6. Limity funkcí – 2. část

Limita podílu dvou funkcí je rovna podílu limit těchto funkcí jen tehdy, když má podíl limit smysl. V některých případech, kdy podíl limit smysl nemá, lze limitu podílu najít např. pomocí tohoto tvrzení:

Věta 6.1. (l'Hospitalovo pravidlo.) *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť jsou splněny tyto podmínky: Funkce f, g jsou diferencovatelné v jistém $P(a)$ a*

(1) $$\text{buď} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty\,.$$

Pak je

(2) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \quad \text{existuje-li limita vpravo.}$$

Analogická tvrzení platí pro limitu zprava v bodech $a < +\infty$ a zleva v bodech $a > -\infty$.

Příklad 6.1. Ilustrujme užití l'Hospitalova pravidla několika typickými příklady:

(3′) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,;$$

(3″) $$\lim_{x\to 0+} x \lg x = \lim_{x\to 0+} \frac{\lg x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0\,;$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,;$$

(5) $$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arccotg} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{1}{x^2+1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 1\,;$$

(6) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1\,;$$

(7) $$\lim_{x\to\pi/2} (\tfrac{1}{2}\pi - x) \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\pi - x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = 1\,.$$

Příklad 6.2. Větu 6.1 lze aplikovat na podíl f/g i několikrát: Splňují-li například nejen funkce f, g, ale i jejich derivace f', g', f'', g'' předpoklady V.6.1, je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)}\,, \quad \text{existuje-li poslední limita.}$$

Například tedy je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}\,. \tag{8}$$

Jak je patrné, při praktické aplikaci l'Hospitalova pravidla píšeme rovnosti v jistém smyslu „na dluh". Zpočátku totiž nemusíme vědět, zdali platí první tři rovnosti v (8), protože na příslušné zlomky nelze aplikovat větu o limitě podílu. První čitatel $f(x) := \sin x - x$ i příslušný jmenovatel $g(x) := x^3$ však má limitu 0 a totéž platí o $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$, $g''(x)$. Platnost prvních tří rovností v (8) však (za této situace) plyne z existence limity podílu $f'''(x)/g'''(x) = -\frac{1}{6}\cos x$. [1])

Příklad 6.3. Je-li $\alpha \le 0$, je (podle věty o limitě podílu) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha/e^x = 0$, protože čitatel $f(x) := x^\alpha$ má buď limitu 0, nebo 1, jmenovatel $g(x) := e^x$ limitu $+\infty$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}_+$, diverguje čitatel i jmenovatel do $+\infty$; je-li n nejmenší přirozené číslo větší nebo rovné α, lze n-krát aplikovat l'Hospitalovo pravidlo, protože funkce $g(x) = g'(x) = \ldots = g^{(n-1)}(x) = e^x$ má v $+\infty$ limitu $+\infty$. Dostaneme tak rovnosti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\,x^{\alpha-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\,(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}}{e^x} = \cdots \\ \cdots &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}}{e^x} = 0; \end{aligned} \tag{9}$$

poslední z nich plyne z věty o limitě podílu, protože $x^{\alpha-n}$ má buď limitu 0, nebo 1.

Poznámka 6.1. l'Hospitalovým pravidlem lze počítat nejen některé limity podílů, ale i např. rozdílů nebo součinů; před aplikací pravidla je ovšem třeba rozdíl resp. součin upravit na vhodný podíl (sr. s (3″), (4), (5), (7)). To je možné vždy, ale úprava není dána jednoznačně; označíme-li $F := 1/f$, $G := 1/g$, je například

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{G(x)} = \frac{G(x) - F(x)}{F(x)\,G(x)}\,, \tag{10′}$$

$$fg = \frac{f}{G} = \frac{g}{F}\,. \tag{10″}$$

Daný výraz se vždy snažíme upravit na zlomek, jehož čitatel i jmenovatel má co nejjednodušší derivaci. V příkladu (3″) by např. nevedlo k cíli, kdybychom – na rozdíl od uvedené úpravy – ponechali x v čitateli a do jmenovatele dali $1/\lg x$; podíl derivací by totiž v tom případě byl roven $-x\lg^2 x$, což je složitější než součin, z něhož jsme vyšli. Hlavním cílem v příkladech (3″) a (5) bylo odstranit derivováním transcendentní funkci $\lg x$ resp. $\operatorname{arccotg} x$, jejíž přítomnost způsobuje, že numerickou hodnotu příslušné limity nevidíme na první pohled. □

V Př. 6.1 jsme vypočítali limitu několika součinů; uveďme ještě příklad na limitu rozdílu:

---

[1]) Kdyby v podobné situaci limita podílu třetích derivací neexistovala, nezbylo by než konstatovat, že *l'Hospitalovo pravidlo nevede k cíli*; z toho by samozřejmě vůbec neplynulo, že výchozí limita neexistuje – sr. s Př. 6.7.

Příklad 6.4. Je

$$\text{(11)} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{cotg} x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=0\,.$$

Poznámka 6.2. Pomocí l'Hospitalova pravidla lze počítat i limity některých funkcí tvaru $f(x)^{g(x)} = \exp(h(x))$, kde $h(x) := g(x)\lg f(x)$. Najdeme-li limitu funkce $h(x)$, stačí uvážit, že (podle V.4.1)

$$\text{(12)} \qquad \lim_{x\to a} h(x) = A \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{pro} & A=-\infty \\ \exp A & \text{pro} & A\in\mathbb{R} \\ +\infty & \text{pro} & A=+\infty \end{array}\right\}.$$

Existují-li obě limity $\lim g(x)$, $\lim \lg f(x)$, nemá jejich součin smysl, právě když je jedna z nich rovna 0 a druhá je nekonečná; to odpovídá těmto situacím:

1) $\lim g(x) = 0$ a $\lim f(x)$ je rovna buď 0, nebo $+\infty$;

2) $\lim g(x) = \pm\infty$ a $\lim f(x) = 1$.

