}{1} \left(x^2\right)' (\lg x)^{(6)} + \binom{7}{2} \left(x^2\right)'' (\lg x)^{(5)} \\ &= 1 \cdot x^2 \cdot (-1)^6 \frac{6!}{x^7} + 7 \cdot 2x \cdot (-1)^5 \frac{5!}{x^6} + 21 \cdot 2 \cdot (-1)^4 \frac{4!}{x^5} = \frac{48}{x^5}. \end{aligned}$$

Cvičení

Za předpokladu, že $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, vyšetřete spojitost a derivaci těchto funkcí: [3])

5.01. $\lg(x + \sqrt{x^2+1})$

5.02. $\lg(x - \sqrt{x^2-1})$

5.03. $\sqrt{x + \sqrt{x}}$

5.04. $\sqrt{x - \sqrt{x}}$

5.05. $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

5.06. $x + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

5.07. $\sqrt[3]{x^2+2x-3}$

5.08. $\lg^2 x + \lg(\lg x)$

5.09. $\operatorname{cotg}(\arcsin x)$

5.10. $|\sin^3 x|$

5.11. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$

5.12. $\sqrt{|x^2-x-2|}$

5.13. $\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|}$

5.14. $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}$

5.15. $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

5.16. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{2-x^2}}$

5.17. $\arccos\dfrac{1}{x}$

5.18. $\operatorname{arccotg}\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

5.19. $\operatorname{argcosh}(\lg x)$

5.20. $\arcsin(\lg^3 x)$

5.21. $\arccos(\lg(2-x))$

5.22. $|\arcsin x|$

5.23. $\arcsin|x^2-1|$

5.24. $\lg(\arcsin(x^2-1))$

5.25. $\lg\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

5.26. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$

5.27. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{|x^2-2|}$

5.28. $\lg(1 + |\sin x|)$

5.29. $\arcsin(\sin x)$

5.30. $\sqrt{\operatorname{arctg}(e^x-1)}$

5.31. $\sqrt[3]{\cos(x^2-1)}$

5.32. $\sqrt[3]{(\lg|x|-1)^2}$

5.33. $\arccos((1-\cos x)^2)$

5.34. x^x

5.35. $x^{1/x}$

5.36. $x^{\lg x}$

---

[3]) U několika příkladů může být výpočet jednostranných derivací v krajních bodech příslušných intervalů dost obtížný, smíme-li užít jen dosud vyslovené věty. Čtenář, kterému jde jen o zvládnutí základních postupů, může proto tuto část úkolu vynechat; čtenář, kterému by vadilo, že příklad nedovede rozřešit v plném rozsahu, může zkusit vrátit se k řešení, až se seznámí s obsahem kapitoly 6, v níž jsou vyloženy méně elementární metody výpočtu limit.

5.37. $(\lg x)^x$

5.38. x^{x^x}

5.39. $(\lg x)^{\lg x}$

5.40. $(\operatorname{arctg} x)^{\arccos x}$

5.41. $(\sin x)^{\cos x}$

5.42. $(e^x - 1)^{\arcsin x}$

5.43. $\Big(\lg \dfrac{1+x}{1-x}\Big)^{\lg x}$

5.44. $\lg \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

5.45. $\operatorname{argcosh}\Big(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\Big)$

5.46. $\sqrt{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}$

5.47. $\lg(\lg(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}))$

5.48. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\lg x}{\sqrt{x^2-1}}$

5.49. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \lg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

5.50. $\lg\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)$

5.51. $\operatorname{arctg} e^x - \lg\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

5.52. $\operatorname{argsinh}(|\lg|x^2-3||)$

5.53. $\sqrt{a^2-x^2} - a \arccos\dfrac{x}{a}$

5.54. $\lg\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$

5.55. $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5.56. $\sqrt{x^2-1} - x^2 \arccos\dfrac{1}{x}$

5.57. $\lg(1+\sin^2 x) - 2\sin x \operatorname{arctg}(\sin x)$

5.58. $2x \operatorname{arctg} x - \lg(x^2+1) - \operatorname{arctg}^2 x$

5.59. $x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$

5.60. $\dfrac{x \lg x}{\sqrt{1+x^2}} - \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

5.61. $\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} - \lg\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

5.62. $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} + (\beta-\alpha)\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$

V bodech x uvedených v závorkách vypočítejte n-té derivace těchto funkcí:

5.63. $x^n e^{\alpha x}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

5.64. $e^x \sin x \quad (x = 0)$

5.65. $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} \quad (x \in (-\infty, \frac{1}{2}))$

