9. Primitivní funkce

Říkáme, že funkce $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **primitivní funkcí** funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, je-li $F' = f$ všude v (a, b); množinu všech funkcí primitivních k f v (a, b) označíme $PF(f; a, b)$ [1]). Přechod od f k $F \in PF(f; a, b)$ se nazývá **integrace** funkce f; najdeme-li takovou funkci F resp. napíšeme-li f ve tvaru F', říkáme, že jsme ji **integrovali**.

Přechod k primitivní funkci je tedy operace obrácená k diferencování. Pozor však na terminologii: Platí-li rovnost $f(x) = F'(x)$ např. pro všechna $x \in \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, je F primitivní funkcí funkce f v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$, *nikoli však v* $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, *protože tato množina není interval*. Primitivní funkci jsme definovali jen v (otevřených) intervalech zejména proto, aby platila tato velice důležitá věta:

Věta 9.1. *Je-li $F \in PF(f; a, b)$, je $G \in PF(f; a, b)$, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G = F + c$ všude v (a, b).*

Kdybychom interval nahradili množinou, která je sjednocením (konečného nebo nekonečného počtu) disjunktních otevřených intervalů, tvrzení by samozřejmě *neplatilo*, protože konstanta c by v každém z těchto intervalů mohla být jiná.

Věta 9.2. (Existenční věta.) *Každá spojitá funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má v (a, b) primitivní funkci.*

Má-li funkce f v (a, b) jednu primitivní funkci, má jich tam podle V. 9.1 nekonečně mnoho, přičemž každé dvě z nich se liší jen o aditivní konstantu. K tomu, abychom získali úplný přehled o všech funkcích primitivních k f v (a, b), stačí tedy najít jednu z nich.

Věta 9.3. (Integrace per partes.) *Je-li $F \in PF(f; a, b)$, $G \in PF(g; a, b)$, platí všude v (a, b) identita*

$$Fg = (FG)' - fG. \tag{1}$$

Přestože identita (1) je jen jinak napsaným vzorcem $(FG)' = F'G + FG'$ pro diferencování součinu, je velmi užitečným nástrojem hledání primitivních funkcí.

Věta 9.4. (1. substituční metoda – krátce 1SM.) *Předpokládejme, že funkce $\omega : (a, b) \to (A, B)$ je diferencovatelná všude v (a, b) a že funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má tvar $f = (g \circ \omega)\omega'$, kde $g : (A, B) \to \mathbb{R}$. Pak platí:*

Je-li G funkce primitivní ke g v (A, B), je funkce $G \circ \omega$ funkce primitivní k f v (a, b).

Věta 9.5. (2. substituční metoda – krátce 2SM.) *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to_{\text{na}} (a, b)$ splňuje všude v (α, β) podmínku $0 \neq \omega' \neq \pm\infty$. Pak platí:*

Je-li G funkce primitivní ke $g := (f \circ \omega)\omega'$ v (α, β), je $F := G \circ \omega_{-1}$ funkce primitivní k f v (a, b).

[1]) Samozřejmě není vyloučen případ, že tato množina je prázdná.

Poznámka 9.1. Abychom při integraci dané funkce volili správně mezi oběma substitučními metodami, všimněme si několika charakteristických rozdílů mezi nimi.

1. Obě metody vyžadují *diferencovatelnost* substituující funkce ω. Ve 2SM se však předpokládá, že $0 \neq \omega' \neq \pm\infty$ všude v (α, β), z čehož podle V.7.4 plyne, že funkce ω je *ryze monotónní*; nic takového se v 1SM *nežádá*.

2. Při aplikaci 2SM se žádá *rovnost* $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$, zatímco v 1SM stačí platnost *inkluze* $\omega((a, b)) \subset (A, B)$.