Doufáme, že ani čtenář, který má (např. v důsledku chybného výkladu ve škole) tendenci nahrazovat limitní přechod dosazením, nebude umocňovat čísla $\pm\infty$ na nultou a číslo 1 na $\pm\infty$ – „mocniny“ $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$ by měly být každému podezřelé. Připomeňme, že *tyto symboly nejsou definovány a nemělo by smysl definovat je, protože by se tím nic nezískalo.*

Skutečně velmi nebezpečná však může být pro nezkušeného studenta situace, kdy $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, *protože výraz* 0^0 *je definován jako* 1, *zatímco* $\lim f(x)^{g(x)}$ *může být nejen rovna kterémukoli nezápornému číslu, ale nemusí vůbec existovat!*

Dokládá to nejen následující příklad, ale také Př. 6.16 a cvičení 6.77 – 6.84.

Příklad 6.5. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) := x$, $g(x) := \alpha/\lg x$ všude v $(0,1)$, je $f(0+) = g(0+) = 0$. Protože

$$x^{\alpha/\lg x} = \exp\left(\frac{\alpha \lg x}{\lg x}\right) \equiv e^\alpha$$

všude v $(0,1)$, je i $\lim_{x\to 0+} f(x)^{g(x)} = e^\alpha$, což může být jakékoli číslo z $\mathbb{R}_+$.

Je-li $f(x) := \exp(-x^2)$, $g_1(x) := 1/x$, $g_2(x) := -1/x$, mají tyto funkce v $+\infty$ limitu 0 a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g_1(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)^{g_2(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty\,.$$

Je-li $g_3(x) := (\cos x)/x$, je $g_3(+\infty-) = 0$, funkce $F(x) := f(x)^{g_3(x)} = e^{-x\cos x}$ však v $+\infty$ limitu *nemá* – např. proto, že pro $n\to\infty$ je $F(2n\pi) = \exp(-2n\pi) \to 0$ a $F((2n+1)\pi) = \exp((2n+1)\pi) \to +\infty$.

Poznámka 6.3. Je zajímavé (ale bohužel smutné), jak dlouho se na různých školách (včetně vysokých) a v nejrůznějších učebnicích a sbírkách vzorců udržuje historický termín *neurčitý výraz*. Uvádí se jich několik:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Komentujme podrobněji např. „neurčitý výraz $0/0$“, který zřejmě souvisí s limitou podílu $f(x)/g(x)$ v případě, že limita čitatele i jmenovatele je rovna nule.

Přístup k podobným otázkám se nejen v dobách, kdy žili slavní matematikové Guillaume François Antoine de l'Hospital, sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm von Leibniz, ale ještě mnohem později, zásadně lišil od nynějšího způsobu uvažování. Když se začaly počítat limity, počítaly se nutně i limity zlomků; pokud limita A čitatele byla konečná a limita B jmenovatele konečná nenulová, byla (a je) limita podílu rovna A/B. V některých případech, kdy limita čitatele byla nenulová, limita jmenovatele nulová, se též našlo jakési „řešení“ – napíšeme $A/0$ a řekneme, že je to nekonečno; se znaménkem si nebudeme příliš lámat hlavu, stejně někdy vychází zprava jiné než zleva. [2]) V případě, že i čitatel má limitu 0, budeme postupovat analogicky: napíšeme $0/0$ jako „výsledek“ a *teprve pak* začneme uvažovat, co tento záhadný symbol znamená.

Z hlediska dnešní logiky je podobný postup *naprosto nepřijatelný*. Je zřejmé, že se jedná o snahu nahradit počítání limity dosazením, což – jak čtenář již dobře ví – není obecně možné. Tím, že napíšeme $0/0$ a řekneme, že jde o neurčitý výraz, nejen že *nic neřešíme, ale zatemňujeme podstatu problému*:

Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, *nelze o* $\lim (f(x)/g(x))$ *obecně nic říci, protože limita podílu může být* (*podle situace*) *rovna jakémukoli číslu z* $\mathbb{R}^*$ *a nemusí dokonce ani existovat.*

Tuto „smutnou skutečnost“ ilustrují triviální příklady – např. podíl $\sin(\alpha x)/x$ má v bodě 0 limitu α, což může být jakékoli číslo z $\mathbb{R}$. Podíl $0/0$ *nezavádíme* (*nedefinujeme*) proto, že bychom tím zřejmě nic nezískali – ať se budeme jakkoli snažit, *nikdy nebude platit obecná věta, že limita podílu je rovna podílu limit*. V souvislosti s tím naopak říkáme, že podíl $0/0$ *nemá smysl. Tento „výraz“ není tedy z logického hlediska neurčitý, ale nesmyslný*.

Podobně je tomu s ostatními „neurčitými výrazy“ [3]), které jsme uvedli, *s výjimkou mocniny* 0^0, jejíž zařazení mezi tyto výrazy je skutečně již na pováženou, protože (jak jsme ukázali v Po. 6.2 a v Př. 6.5) může méně zkušeného studenta dovést ke zcela falešným závěrům.

---

[2]) I dnes najdeme v některých sbírkách vzorců z *reálné* analýzy rovnost $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$; některé počítačové programy v podobných případech dávají „výsledek“ ve tvaru $1/0$.

[3]) Po anglickém středověkém filozofu-scholastikovi Williamovi of Occam se *Occamovou břitvou* nazývá princip nezavádění hypotéz (obecněji: čehokoli, např. názvů, symbolů apod.), které (za dané situace) nejsou nutně potřebné. (V originále zněl princip takto: „Assumptions introduced to explain a thing must not be multiplied beyond necessity.“) Dnešní věda se tímto principem dost důsledně řídí, i když jej, jak ukazuje užívání zbytečného a navíc zavádějícího názvu „neurčitý výraz“, někteří učitelé matematiky bohužel ignorují.