5.66. $\sin x \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$

5.67. $\lg\dfrac{1+x}{1-x} \quad (x = 0)$

5.68. $\dfrac{1}{x(x+1)} \quad (-1 \neq x \neq 0)$

5.69. Nechť

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} \exp(-1/x^2) & \text{pro} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \end{array} \right\}. \tag{26}$$

Dokažte indukcí, že existují polynomy $a_n(x)$ tak, že rovnost

$$f^{(n)}(x) = a_n\Big(\frac{1}{x}\Big) \exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \tag{27}$$

platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \neq 0$; pak dokažte, že $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. (Rada. Substitucí $x = \pm 1/\sqrt{t}$ převeďte limitu pro $x \to 0\pm$ pravé strany (27) na $\lim_{t\to+\infty} a_n(\pm\sqrt{t}\,)\exp(-t)$; podle (26) z kapitoly 4 je tato limita rovna nule. Dodefinujeme-li tedy funkci (27) v bodě 0 nulou, bude spojitá v celém $\mathbb{R}$ a stačí aplikovat V.5.5.)

5.70. Zjistěte, pro která $n \in \mathbb{N}$ má funkce

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x^n \sin\dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \end{array} \right\} \tag{28}$$

v bodě 0 derivaci prvního resp. druhého řádu a pro která $n \in \mathbb{N}$ je první resp. druhá derivace v bodě 0 spojitá.

Řešení

Funkce z příkladů 5.01 – 5.70 značíme v tomto seznamu řešení f. *Všechny jsou spojité ve svém definičním oboru*; tuto informaci u jednotlivých příkladů již neuvádíme. [4])

5.01. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R};\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ v $\mathbb{R}$

5.02. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty);\ f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ v $(1, +\infty);\ f'_+(1) = -\infty$

5.03. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty);\ f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ v $\mathbb{R}_+;\ f'_+(0) = +\infty$

5.04. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty);\ f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ v $(1, +\infty);\ f'_+(1) = +\infty$

5.05. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty);\ f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ v $\mathbb{R}_+;\ f'_+(0) = +\infty$

[4]) V kapitole 7 budeme vyšetřovat i funkce, které v některých bodech spojité nejsou.

5.06. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)$; $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0) = -\infty$

5.07. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}}$, je-li $-3 \neq x \neq 1$;

$f'(-3) = -\infty$, $f'(1) = +\infty$

5.08. $\mathcal{D}(f) = (1, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{2\lg^2 x + 1}{x \lg x}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.09. $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, je-li $0 < |x| < 1$;

$f'_+(-1) = f'_-(1) = -\infty$

5.10. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3\,\mathrm{sgn}(\sin x)\sin^2 x\,\cos x$ v $\mathbb{R}$.

P o z o r ! V.5.4 *nelze aplikovat*, je-li $x \equiv 0 \mod \pi$, ale uvedený výsledek je podle V.5.5 správný i v těchto bodech.

5.11. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}(2n+1)\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; $f'(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.12. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{\mathrm{sgn}(x^2-x-2)}{2\sqrt{|x^2-x-2|}}(2x-1)$, je-li $-1 \neq x \neq 2$;

$f'_-(-1) = f'_-(2) = -\infty$, $f'_+(-1) = f'_+(2) = +\infty$

5.13. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mathrm{sgn}((x-1)/(x+2))}{\sqrt{|(x-1)(x+2)^3|}}$,

je-li $-2 \neq x \neq 1$; $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$

5.14. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$; $f'(x) = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^4}}$,

je-li $-2 \neq x \neq 3$; $f'(-2) = -\infty$

5.15. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, je-li $x \neq 1$

5.16. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; $f'(x) =$

$= \dfrac{x(2+6x-x^3)}{3\sqrt[3]{(1+x^3)^2(2-x^2)^4}}$, je-li $\pm\sqrt{2} \neq x \neq -1$; $f'(-1) = +\infty$

5.17. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, je-li $|x| > 1$;

$f'_-(-1) = f'_+(1) = +\infty$

5.18. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{(n + \frac{1}{4})\pi\,;\ n \in \mathbb{Z}\}\,;\ f'(x) \equiv 1$ v $\mathcal{D}(f)$

5.19. $\mathcal{D}(f) = \langle e, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\lg^2 x - 1}}$ v $(e, +\infty)\,;\ f'_+(e) = +\infty$

5.20. $\mathcal{D}(f) = \langle 1/e, e\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{3\lg^2 x}{x\sqrt{1 - \lg^6 x}}$ v $(1/e, e)\,;$