3. Při aplikaci 1SM musí mít integrovaná funkce $f(x)$ tvar $g(\omega(x))\omega'(x)$; často se stává, že $f(x)$ v takovém tvaru sice napsána není, ale vhodná úprava ji na tento tvar převede. P ř í k l a d : Je

$$\frac{1}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 4\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 4} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

v každém otevřeném intervalu, který neobsahuje žádný lichý násobek čísla $\frac{1}{2}\pi$; druhý zlomek vpravo je derivací funkce $\omega(x) := \operatorname{tg} x$, $g(y) := 1/(y^2 - 2y + 4)$.

Při aplikaci 2SM do $f(x)$ dosadíme $x = \omega(t)$ a *výsledek nezapomeneme vynásobit derivací $\omega'(t)$ substituující funkce*; substituci volíme tak, aby nová funkce $g(t) := f(\omega(t))\omega'(t)$ byla (z hlediska integrace) jednodušší než původní funkce $f(x)$. Podaří-li se nám nalézt funkci $G(t)$ primitivní ke $g(t)$, vrátíme se k původní proměnné x dosazením $t = \omega_{-1}(x)$; vzniklá funkce $F(x) := G(\omega_{-1}(x))$ bude pak funkcí primitivní k $f(x)$.

Porovnejme ještě jednou jednotlivé kroky obou substitučních metod:

	1SM:	2SM:
daná funkce	$f(x) = g(\omega(x))\,\omega'(x)$	$f(x)$
substituce	$\omega(x) = y$	$x = \omega(t),\ \omega'(t) = \dots$
pomocná integrace	$g(y) = G'(y)$	$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = G'(t)$
výsledek	$f(x) = (G(\omega(x)))'$	$f(x) = (G(\omega_{-1}(x)))'$

Jak je patrné, jsou předpoklady 1SM liberálnější; proto *dáváme přednost* 1SM *před* 2SM, *kdykoli je to jen možné*. □

Podobně jako při diferencování je i při praktickém integrování nutná znalost některých základních identit; mnohé z nich jsou jen přepisem vzorců, s nimiž jsme se setkali v kapitole 5. V následujících identitách je $\alpha \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$(3') \qquad x^\alpha = \Big(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big)' \quad \text{v} \quad \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \text{pro všechna celá } \alpha \geq 0 \\ \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ & \text{pro všechna celá } \alpha < -1 \\ \mathbb{R}_+ & \text{pro všechna } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{array}\right\};$$

$$(3'') \qquad \frac{1}{x} = (\lg|x|)' \quad \text{v} \quad \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-;$$

$$(4) \qquad \frac{1}{r^2 + x^2} = \Big(\frac{1}{r}\operatorname{arctg}\frac{x}{r}\Big)' = \Big(-\frac{1}{r}\operatorname{arccotg}\frac{x}{r}\Big)' \quad \text{v} \quad \mathbb{R};$$

$$(5)\qquad \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} = \Big(\arcsin\frac{x}{r}\Big)' = \Big(-\arccos\frac{x}{r}\Big)' \ \text{ v } \ (-r,r)\,;$$

$$(6)\qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} = \Big(\operatorname{argsinh}\frac{x}{r}\Big)' = \big(\lg\big(x+\sqrt{x^2+r^2}\,\big)\big)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}\,;$$

$$(7)\qquad \frac{1}{\sqrt{x^2-r^2}} = \Big(-\operatorname{argcosh}\frac{x}{r}\Big)' = \big(\lg\big(x+\sqrt{x^2-r^2}\,\big)\big)' \ \text{ v } \ (r,+\infty)\,;$$

$$(8)\qquad \sin x = (-\cos x)', \quad \cos x = (\sin x)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}\,;$$

$$(9)\qquad \sinh x = (\cosh x)', \quad \cosh x = (\sinh x)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}\,;$$

$$(10)\qquad \frac{1}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)' \ \text{ v každém intervalu } \ \big(\tfrac12(2k-1)\pi, \tfrac12(2k+1)\pi\big)\,;$$

$$(11)\qquad \frac{1}{\sin^2 x} = (\operatorname{cotg} x)' \ \text{ v každém intervalu } \ (k\pi,(k+1)\pi)\,.$$