Příklad 6.6. Ptejme se, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje limita

$$\lim_{x\to 0} (x^n + \cos x)^{1/x^2}\,; \tag{13}$$

základ má limitu 1, exponent limitu $+\infty$. Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\lg(x^n + \cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0\pm} g_n(x), \text{ kde } g_n(x) := \frac{nx^{n-1} - \sin x}{x^n + \cos x}\,\frac{1}{2x}\,,$$

a to za předpokladu, že příslušná limita funkce g_n existuje. To však podstatně závisí na n, protože

$$\lim_{x\to 0\pm} g_1(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 0} g_2(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} g_n(x) = -\tfrac{1}{2} \text{ pro všechna } n > 2\,.$$

Limita (13) pro $n = 1$ tedy neexistuje, protože příslušná limita zprava resp. zleva je rovna $+\infty$ resp. 0. Je-li $n > 1$, limita (13) existuje; je rovna $e^{1/2}$ pro $n = 2$ a $e^{-1/2}$ pro všechna $n > 2$.

Poznamenejme ještě, že

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}, \tag{13*}$$

protože podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x}\,\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}\,.$$

I v (13*) má základ limitu 1, exponent limitu $+\infty$; přidáme-li však k základu „malou“ funkci x^n (mající v bodě 0 limitu 0), výsledná limita (13) může být úplně jiná, protože nezáleží jen na tom, jakou má základ limitu, ale také na tom, „jak rychle“ se k této limitě blíží.

Tento příklad má varovat před ukvapenými úsudky typu „protože se základ změnil jen nepatrně, limita celého výrazu se asi nezmění“.

Poznámka 6.4. *Bylo by omylem domnívat se, že l'Hospitalovo pravidlo je za všech okolností nejlepší metodou výpočtu limity podílu, nebo snad dokonce jedinou známou metodou.*

Za prvé se totiž může stát, že po derivování čitatele a jmenovatele dostaneme zlomek složitější, než byl zlomek původní. Za druhé je možné, že limita podílu $f(x)/g(x)$ existuje, ale limita podílu $f'(x)/g'(x)$ neexistuje (takže není splněn jeden z předpokladů l'Hospitalova pravidla).

Za třetí je aplikace l'Hospitalova pravidla zbytečná tam, kde vystačíme se znalostí derivací. Limity $\lim_{x\to\pm\infty} x(3^{1/x} - 2^{1/x})$ lze najít např. takto: Napíšeme $1/x$ místo x, čímž uvedené limity převedeme na limity $\lim_{x\to 0\pm}(3^x - 2^x)/x$, což jsou – *jak bychom měli na první pohled rozeznat* – derivace funkce $3^x - 2^x$ v bodě 0 zprava a zleva. Protože je $(a^x)' = a^x \lg a$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $a \in \mathbb{R}_+$, je tedy

$$\lim_{x\to\pm\infty} x(3^{1/x} - 2^{1/x}) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{3^x - 2^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \lg 3 - \lg 2 = \lg\frac{3}{2}\,.$$

Za čtvrté: Při výpočtu limity některých zlomků bychom museli l'Hospitalovo pravidlo užít mnohokrát, čímž by se čitatel nebo jmenovatel mohl nadměrně zkomplikovat. *Mnohdy vede pohodlnější a rychlejší cesta k výpočtu limity přes tzv. Taylorovy polynomy.*

První dvě situace budeme nyní ilustrovat jednoduchým příkladem; pak vysvětlíme, co jsou Taylorovy polynomy a jak lze pomocí nich některé limity najít rychleji a elegantněji než l'Hospitalovým pravidlem.

Příklad 6.7. Funkce $f(x) := x$, $g(x) := x + \lg x \cdot \sin x$ mají v $+\infty$ limitu $+\infty$, přičemž

$$(14) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\lg x\,\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{\lg x}{x}\,\sin x} = 1\,,$$

protože $(\lg x)/x \to 0$ a $\sin x$ je omezená funkce. Podíl

$$(14') \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin x}{x}+\lg x\,\cos x} = \frac{x}{x+\sin x + x\,\lg x\,\cos x}\,,$$

který je složitější než podíl původní, přitom pro $x \to +\infty$ limitu nemá – např. proto, že se jeho jmenovatel anuluje v nekonečně mnoha bodech a_n divergujících do $+\infty$.[4]) Z toho je patrné, že *l'Hospitalovo pravidlo nelze v tomto případě užít, ačkoli limita* (14) *existuje.* □

Je-li funkce f definována v jistém okolí $U(a)$ jistého bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje-li pro některé celé číslo $n \geq 0$ konečná derivace $f^{(n)}(a)$, nazývá se funkce

$$(15) \qquad \mathcal{T}^f_{a,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R},$$

n-tý Taylorův polynom funkce f o středu a; je-li ze souvislosti zřejmé, o kterou funkci f a o který bod a se jedná, můžeme jej stručněji značit např. $\mathcal{T}_n(x)$.

Taylorovy polynomy užijeme *k limitní aproximaci* příslušných funkcí. Několik nových pojmů a označení nám dovolí jednoduše vysvětlit, co se tím míní, a umožní nám s Taylorovými polynomy efektivně pracovat.

Je-li $a \in \mathbb{R}^*$ a jsou-li f, g dvě funkce definované v jistém $P(a)$, bude symbol

$$(16) \qquad f(x) = o(h(x)) \quad \text{pro} \quad x \to a$$

znamenat, že

$$(17) \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\,;$$

---

[4]) Spojitá funkce ve jmenovateli posledního zlomku v (14′) má pro každé $n \in \mathbb{N}$ v bodě $2n\pi$ hodnotu $2n\pi(1+\lg(2n\pi)) > 0$, v bodě $(2n+1)\pi$ hodnotu $(2n+1)\pi(1-\lg((2n+1)\pi)) < 0$; někde mezi body $2n\pi$, $(2n+1)\pi$ se proto anuluje.

jsou-li f, g, h tři funkce definované v jistém $P(a)$, bude zápis

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \text{ pro } x \to a \tag{18}$$

znamenat, že

$$f(x) - g(x) = o(h(x)) \text{ pro } x \to a. \tag{19}$$

Analogicky se definují symboly, v nichž je buď „$x \to a+$“, nebo „$x \to a-$“ místo „$x \to a$“. Symbolické zápisy (16) resp. (18) čteme: „$f(x)$ *je malé ó* $h(x)$“ resp. „$f(x)$ *je (rovno)* $g(x)$ *plus malé ó* $h(x)$ *pro* $x \to a$“.