$f'_+(1/e) = f'_-(e) = +\infty$

5.21. $\mathcal{D}(f) = \langle 2 - e, 2 - 1/e\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1 - \lg^2(2-x)}}\,,$

je-li $2 - e < x < 2 - 1/e\,;\ f'_+(2-e) = f'_-(2 - 1/e) = +\infty$

5.22. $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$ je-li $0 < |x| < 1\,;$

$f'_+(-1) = -\infty,\ f'_\pm(0) = \pm 1,\ f'_-(1) = +\infty$

5.23. $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{2\operatorname{sgn}(x(x^2-1))}{\sqrt{2 - x^2}}\,,$ je-li $|x| < \sqrt{2}$ a

$0 \neq x \neq \pm 1\,;\ f'_\pm(\mp\sqrt{2}) = \mp\infty,\ f'_\pm(-1) = f'_\pm(1) = \pm 2,\ f'_\pm(0) = \mp\sqrt{2}$

5.24. $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{2\operatorname{sgn} x}{\arcsin(x^2-1)\sqrt{2 - x^2}}\,,$

je-li $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})\,;\ f'_+(-\sqrt{2}) = -\infty,\ f'_-(\sqrt{2}) = +\infty$

5.25. $\mathcal{D}(f) = (1, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{2x\arccos(1/\sqrt{x})\sqrt{x - 1}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.26. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+\,;\ f'(x) = f(x) \cdot \left(\lg\dfrac{a}{b} + \dfrac{b-a}{x}\right)$ v $\mathcal{D}(f)$

5.27. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}\,;\ f'(x) = \dfrac{2x\operatorname{sgn}(2 - x^2)}{x^4 - 4x^2 + 5}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.28. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}{1 + |\sin x|}\,,$ je-li $x \not\equiv 0 \mod \pi\,;$

$f'_\pm(n\pi) = \pm 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$

5.29. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \operatorname{sgn}(\cos x),$ je-li $x \not\equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi\,;$

$f'_\pm\big(\frac{1}{2}(4n-1)\pi\big) = f'_\mp\big(\frac{1}{2}(4n+1)\pi\big) = \pm 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$

5.30. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{\operatorname{arctg}(e^x - 1)}\,(e^{2x} - 2e^x + 2)}\,,$

je-li $x \in \mathbb{R}_+\,;\ f'_+(0) = +\infty$

5.31. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{x \sin(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos^2(x^2-1)}}$, je-li $x \notin \{\pm a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$,

kde $a_n := \sqrt{1 + \frac{1}{2}(2n-1)\pi}$; $f'(\pm a_{2n-1}) = \mp\infty$, $f'(\pm a_{2n}) = \pm\infty$

5.32. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; $f'(x) = \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{\lg|x| - 1}}$, je-li $0 \neq x \neq \pm e$;

$f'_\pm(-e) = f'_\pm(e) = \pm\infty$

5.33. $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \langle \frac{1}{2}(4n-1)\pi, \frac{1}{2}(4n+1)\pi\rangle$; $f'(x) = \dfrac{2(\cos x - 1)\sin x}{\sqrt{1-(\cos x - 1)^4}}$,

je-li $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{2}(4n-1)\pi, \frac{1}{2}(4n+1)\pi)$; $f'_+(\frac{1}{2}(4n-1)\pi) = +\infty$,

$f'_-(\frac{1}{2}(4n+1)\pi) = -\infty$

5.34. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)$; $f'(x) = x^x(\lg x + 1)$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0) = -\infty$

5.35. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f'(x) = x^{1/x-2}(1 - \lg x)$ v $\mathcal{D}(f)$

5.36. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f'(x) = 2x^{\lg x - 1}\lg x$ v $\mathcal{D}(f)$

5.37. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty)$; $f'(x) = (\lg x)^{x-1}\big(\lg x \,\lg(\lg x) + 1\big)$ v $(1, +\infty)$;

$f'_+(1) = 1$

5.38. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)$; $f'(x) = x^{x^x} x^x\Big(\lg x(\lg x + 1) + \dfrac{1}{x}\Big)$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0) = 1$

5.39. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty)$; $f'(x) = (\lg x)^{\lg x} \cdot \dfrac{\lg(\lg x) + 1}{x}$; $f'_+(1) = -\infty$