Poznámka 9.2. Identita typu $x^\alpha = \big(x^{\alpha+1}/(\alpha+1)\big)'$ platí pro některá racionální čísla α ve větší množině, než je uvedeno v $(3')$: Je-li $0 \neq p \in \mathbb{Z}$, je-li $q > 1$ liché číslo a jsou-li čísla p, q nesoudělná, je totiž

$$\sqrt[q]{x^p} := \big(x^p\big)^{\frac1q} = \Big(\frac{q}{p+q}\,\big(x^{p+q}\big)^{\frac1q}\Big)' = \Big(\frac{q}{p+q}\,\sqrt[q]{x^{p+q}}\Big)' \ \text{ v } \ \left\{\begin{matrix} \mathbb{R} & \text{pro } p>0 \\ \mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+ & \text{pro } p<0 \end{matrix}\right\}.$$

Komplikace souvisí s tím, že na rozdíl od mnohých počítačových programů (které definují všechny necelé mocniny rovností $x^a := \exp(a\lg x)$ a nedávají tak úplné výsledky) jsou v analýze (stejně jako v aritmetice) definovány liché odmocniny záporných čísel.

Příklad 9.1. Integrací per partes získáme identitu

$$(12)\qquad \lg x = (x\lg x)' - 1 = \big(x(\lg x - 1)\big)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}_+\,.$$

(Ve V.8.3 jsme položili $F(x) := \lg x$, $g(x) := 1$, $f(x) = 1/x$, $G(x) := x$.)

Příklad 9.2. Někdy je třeba integrovat per partes několikrát: Je-li $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ a položíme-li $g(x) := e^{ax}$, $F(x) := \sin bx$, $G(x) := e^{ax}/a$, $f(x) = b\cos bx$, dostaneme (podle V.8.3) identitu

$$(13)\qquad e^{ax}\sin bx = \Big(\frac1a\,e^{ax}\sin bx\Big)' - \frac{b}{a}\,e^{ax}\cos bx \ \text{ v } \ \mathbb{R}\,.$$

Položíme-li nyní $g(x) := e^{ax}$, $F(x) := \cos bx$, $G(x) := e^{ax}/a$, $f(x) = -b\sin bx$, dostaneme identitu

$$(14)\qquad e^{ax}\cos bx = \Big(\frac1a\,e^{ax}\cos bx\Big)' + \frac{b}{a}\,e^{ax}\sin bx \ \text{ v } \ \mathbb{R}\,.$$

Dosadíme-li (14) do (13) (nebo (13) do (14)), získáme po snadné úpravě identity

$$(15') \qquad e^{ax}\sin bx = \Big(\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx)\Big)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,,$$

$$(15'') \qquad e^{ax}\cos bx = \Big(\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos bx + b\sin bx)\Big)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,,$$

které platí dokonce za obecnějšího předpokladu $a^2+b^2 \neq 0$; platnost pro $a = 0$, $b \neq 0$ ověříme dosazením.

Příklad 9.3. Je-li funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencovatelná a nenulová všude v (a, b), je (podle věty o diferencování superpozice)

$$(16) \qquad \frac{f'}{f} = (\lg \circ |f|)'$$

všude v (a, b). Je tedy např.

$$\frac{\cos x}{2+\sin x} = \big(\lg(2+\sin x)\big)' \ \text{ v } \mathbb{R}$$

a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí rovnost

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \big(\lg(1+\sin x)\big)' \ \text{ v } \ (2k\pi - \tfrac{1}{2}\pi, 2k\pi + \tfrac{3}{2}\pi)\,;$$

absolutní hodnotu nebylo nutné psát, protože obě funkce ve jmenovateli jsou kladné.