Poznámka 6.5. Za situace (16) jsou prakticky důležité jen případy, kdy jsou obě limity $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$ rovny buď 0, nebo $\pm\infty$. První případ odpovídá názorné představě, že „*pro* $x \to a$ *se* $f(x)$ *blíží k nule podstatně rychleji než* $h(x)$“ (graf f se „v blízkosti bodu a“ přimyká k ose x podstatně lépe než graf h); ve druhém případě však naopak „$f(x)$ *diverguje pro* $x \to a$ *do* $\pm\infty$ *podstatně pomaleji než* $h(x)$“ (bod $(x, h(x))$ je „pro x blízká k a“ podstatně dále od osy x než bod $(x, f(x))$. Jistě nemusíme připomínat, že tyto limitní pojmy nemají nic společného s *hodnotami* funkcí f a h v bodě a samém.

Při této terminologii jsou jistě srozumitelné např. tyto výroky:

A. *Je-li* $\beta > \alpha > 0$, *roste* x^β *pro* $x \to +\infty$ *do* $+\infty$ *podstatně rychleji než* x^α. (Je $x^\alpha/x^\beta \to 0$.)

B. e^{-x} *konverguje k* 0 *pro* $x \to +\infty$ *podstatně rychleji než kterákoli záporná mocnina* x^a. (Pro každé $a \in \mathbb{R}_-$ je $e^{-x}/x^a \to 0$ neboli $x^a e^x \to +\infty$.)

C. $\lg x$ *diverguje pro* $x \to 0+$ *do* $-\infty$ *podstatně pomaleji, než kterákoli záporná mocnina* x^a *diverguje do* $+\infty$. (Je $\lg x/x^a \to 0$ neboli $x^b \lg x \to 0$ pro každé $b \in \mathbb{R}_+$.)
□

Uveďme nyní některé základní vlastnosti symbolu „malé o“: [5])

$$f(x) = o(h(x)),\ g(x) = o(h(x)) \Rightarrow f(x) \pm g(x) = o(h(x)); \tag{20}$$

$$f(x) = o(h(x)),\ g(x) = o(k(x)) \Rightarrow f(x)g(x) = o(h(x)k(x)); \tag{21}$$

$$\textit{je-li } 0 \neq \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{k(x)} \neq \pm\infty, \textit{ je } f(x) = o(h(x)) \Leftrightarrow f(x) = o(k(x)). \tag{22}$$

Dále: *Pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *je*

$$f(x) = o(h(x)) \Rightarrow f(x^\alpha) = o(h(x^\alpha)) \textit{ pro } x \to 0+ \textit{ a pro } x \to +\infty; \tag{23}$$

je-li $\alpha \in \mathbb{N}$, *platí* (23) *pro* $x \to 0$ (*„oboustranně“*).

Příklad 6.8. Podle (4) a (3′) je

$$x = o(e^x) \text{ a } \lg x = o(x) \textit{ pro } x \to +\infty.$$

[5]) V relacích (20) – (22) vynecháváme pro stručnost symbol $x \to a$ ($x \to a+$, $x \to a-$).

Obecněji, pro *každá dvě čísla* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$ *je*

$$x^\beta = o(e^{\alpha x}) \quad \textit{pro} \quad x \to +\infty, \tag{24}$$

$$\lg^\beta x = o(x^\alpha) \quad \textit{pro} \quad x \to +\infty, \tag{25}$$

$$|\lg x|^\beta = o(x^{-\alpha}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0+. \tag{26}$$

Platí též např. tyto relace:

$$\alpha < \beta \Rightarrow e^{\alpha x} = o(e^{\beta x}) \quad \textit{pro} \quad x \to +\infty, \tag{27}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}_+,\ \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow e^{\alpha x} = o(e^{\beta x^2}) \quad \textit{pro} \quad x \to +\infty. \tag{28}$$

Věta 6.2 (o limitní aproximaci funkcí polynomy). *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, *nechť* $n \geq 0$ *je celé číslo a nechť funkce* f *má v bodě* a *spojitou* n*-tou derivaci. Pak je*

$$f(x) = \mathcal{T}^f_{a,n}(x) + o((x-a)^n) \quad \textit{pro} \quad x \to a. \tag{29}$$

Obráceně: Jediný polynom p *stupně nejvýše* n, *který splňuje podmínku*

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n) \quad \textit{pro} \quad x \to a, \tag{30}$$

je n*-tý Taylorův polynom funkce* f *o středu* a. □

Abychom mohli pomocí Taylorových polynomů počítat běžné limity, je nutné spolehlivě znát několik základních aproximací:

Pro každé celé číslo $n \geq 0$ *je*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \textit{pro} \quad x \to 0; \tag{31}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0; \tag{32}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0; \tag{33}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0; \tag{34}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0; \tag{35}$$

$$\lg(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \textit{pro} \quad x \to 0; \tag{36'}$$

$$\lg(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \textit{pro} \quad x \to 0; \tag{36''}$$

(37) $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \quad \textit{pro} \quad x \to 0 \quad \textit{a každé} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

(38) $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0;$$

(39) $$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0.$$

Poznámka 6.6. Jak snadno nahlédneme, je *n-tý Taylorův polynom součtu resp. rozdílu dvou funkcí roven součtu resp. rozdílu jejich n-tých Taylorových polynomů.*

Taylorovy polynomy lze i („zkráceně“) *násobit*, a to takto: *Jsou-li*

(40) $$\mathcal{T}^f_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_j (x-a)^j, \quad \mathcal{T}^g_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

n-té Taylorovy polynomy funkcí f, g, je n-tý Taylorův polynom součinu fg roven součtu všech výrazů tvaru $a_j b_k (x-a)^{j+k}$, kde $j+k \le n$, tj. roven

(40′) $$\mathcal{T}^{fg}_{a,n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} (x-a)^m .$$

Jinými slovy: Podobně jako při tzv. zkráceném násobení čísel násobíme jen ty dvojice sčítanců, u nichž je výsledný mocnitel výrazu $(x-a)$ nejvýše roven n. Všechny takové součiny sečteme a zpravidla i uspořádáme tak jako ve (40′).