5.40. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 1\rangle$; $f'(x) = f(x)\Big(\dfrac{\arccos x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} - \dfrac{\lg(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$,

je-li $x \in (0, 1)$; $f'_+(0) = 0$, $f'_-(1) = +\infty$

5.41. $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \langle 2n\pi, (2n+1)\pi)$; $f'(x) = f(x)\,\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x \lg(\sin x)}{\sin x}$

v $\mathcal{D}(f) - \{2n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; $f'_+(2n\pi) = 1$

5.42. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 1\rangle$; $f'(x) = f(x)\Big(\dfrac{\lg(e^x - 1)}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{e^x}{e^x - 1}\arcsin x\Big)$ v $(0, 1)$;

$f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$

5.43. $\mathcal{D}(f) = (0, 1)$; $f'(x) = \Big(\lg\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^{\lg x - 1}\dfrac{2\lg x}{1-x^2} + \dfrac{f(x)}{x}\lg\Big(\lg\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$

v $\mathcal{D}(f)$

5.44. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}(2n+1)\pi\,;\ n \in \mathbb{Z}\}\,;\ f'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.45. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+\,;\ f'(x) = -\dfrac{1}{2\sinh(\frac{1}{2}x)}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.46. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{2\sqrt{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}}$, je-li $x \not\equiv \frac{1}{4}\pi \mod 2\pi\,;$

$f'_\pm\big(2n + \frac{1}{4})\big) = \pm 1/\sqrt[4]{2} \doteq 0.84$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$

5.47. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}} \cdot \lg\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)}$ v $\mathbb{R}$

5.48. $\mathcal{D}(f) = (1, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{x \lg x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.49. $\mathcal{D}(f) = (-1, 1)\,;\ f'(x) = \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.50. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ v $\mathbb{R}_+\,;\ f'_+(0) = +\infty$

5.51. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}+1}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.52. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}\,;\ f(x) = \dfrac{2x}{x^2-3} \cdot \dfrac{\operatorname{sgn}(\lg|x^2-3|))}{\sqrt{1+\lg^2|x^2-3|}}\,,$

je-li $x \in \mathcal{D}(f) - \{\pm\sqrt{2},\ \pm 2\}\,;$

$f'_\pm(-2) = f'_\pm(2) = \pm 4,\ f'_\pm(-\sqrt{2}) = f'_\pm(\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2}$

5.53. $\mathcal{D}(f) = \langle -a, a\rangle\,;\ f'(x) = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ v $(-a, a)\,;$

$f'_+(-a) = +\infty,\ f'_-(a) = 0$

5.54. $\mathcal{D}(f) = (-a, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{2a^2}{(a+x)(a^2+x^2)}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.55. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.56. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{x - |x|}{\sqrt{x^2-1}} - 2x \arccos\dfrac{1}{x}\,,$

je-li $|x| > 1\,;\ f'_-(-1) = -\infty,\ f'_+(1) = 0$

5.57. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = -2\operatorname{arctg}(\sin x)\cos x$ v $\mathbb{R}$

5.58. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}\operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$

5.59. $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$; $f'(x) = \arcsin^2 x$ v $(-1, 1)$; $f'_+(-1) = f'_-(1) = \frac{1}{4}\pi^2$

5.60. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f'(x) = \dfrac{\lg x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.61. $\mathcal{D}(f) = (-1, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{3x}{x^3+1}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.62. $\mathcal{D}(f) = \langle \alpha, \beta)$; $f'(x) = \sqrt{\dfrac{\beta - x}{x - \alpha}}$ v (α, β); $f'_+(\alpha) = +\infty$

5.63. $e^{\alpha x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!}\, \alpha^k x^k$

5.64. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$, kde $N = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & \text{pro každé liché } n \\ \frac{1}{2}n - 1 & \text{pro každé sudé } n \end{Bmatrix}$

5.65. $\dfrac{(2n-1)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n+1}}}$

5.66. $2^{n-1} g(x)$, kde $g(x)$ je rovno $\sin 2x$, $\cos 2x$, $-\sin 2x$, $-\cos 2x$ podle toho, zdali je n, $n-1$, $n-2$, $n-3$ dělitelné číslem 4

5.67. $f^{(n)}(0) = \begin{Bmatrix} 2(n-1)! & \text{pro každé liché } n \\ 0 & \text{pro každé sudé } n \end{Bmatrix}$

5.68. $(-1)^n n! \left(\dfrac{1}{x^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$

5.70. $n \geq 2 \Leftrightarrow f'(0)$ existuje; $n \geq 3 \Leftrightarrow f'$ je spojitá v bodě 0;
$n \geq 4 \Leftrightarrow f''(0)$ existuje; $n \geq 5 \Leftrightarrow f''$ je spojitá v bodě 0