Poznámka 9.3. Všechny počítačové programy, které jsou autorovi známy, pracují *s nepravdivým tvrzením*, že funkcí primitivní k $1/x$ je $\lg x$; stejnou chybu najdeme i v mnohých tabulkách primitivních funkcí. To celkem výstižně charakterizuje ctitele bezduchého kalkulu: Ačkoli je dobře a dlouho známo, že správná primitivní funkce je $\lg|x|$, vynechávají – asi „pro jednoduchost" – absolutní hodnotu. Pravděpodobně to souvisí i s tím, že se bezduchý kalkulus nezabývá obory platnosti. V $\mathbb{R}_+$ je samozřejmě vše v pořádku, ale v $\mathbb{R}_-$ podle těchto mylných představ primitivní funkce k $1/x$ zřejmě neexistuje, ačkoli je tam funkce $1/x$ spojitá (sr. s V.9.2). Tato základní chyba má bohužel velmi nepříjemný důsledek: *Je-li funkce f v intervalu (a, b) záporná, nedávají zmíněné programy žádnou primitivní funkci k f'/f* (nejsou-li tak „chytré", že přejdou k $(-f')/(-f)$). Neúplnou identitu $1/x = (\lg x)'$ snadno opravíme přidáním absolutní hodnoty a dodatkem „pro všechna $x \neq 0$"; zamysleme se však nad „spolehlivostí" podobných výsledků ve složitějších situacích, v nichž nemusí být vůbec jasné, *kam* je třeba absolutní hodnotu dopsat.

Příklad 9.4. Podle 1SM je

$$(17) \qquad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} = (\lg|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|)'$$

v každém intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Při označení z 1SM je zde $f(y) := 1/y$, $\omega(x) := \operatorname{tg}(\frac{1}{2}x)$, takže $\omega'(x) = 1/(2\cos^2\frac{1}{2}x)$.

Příklad 9.5. Funkce $f(x) := 1/\sqrt{e^x - 1}$ má podle V.9.2 primitivní funkci v $\mathbb{R}_+$. Položme $\sqrt{e^x - 1} = t$, tj. substituujme $x = \omega(t) := \lg(t^2+1)$. Všechny předpoklady 2SM jsou splněny, protože $\omega'(t) = 2t/(t^2+1) > 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}_+$ a $\omega(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Protože

$$f(\omega(t))\omega'(t) = \frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2}{t^2+1} = (2\operatorname{arctg} t)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}_+\,,$$

je $F(x) := 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1}$ funkcí primitivní k $f(x)$ v $\mathbb{R}_+$.

Příklad 9.6. Funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \tag{18}$$

má podle V.9.2 primitivní funkci v celém $\mathbb{R}$, ale najít ji bude poněkud komplikovanější, protože standardní substituci $\operatorname{tg} x = y$ (sr. s příkladem 9.11) lze provést jen v intervalech, které neobsahují žádný bod tvaru $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pracujme v intervalech $I_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a upravme (18) na tvar

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x + 2}\,; \tag{18*}$$

podle 1SM (s $\omega(x) = \operatorname{tg} x$) a podle (4) platí pro každé $k \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$\frac{1}{y^2+2} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}, \ \text{ takže } \ f(x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\Big)' \ \text{ v } \ I_k\,.$$

Funkce F_k definovaná v intervalu $I_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi\rangle$ podmínkami

$$F_k(x) := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} & \text{pro všechna } \ x \in I_k \\ F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{pro } \ x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi \end{array}\right\} \tag{19}$$

je spojitá v I_k^*, protože se její hodnota v koncovém bodě intervalu I_k rovná příslušné limitě zleva. Protože číslo $\Delta := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) - F_k(\frac{1}{2}(2k-1)\pi+) = \pi/\sqrt{2}$ nezávisí na k, je funkce F definovaná podmínkami

$$F(x) := F_k(x) + k\Delta \ \text{ pro všechna } \ x \in I_k^* \ \text{ a všechna } \ k \in \mathbb{Z} \tag{20}$$

zřejmě spojitá v celém $\mathbb{R}$; je přitom funkcí primitivní k f v každém intervalu I_k. Podle V.5.5 a vzhledem ke spojitosti f v $\mathbb{R}$ je kromě toho

$$F'(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} F'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} f(x) = f(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi)\,,$$

což dokazuje, že F je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Poznámka 9.4. Poslední tvrzení právě dokončeného příkladu, založené na V. 5.5, lze zobecnit takto:

Věta 9.6. *Nechť každý bod x množiny $M \subset \mathbb{R}$ má okolí $P(x)$ disjunktní s M* [2]) *a nechť funkce f, F spojité v $\mathbb{R}$ splňují podmínku $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R} - M$. Pak je $F' = f$ všude v $\mathbb{R}$.*

Vyložme nyní několik metod integrace některých běžných typů funkcí.

Příklad 9.7. Integrace racionální funkce. Racionální funkci $f \not\equiv 0$ napišme ve tvaru $f = g/h$, kde g a h jsou nesoudělné polynomy [3]). Předpokládejme, že všechny reálné kořeny polynomu h byly seřazeny do prosté posloupnosti $a_1, \dots, a_m$, kde $m \geq 0$, a všechny imaginární kořeny do prosté posloupnosti $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \dots, \alpha_n, \overline{\alpha_n}$, kde $n \geq 0$. [4]) Je dobře známo, že polynomy $x^2 + b_k x + c_k := (x - \alpha_k)(x - \overline{\alpha_k})$ jsou pak reálné a že identita

$$h(x) = A \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{p_j} \prod_{k=1}^{n} (x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}, \tag{21}$$

kde $p_j \in \mathbb{N}$ a $q_k \in \mathbb{N}$ jsou *násobnosti* kořenů a_j a α_k, platí při vhodné volbě (nenulové) konstanty $A \in \mathbb{R}$ všude v $\mathbb{R} - h_{-1}(0)$.

Racionální funkci $f(x)$ lze pak (v $\mathbb{R} - h_{-1}(0)$) rozložit na tzv. **jednoduché** (neboli **parciální**) **zlomky**:

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{p_j} \frac{A_{jr}}{(x - a_j)^r} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{q_k} \frac{B_{ks} x + C_{ks}}{(x^2 + b_k x + c_k)^s}\,; \tag{22}$$

φ je přitom polynom, A_{jr}, B_{ks}, C_{ks} jsou reálné konstanty. Je-li stupeň polynomu g menší než stupeň polynomu h, je $\varphi \equiv 0$; v opačném případě se $\varphi(x)$ získá dělením polynomu $g(x)$ polynomem $h(x)$, prováděném tak dlouho, až stupeň zbytku dělení klesne pod stupeň polynomu $h(x)$. Numerické hodnoty konstant A_{jr}, B_{ks}, C_{ks} získáme např. tak, že rozdíl $f(x) - \varphi(x)$ vynásobíme výrazem $g(x)/A$ a pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na obou stranách vzniklé identity; lze však do ní také dosazovat vhodné hodnoty x a pak řešit vzniklý lineární systém rovnic. (Obě zmíněné metody se často kombinují. Výhodné je dosazovat reálné kořeny polynomu h, protože tím ihned získáme hodnoty některých konstant A_{jr}; v některých případech se vyplatí dosadit i některý imaginární kořen – v tom případě pak porovnáme reálné a imaginární části obou stran vzniklé rovnosti.)

Je jistě zřejmé, jak se najde funkce primitivní (v $\mathbb{R}$) k polynomu:

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i x^i = \Big(\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{x^{i+1}}{i+1} \Big)'. \tag{23}$$

---

[2]) Takové množiny se nazývají *izolované v* $\mathbb{R}$; jejich typickým představitelem je množina $\mathbb{Z}$.