Příklad 6.9. Abychom získali pátý Taylorův polynom funkce $e^{-x^2} \arcsin x$ o středu 0, násobíme pátý Taylorův polynom prvního faktoru pátým Taylorovým polynomem druhého faktoru, ale ponecháme si jen mocniny x^m s $m \le 5$:

(41) $$e^{-x^2} \arcsin x = \big(1 - x^2 + \tfrac{1}{2} x^4 + o(x^5)\big)\big(x + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{3}{40} x^5 + o(x^5)\big)$$
$$= x + \big(-1 + \tfrac{1}{6}\big) x^3 + \big(\tfrac{3}{40} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\big) x^5 + o(x^5) = x - \tfrac{5}{6} x^3 + \tfrac{49}{120} x^5 + o(x^5).$$

Všechny ostatní součiny „přešly“ (podle (20) a (21)) do $o(x^5)$. □

Taylorovy polynomy lze též *dělit*:

Příklad 6.10. Pátý Taylorův polynom funkce $\operatorname{tg} x$ v bodě 0 lze získat (opět „zkráceným“) dělením pátého Taylorova polynomu funkce $\sin x$ pátým Taylorovým polynomem funkce $\cos x$. Běžným algoritmem dostaneme tento výsledek:

(42) $$\operatorname{tg} x = \big(x - \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{120} x^5 + o(x^5)\big) : \big(1 - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{24} x^4 + o(x^5)\big)$$
$$= x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{2}{15} x^5 + o(x^5).$$

Poznámka 6.7. *Dělení Taylorových polynomů vede občas k funkci, která sice není polynomem, ale kterou lze přesto užít k limitní aproximaci podílu.*

Tak např. dělením pátých Taylorových polynomů funkcí $\cos x$ a $\sin x$ dostaneme tento výsledek:

$$\begin{aligned}\text{(43)}\qquad \operatorname{cotg} x &= \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) : \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) \\ &= x^{-1} - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{45}x^3 + o(x^4);\end{aligned}$$

z něj např. plyne, že

$$\text{(43')}\qquad \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{45}x^3 + o(x^4), \quad \frac{1 - x\operatorname{cotg} x}{x^2} \to \tfrac{1}{3} \ \textit{pro} \ x \to 0. \quad \square$$

Uveďme několik příkladů situací, kdy je užití Taylorových polynomů rychlejší a pohodlnější než aplikace l'Hospitalova pravidla.

Příklad 6.11. Při výpočtu limity

$$\text{(44)}\qquad A := \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$$

najdeme nejdříve nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro něž je n-tý Taylorův polynom jmenovatele nenulový. Protože

$$\text{(45)}\qquad \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x = (x + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = \tfrac{2}{3}x^3 + o(x^3),$$

je $n = 3$. Po tomto zjištění sestavíme třetí Taylorův polynom čitatele:

$$\text{(46)}\qquad \sin x - \arcsin x = (x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - (x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = -\tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Nakonec vydělíme rozdíl (46) rozdílem (45) a zkrátíme výrazem $\frac{1}{3}x^3$; je tedy

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + o(1)}{2 + o(1)} = -\frac{1}{2}.$$

Poznamenejme, že *symbol $o(1)$ znamená jakoukoli funkci konvergující k nule.*

Příklad 6.12. Při výpočtu limity

$$\text{(47)}\qquad B := \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{2 + x^3}}{\sqrt{3 + x^3} - \sqrt{4 + x^3}}$$

nelze Taylorovy polynomy užít přímo, protože výrazy pod odmocninami mají limitu $+\infty$. Po úpravě, po níž budou mít odmocňované výrazy tvar $1 + o(1)$, bude však možné užít vzorec (37).

Jmenovatel napíšeme proto ve tvaru

$$\begin{aligned}\sqrt{3+x^3}-\sqrt{4+x^3} &= \sqrt{x^3}\,\big(\sqrt{1+3x^{-3}}-\sqrt{1+4x^{-3}}\,\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(\big(1+\tfrac{3}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)-\big(1+2x^{-3}+o(x^{-3})\big)\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(-\tfrac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)\,,\end{aligned}$$

čitatel ve tvaru

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^3}-\sqrt{2+x^3} &= \sqrt{x^3}\,\big(\sqrt{1+x^{-3}}-\sqrt{1+2x^{-3}}\,\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(\big(1+\tfrac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)-\big(1+x^{-3}+o(x^{-3})\big)\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(-\tfrac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)\,.\end{aligned}$$

Z toho ihned plyne, že

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}\,\big(-\frac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)}{\sqrt{x^3}\,\big(-\frac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=1\,.$$

Příklad 6.13. Vypočtěme – pokud existuje – limitu pro $x\to 0$ funkce

$$\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\operatorname{cotg} x}=\exp f(x)\,,\ \text{ kde }\ f(x):=\operatorname{cotg} x\cdot\lg\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right). \tag{48}$$

Z identit

$$\frac{2}{\pi}\arccos x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-(x+o(x))\right)=1-\left(\frac{2}{\pi}x+o(x)\right)$$

podle (36″) (a (22)) plyne, že

$$\lg\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)=-\frac{2}{\pi}x+o(x)\quad\text{pro}\quad x\to 0\,.$$

Vzhledem k (43) je proto

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}+o(1)\right)\left(-\frac{2}{\pi}x+o(x)\right)=-\frac{2}{\pi}+o(1)\to-\frac{2}{\pi}\quad\text{pro}\quad x\to 0\,,$$

takže

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\operatorname{cotg} x}=\lim_{x\to 0}\exp f(x)=e^{-2/\pi}\,.$$

Příklad 6.14. Je-li $\varphi(t)\to a$ pro $t\to\alpha$ a $\varphi(t)\neq a$ všude v jistém $P(\alpha)$, platí podle věty o limitě superpozice implikace

$$f(x)=g(x)+o(h(x))\ \text{ pro }\ x\to a\ \Rightarrow\ f(\varphi(t))=g(\varphi(t))+o(h(\varphi(t)))\ \text{ pro }\ t\to\alpha\,.$$

Například při výpočtu čtvrtého Taylorova polynomu funkce $\exp(\arcsin x)$ o středu 0 bude $a = \alpha = 0$ a místo $o(\arcsin^4 x)$ lze (podle (22)) psát $o(x^4)$; je tedy

$$\begin{aligned}
&\exp(\arcsin x) = \\
&= 1 + \arcsin x + \tfrac{1}{2}\arcsin^2 x + \tfrac{1}{6}\arcsin^3 x + \tfrac{1}{24}\arcsin^4 x + o(\arcsin^4 x) \\
&= 1 + \big(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\big) + \tfrac{1}{2}\big(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\big)^2 + \tfrac{1}{6}\big(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\big)^3 \\
&\quad + \tfrac{1}{24}\big(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\big)^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \big(x + \tfrac{1}{6}x^3\big) + \tfrac{1}{2}\big(x^2 + \tfrac{1}{3}x^4\big) + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{24}x^4 + o(x^4) \quad \text{pro} \quad x \to 0;
\end{aligned}$$

zcela analogicky odvodíme identitu

$$\exp(\sin x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^4) \quad \text{pro} \quad x \to 0.$$

Tyto dvě identity nám dovolí rozhodnout, zdali *existuje číslo* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že limita*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\arcsin x) - \exp(\sin x)}{x^n} \tag{49}$$

je konečná a nenulová. Protože se čitatel rovná

$$\begin{aligned}
(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)) \\
= \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{pro} \quad x \to 0,
\end{aligned}$$

splňuje uvedenou podmínku číslo $n = 3$ a příslušná limita (49) je pak rovna $\frac{1}{3}$.

Z dokázaného výsledku dále plyne, že limita (49) je rovna 0 pro každé celé číslo $n < 3$. Pro sudá čísla $n > 3$ limita (49) neexistuje, protože příslušná limita zprava je $+\infty$ a zleva $-\infty$; pro lichá $n > 3$ je limita (49) rovna $+\infty$. [6])

Příklad 6.15. Při zjišťování, zdali existuje limita

$$A := \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(\sin^2 x) - \cosh^2(\operatorname{arctg}^2 x)}{\lg(1 + x^2 + x^4) - \lg(1 + x^2 - x^4)} \tag{50}$$

a čemu se rovná, začneme opět jmenovatelem: Protože pro $x \to 0$ je

$$\begin{aligned}
\lg(1 + x^2 + x^4) &= (x^2 + x^4) - \tfrac{1}{2}(x^2 + x^4)^2 + o((x^2 + x^4)^2) = x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4), \\
\lg(1 + x^2 - x^4) &= (x^2 - x^4) - \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)^2 + o((x^2 - x^4)^2) = x^2 - \tfrac{3}{2}x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

je jmenovatel $j(x)$ zlomku v (50) roven $2x^4 + o(x^4)$; budeme proto hledat čtvrtý Taylorův polynom čitatele.

---

[6]) Pro necelé exponenty n se situace dále komplikuje, protože mocnina x^n nemusí být pro $x < 0$ definována.

Pro $y \to 0$ je

$$\cos y = 1 - \tfrac{1}{2} y^2 + o(y^2), \quad \text{takže} \quad \cos^2 y = 1 - y^2 + o(y^2),$$

$$\cosh y = 1 + \tfrac{1}{2} y^2 + o(y^2), \quad \text{takže} \quad \cosh^2 y = 1 + y^2 + o(y^2),$$

a za y máme dosadit

$$\sin^2 x = (x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2 = x^2 + o(x^2)$$

resp.

$$\operatorname{arctg}^2 x = (x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2 = x^2 + o(x^2);$$

pro $x \to 0$ je tedy čitatel $c(x)$ zlomku v (50) roven

$$\big(1 - (x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4)\big) - \big(1 + (x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4)\big) = -2x^4 + o(x^4).$$

V důsledku toho je

$$\frac{c(x)}{j(x)} = \frac{-2x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} = \frac{-2 + o(1)}{2 + o(1)} \to -1$$

pro $x \to 0$, takže $A = -1$. Čtenář se může sám přesvědčit, že hledání této limity l'Hospitalovým pravidlem by bylo velice komplikované.

Příklad 6.16. Při výpočtu některých limit je výhodné užít jak l'Hospitalovo pravidlo, tak i Taylorovy polynomy. Například limitu

$$\lim_{x\to 0} (\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2)^{1/\lg|x|} \tag{51}$$

můžeme počítat takto: Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2)}{\lg|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\sinh 2x^2 + \sin 2x^2)}{\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2}, \tag{52}$$

přičemž

$$\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2 = (1 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4))^2 - (1 - \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4))^2 = 2x^4 + o(x^4),$$

$$2x^2(\sinh 2x^2 - \sin 2x^2) = 2x^2\big((2x^2 + o(x^2)) + (2x^2 + o(x^2))\big) = 8x^4 + o(x^4).$$

Limita na pravé straně (52) je tedy rovna 4 a totéž platí o limitě vlevo. Z toho plyne, že se limita (51) rovná e^4.

l'Hospitalovo pravidlo nám v tomto příkladu pomohlo odstranit nepříjemný zlomek (na levé straně (52)), jehož čitatel i jmenovatel má limitu $-\infty$, zatímco podíl derivací čitatele a jmenovatele je daleko jednodušší. Před dalším derivováním čitatele a jmenovatele jsme však dali přednost Taylorovým polynomům, protože tento postup je o něco přehlednější a vede k cíli rychleji.

Cvičení

Za předpokladu, že a, b, c, α, β, γ, δ, ε jsou (konečná) reálná čísla, A, B, C kladná (konečná reálná) čísla a $n \in \mathbb{N}$, vypočítejte – užitím l'Hospitalova pravidla nebo Taylorových polynomů nebo kombinací obou – tyto limity: [7])

6.01. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$, kde $a \neq b$

6.02. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lg(x^2 - x + 1)}{\lg(x^{10} + x - 5)}$

6.03. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \exp(-\frac{1}{2}x^2)}{x^4}$

6.04. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

6.05. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x}}{\cos ax - \cos bx}$, kde $|a| \neq |b|$

6.06. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi x$

6.07. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

6.08. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

6.09. $\lim\limits_{x\to+\infty} \lg(x(\pi - 2\operatorname{arctg} x))$

6.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^n}$

6.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^2+x) - \sin x + 3\cos x - 4}{\operatorname{arctg}^3 x}$

6.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

6.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\exp x^2 - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

6.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(\cos ax)}{\lg(\cos bx)}$, kde $b \neq 0$

---

[7]) U každého příkladu doporučujeme zvážit, která metoda povede snadněji a rychleji k cíli; před každým krokem je vhodné zamyslit se, zdali nelze aktuální situaci nějak zjednodušit.