[3]) tj. polynomy, které nemají žádný společný kořen

[4]) Rovnost $m = 0$ (resp. $n = 0$) odpovídá situaci, kdy h nemá žádný reálný (resp. imaginární) kořen.

Stejně jednoduché je integrovat funkce tvaru $1/(\mathrm{Id}-a)^r$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{N}$: V $\mathbb{R}-\{a\}$ platí identity

$$(24') \qquad \frac{1}{x-a} = \big(\lg|x-a|\big)',$$

$$(24'') \qquad \frac{1}{(x-a)^r} = \Big(\frac{1}{1-r}\,\frac{1}{(x-a)^{r-1}}\Big)', \quad \text{je-li } r>1\,.$$

Zbývá vysvětlit, jak se (v $\mathbb{R}$) integrují zlomky tvaru $(Bx+C)/(x^2+bx+c)^s$, kde polynom x^2+bx+c má dva různé imaginární kořeny: Nejdříve napíšeme identitu

$$(25) \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^s} = \tfrac12 B\,\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^s} + \Big(C-\tfrac12 bB\Big)\frac{1}{(x^2+bx+c)^s}\,.$$

Pak užijeme 1SM a substitucí $y=\omega(x) := x^2+bx+c$ převedeme problém integrace prvního zlomku vpravo na triviální problém integrace funkce y^{-s}. Užijeme-li analogie identit (24′) a (24″), vidíme, že všude v $\mathbb{R}$ je

$$(25') \qquad \frac{2x+b}{x^2+bx+c} = \big(\lg(x^2+bx+c)\big)',$$

$$(25'') \qquad \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^s} = \Big(\frac{1}{1-s}\,\frac{1}{(x^2+bx+c)^{s-1}}\Big)', \quad \text{je-li } s>1\,.$$

Integrace posledního zlomku v (25) je o něco komplikovanější: Protože oba kořeny polynomu x^2+bx+c jsou imaginární, je

$$(26) \qquad x^2+bx+c = (x-\tfrac12 b)^2 + \tfrac14(4c-b^2)\,,$$

přičemž $D := b^2-4c<0$. Substituce

$$(26') \qquad y=\omega(x) := \frac{2x-b}{\sqrt{4c-b^2}}$$

převede integraci zlomku $1/(x^2+bx+c)^s$ na integraci zlomku $1/(y^2+1)^s$ násobeného jistou konstantou.

Integrace per partes s $F(y) := 1/(y^2+1)^s$, $g(y) := 1$, $f(y) = -2sy/(y^2+1)^{s+1}$, $G(y) := y$ vede k rovnostem

$$\begin{aligned}\frac{1}{(y^2+1)^s} &= \Big(\frac{y}{(y^2+1)^s}\Big)' + 2s\,\frac{y^2}{(y^2+1)^{s+1}}\\ &= \Big(\frac{y}{(y^2+1)^s}\Big)' + \frac{2s}{(y^2+1)^s} - \frac{2s}{(y^2+1)^{s+1}}\,,\end{aligned}$$

z nichž plyne *redukční vzorec*

$$(27) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^{s+1}} = \frac{1}{2s}\Big(\frac{y}{(y^2+1)^s}\Big)' + \frac{2s-1}{2s}\,\frac{1}{(y^2+1)^s}\,,$$

platný všude v $\mathbb{R}$ a pro všechna $s \in \mathbb{N}$. Protože je

$$(28_1) \qquad \frac{1}{y^2+1} = (\operatorname{arctg} y)' \ \text{ v } \ \mathbb{R},$$

je tím celý problém rozřešen.