6.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

6.16. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \cos\sqrt{x})^2}$

6.17. $\lim\limits_{x\to a} \Big(\sin^2 \dfrac{x-a}{2} \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi x}{2a}\Big), \quad \text{kde} \quad a \neq 0$

6.18. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (x - \tfrac{1}{2}\pi) \operatorname{tg} x$

6.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{\lg(1 - x^2 - x^4) - \lg(1 - x^2 + x^4)}$

6.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2 \sin x - \operatorname{arctg} x - x}$

6.21. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\Big(\operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+2}\Big)$

6.22. $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 - \exp(-x^2)}}$

6.23. $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{(1+x)\lg(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}\Big)$

6.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

6.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x\cos x} - \sqrt{1 - x\cos x}}{\lg(1 - x)}$

6.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x e^x) - \cos(x e^{-x})}{x^3}$

6.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^2 + 5x^4) - \exp(x^2 - 3x^4)}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)}$

6.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x - \operatorname{tg} x) - 1}{(\exp(\sin^2 x) - 1)^3}$

6.29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cosh x^2 - 1)\lg(\cos x)}{\sin^3 x \operatorname{tg}^3 x}$

6.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{cotg}(\sin x) - 1}{x^2}$

6.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt[3]{1 + \sin 3x}}{x(\lg(1+x) - \lg(1-x))}$

6.32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+x\,e^x)\,\sin 2x^2}{\lg(\cosh^2 x)}$

6.33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(2\sin x+\sqrt{1-4\operatorname{tg}^2 x})}{\lg(\operatorname{tg} x+\sqrt{1-x^2})}$

6.34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 x - x^2 \operatorname{tg}^2 x}{(\cosh x - \exp\frac{1}{2}x^2)^2}$

6.35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\,e^x \sin x} - \sqrt[3]{1+3\,e^x\sin x}}{\sinh(\arcsin x^2)}$

6.36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x-4x^2+x^3)e^x - \sqrt{1+4x-x^2}}{1-\sqrt{1+x^3}}$

6.37. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+\alpha x+\beta} - \sqrt[3]{x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon}\,\right)$

6.38. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x\,\arccos a^{-x}}{(1-\cos\sqrt{x})\,\arccos(1-x)}\,, \quad \text{kde} \quad a>1$

6.39. $\lim\limits_{x\to 0} \arccos \dfrac{(\cos x-1)(\operatorname{arctg} x - x)}{(\arcsin x - x)(\exp x^2 - 1)}$

6.40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+\operatorname{argsinh} 5x} - \sqrt[3]{1+\sinh 3x}}{\cos ax - \cos bx}\,, \quad \text{kde} \quad |a|\neq|b|$

6.41. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt[4]{1+x^4}\right)$

6.42. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+4} - 2\sqrt{x^2+3}\right)$

6.43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg^2(1+\sin x) - \lg^2(1+\arcsin x)}{x^n}$

6.44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\exp x - \exp(\sin x) - \exp(\arcsin x)}{x^n}$

6.45. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$

6.46. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

6.47. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\arccos x}{\pi}\right)^{1/x}$

6.48. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} 2x}$

6.49. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$

6.50. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

6.51. $\lim\limits_{x\to 0}\big(\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - x)\big)^{\operatorname{cotg} x}$

6.52. $\lim\limits_{x\to \pi/2+}(1-\cos x)^{\operatorname{tg}^2 x}$

6.53. $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\dfrac{4\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^{1/\arccos^2 x}$

6.54. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sinh x)^{\operatorname{arctg}(1/x)}$

6.55. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6(x-\sin x)}{\sin^3 x}\right)^{1/x^2}$

6.56. $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+x^2\big)^{1/\operatorname{arctg}^2 x}$

6.57. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\lg x+1}{2\lg^2 x-\lg x+1}\right)^{1/\sin \pi x}$

6.58. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\arccos x}{\operatorname{arctg}(1/x)}\right)^{1/x^3}$

6.59. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+1}{2e^{2x}-e^x+1}\right)^{1/\lg(1+x)}$

6.60. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{1/(4x-\pi)}$

6.61. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

6.62. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

6.63. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

6.64. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{A^x+B^x+C^x}{3}\right)^{1/x}$

6.65. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\exp\dfrac{\sin x}{x^2+1}-1\right)^{(x^2+1)/\arcsin x}$

6.66. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$

6.67. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sin x}{x}+\lg(1+x^2)\Big)^{1/x^2}$

6.68. $\lim\limits_{x\to 1}\big(1+\sin\pi x\big)^{\operatorname{cotg}\pi x}$

6.69. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\dfrac{x^2+1}{x^2+4}\Big)^{1/\operatorname{arccotg}^2 x}$

6.70. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(5\exp\dfrac{x}{x+2}-4\Big)^{x+2/x}$

6.71. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{2(1-\cos\sqrt{x})}{x}\Big)^{1/\lg(1-x)}$

6.72. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(2\,\dfrac{\sin x-x}{\operatorname{arctg}x-x}\Big)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

6.73. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{arctg}x}\Big)^{\sin x/(\exp x^2-1)}$

6.74. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1-\cos x}{\sqrt[4]{1+2x^2}-1}\Big)^{\operatorname{cotg}x/\operatorname{arctg}x}$

6.75. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+\dfrac{1-\cos x}{\arcsin x}\Big)^{x^2/(x-\operatorname{arctg}x)}$

6.76. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{\sin x}{\arcsin x}\Big)^{1/(\arcsin x-\sin x)}$