Pomocí (27) a (28_1) se snadno dokáže, že všude v $\mathbb{R}$ platí např. identity

$$(28_2) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^2} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg} y + \frac{y}{y^2+1}\Big)',$$

$$(28_3) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^3} = \frac{1}{8}\Big(3\operatorname{arctg} y + \frac{3y}{y^2+1} + \frac{2y}{(y^2+1)^2}\Big)',$$

$$(28_4) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^4} = \frac{1}{48}\Big(15\operatorname{arctg} y + \frac{15y}{y^2+1} + \frac{10y}{(y^2+1)^2} + \frac{8y}{(y^2+1)^3}\Big)'.$$

Příklad 9.7a. Integrujme funkci

$$(29) \qquad f(x) := \frac{3x}{x^3-1}$$

v maximálních intervalech, kde je to možné, tedy v $(-\infty, 1)$ a v $(1, +\infty)$. Protože stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, odpadá dělení – polynom $\varphi(x)$ v obecném rozkladu (22) je nulový; rozklad na jednoduché zlomky má proto tvar

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Násobením jmenovatelem levé strany získáme identitu

$$3x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1),$$

platnou (na rozdíl od předcházející identity) v celém $\mathbb{R}$. Dosazením $x = 1$ dostaneme $A = 1$; porovnáme-li koeficienty u x^2 a x^0, dostaneme rovnice $0 = A+B$, $0 = A-C$, z nichž je zřejmé, že $B = -1$, $C = 1$. Je tedy

$$(30) \qquad f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Poslední sčítanec se třeba ještě upravit; z identit

$$x^2+x+1 = \big(x+\tfrac{1}{2}\big)^2 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}\Big[\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)^2 + 1\Big]$$

ihned plyne, že

$$(31) \qquad \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1} = \sqrt{3}\,\frac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{\Big(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)^2+1} = \Big(\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}$$

podle 1SM. Z toho a z (30) dále vyplývá, že

$$f(x) = \left(\lg\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' \text{ v } \mathbb{R} - \{1\}. \tag{32}$$

Příklad 9.7b. Funkce primitivní k funkci

$$f(x) := \frac{4x^8 - 20x^2}{(x+1)^3\,(x^2+1)} \tag{33}$$

existují v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, +\infty)$.

Protože stupeň čitatele je o 3 větší než stupeň jmenovatele, provedeme 4 kroky dělení; čtenář se jistě sám přesvědčí, že tím dostaneme identitu

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 20x - 28 + \frac{4\,(10x^4 + 16x^3 + 11x^2 + 16x + 7)}{(x+1)^3\,(x^2+1)}. \tag{34}$$

Označme poslední zlomek $g(x)$ a hledejme koeficienty $A, \ldots, E$ tak, aby bylo

$$g(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}. \tag{35}$$

Vynásobíme-li tuto identitu jmenovatelem levé strany a dosadíme-li do vzniklých polynomů $x = -1$, zjistíme, že $C = -8$. Zbylá čísla A, B, D, E získáme porovnáním koeficientů např. u mocnin x^0, x^1, x^3 a x^4:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{u } x^0: & 28 & = & A + B + C + D \\
\text{u } x^1: & 64 & = & 2A + B + D + 3E \\
\text{u } x^3: & 64 & = & 2A + B + 3D + E \\
\text{u } x^4: & 40 & = & A + D
\end{array}$$

Protože tato soustava má řešení $A = 46$, $B = -4$, $D = E = -6$, je

$$g(x) = \frac{46}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{8}{(x+1)^3} - 3\,\frac{2x}{x^2+1} - \frac{6}{x^2+1}, \tag{36}$$

takže

$$f(x) = \Big(x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 28x + 46\lg|x+1| + \frac{4}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} - 3\lg(x^2+1) - 6\,\mathrm{arctg}\,x\Big)' \text{ pro všechna } x \neq -1. \tag{37}$$