6.77. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{1}{x}-\operatorname{cotg}x\Big)^{x\lg^2 x}$

6.78. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\Big)^{1/\lg x}$

6.79. $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{a/\lg x}$

6.80. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{a/\lg|x|}$

6.81. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arccotg}x)^{1/\lg(\lg x)}$

6.82. $\lim\limits_{x\to 0+}(\arcsin x-\sin x)^{1/\lg(\operatorname{arctg}x)}$

6.83. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\dfrac{\lg(\lg x)}{\lg x}\Big)^{1/\lg(\lg(\lg x))}$

6.84. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\operatorname{arccotg}e^{x-1}-\operatorname{arccotg}e^{x+1})^{1/x}$

6.85. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} \operatorname{cotg}^2 x$

6.86. $\lim\limits_{x\to 0+} \exp(-\lg^2 x) \operatorname{cotg}^2 x$

6.87. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha((1+x)^{1/x} - x^{1/x})$

6.88. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha(\lg^2(x+1) - \lg^2 x)$

6.89. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \lg \dfrac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\operatorname{arctg} x}$

6.90. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \lg \dfrac{\lg(x+1)}{\lg x}$

Řešení

Pro funkce závislé na $n \in \mathbb{N}$ nebo na $\alpha \in \mathbb{R}$ (jako jsou např. funkce z příkladů 6.10 a 6.87–6.90) podává následující seznam řešení numerické hodnoty limit jen pro některá n resp. α, pro něž je limita konečná (což je např. v 6.10 hodnota 1/6 pro $n = 3$). Řešení pro ostatní n resp. α jsou z technických důvodů uvedena až na konci seznamu.

6.01. 1	**6.02.** $\frac{1}{5}$	**6.03.** $-\frac{1}{12}$
6.04. $\frac{3}{4}$	**6.05.** $1/(b^2 - a^2)$	**6.06.** $2/\pi$
6.07. $\frac{1}{4}$	**6.08.** 2	**6.09.** $\lg 2$
6.10. $\frac{1}{6}$ $(n = 3)$	**6.11.** $\frac{4}{3}$	**6.12.** $\frac{1}{2}$
6.13. $\frac{1}{9}$	**6.14.** a^2/b^2	**6.15.** $-\frac{1}{4}$
6.16. 1	**6.17.** a^2/π^2	**6.18.** -1
6.19. $-\frac{1}{4}$	**6.20.** $-\frac{1}{11}$	**6.21.** $\frac{1}{2}$
6.22. ± 1	**6.23.** $\frac{1}{2}$	**6.24.** $\frac{1}{6}$
6.25. -1	**6.26.** -2	**6.27.** -32
6.28. $-\frac{1}{18}$	**6.29.** $-\frac{1}{4}$	**6.30.** $-\frac{1}{6}$
6.31. $\frac{1}{4}$	**6.32.** 0	**6.33.** 2
6.34. $-\infty$	**6.35.** $\frac{1}{2}$	**6.36.** $\frac{44}{3}$
6.37. $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\gamma$	**6.38.** $2\sqrt{\lg a}$	**6.39.** 0
6.40. $2/(a^2 - b^2)$	**6.41.** $\frac{1}{2}$	**6.42.** $-\frac{1}{4}$ $(n = 3)$
6.43. $-\frac{2}{3}$ $(n = 4)$	**6.44.** $-\frac{1}{12}$ $(n = 5)$	**6.45.** e^2

6.46. $e^{-1/6}$	**6.47.** $e^{-2/\pi}$	**6.48.** e^{-1}
6.49. $e^{-1/3}$	**6.50.** 1	**6.51.** e^{-2}
6.52. $+\infty$	**6.53.** $e^{-1/\pi}$	**6.54.** e
6.55. $e^{9/20}$	**6.56.** e	**6.57.** $e^{-2/\pi}$
6.58. $e^{-1/\pi}$	**6.59.** e^{-1}	**6.60.** $e^{1/2}$
6.61. $e^{2/\pi}$	**6.62.** e	**6.63.** $+\infty$
6.64. $\sqrt[3]{ABC}$	**6.65.** e^2	**6.66.** $e^{1/2}$
6.67. $e^{5/6}$	**6.68.** e^{-1}	**6.69.** e^{-3}
6.70. e^5	**6.71.** $e^{1/12}$	**6.72.** $e^{11/20}$
6.73. $e^{-1/2}$	**6.74.** $e^{2/3}$	**6.75.** $e^{-3/2}$
6.76. 0	**6.77.** 1	**6.78.** e
6.79. e^a	**6.80.** e^{2a}	**6.81.** 0
6.82. e^3	**6.83.** 0	**6.84.** $e^{\mp 1}$
6.85. 0	**6.86.** 0	**6.87.** $1 \ (\alpha = 2)$
6.88. $0 \ (\alpha < 1)$	**6.89.** $2/\pi \ (\alpha = 2)$	**6.90.** $0 \ (\alpha \leq 1)$

Doplňky řešení

6.10. Limita je rovna 0 pro $n = 1$ a $n = 2$; je rovna $+\infty$ pro *lichá* $n > 3$ a neexistuje pro *sudá* $n > 3$, protože pak se limita zprava (zleva) rovná $+\infty$ $(-\infty)$.

6.42. Limita je rovna 0 pro $n = 1$ a $n = 2$; rovná se $+\infty$ pro všechna $n > 3$.

6.43. Limita je je rovna 0 pro $n = 1, 2, 3$; rovná se $-\infty$ pro *sudá* $n > 4$, neexistuje pro *lichá* $n > 4$.

6.44. Limita je rovna 0, je-li $1 \leq n \leq 4$; rovná se $-\infty$ pro *sudá* $n > 5$, neexistuje pro *lichá* $n > 5$.

6.87. Limita je rovna 0 pro $\alpha < 2$ a $+\infty$ pro $\alpha > 2$.

6.88. Limita je rovna $+\infty$ pro $\alpha \geq 1$.

6.89. Limita je rovna 0 pro $\alpha < 2$ a $+\infty$ pro $\alpha > 2$.

6.90. Limita je rovna $+\infty$ pro $\alpha > 1$.