Příklad 9.7c. Funkce primitivní k funkci

$$f(x) := \frac{12\,(x^2 - x - 2)}{(x^2-1)^2\,(x^2-x+1)^2} \tag{38}$$

existují v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$; napišme

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2-x+1)^2}$$

a hledejme numerické hodnoty konstant $A, \ldots, H$. Násobíme-li identitu jmenovatelem levé strany a dosadíme-li do výsledku $x = \pm 1$, zjistíme, že $B = -6$, $D = 0$. Porovnejme dále koeficienty u šesti vybraných mocnin x:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{u } x^7: & 0 & = & A + C + E \\
\text{u } x^6: & 6 & = & -A - 3C - E + F \\
\text{u } x^5: & 0 & = & 4C - E - F + G \\
\text{u } x^4: & 0 & = & 2A - 2C + 2E - F + H \\
\text{u } x^1: & -12 & = & A - 3C + E - F + G \\
\text{u } x^0: & -18 & = & -A + C + F + H
\end{array}$$

Řešením jsou čísla $A = 21$, $C = -1$, $E = -20$, $F = 4$, $G = -12$, $H = 0$,[5]) takže

(39) $$f(x) = \frac{21}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{20x-4}{x^2-x+1} - \frac{12x}{(x^2-x+1)^2}$$

pro všechna $x \neq \pm 1$. Je zřejmé, že

(40) $$\frac{21}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} = \Big(21 \lg|x-1| + \frac{6}{x-1} - \lg|x+1|\Big)'$$

v $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Všude v $\mathbb{R}$ platí kromě toho tyto identity:

(41) $$-\frac{20x-4}{x^2-x+1} = -10\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{6}{x^2-x+1}\,,$$

(42) $$-10\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} = \Big(-10 \lg(x^2-x+1)\Big)',$$

(43) $$-\frac{6}{x^2-x+1} = -\frac{12}{\sqrt{3}}\,\frac{2/\sqrt{3}}{\Big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)^2 + 1} = \Big(-\frac{12}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)',$$

(44) $$\frac{-12x}{(x^2-x+1)^2} = -6\,\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} - \frac{6}{(x^2-x+1)^2}\,,$$

(45) $$-6\,\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} = \Big(\frac{6}{x^2-x+1}\Big)',$$

(46) $$-\frac{6}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{16}{\sqrt{3}}\,\frac{2/\sqrt{3}}{\Big(\Big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)^2 + 1\Big)^2}\,.$$

[5]) Předpokládáme, že se čtenář neomezuje na pouhé čtení těchto řádků, ale počítá sám, přičemž náš text mu slouží k ověření správnosti výsledků. Jen vlastní aktivitou se může něčemu naučit.

Substituce $(2x-1)/\sqrt{3}=y$ v posledním výrazu vede podle (28_2) k identitě

$$-\frac{16}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{(y^2+1)^2}=-\frac{8}{\sqrt{3}}\Big(\frac{y}{y^2+1}+\operatorname{arctg} y\Big)'.$$

Užijeme-li znovu 1SM, dostaneme po troše počítání [5]) tento výsledek:

$$-\frac{6}{(x^2-x+1)^2}=\Big(\frac{2(1-2x)}{x^2-x+1}-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)'. \tag{47}$$

Podle (40), (42), (43), (45), (47) je tedy

$$\begin{aligned} f(x):=\Big(&\frac{6}{x-1}+4\,\frac{2-x}{x^2-x+1}-\frac{20}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ &+21\lg|x-1|-\lg|x+1|-10\lg(x^2-x+1)\Big)' \end{aligned} \tag{48}$$

pro všechna $x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}$.

* * *

Spolehlivé zvládnutí principů integrace racionální funkce je důležité i proto, že na ni lze převést integraci dalších typů funkcí; ilustrují to příklady 9.8 – 9.12.

Příklad 9.8. Integrace funkcí tvaru

$$f(x):=R(e^x),\ \text{ kde } R \text{ je racionální funkce.} \tag{49}$$

Položíme-li $e^x=y$ a aplikujeme-li 1SM, vidíme, že když je $G(y)$ primitivní funkcí funkce

$$g(y):=\frac{1}{y}\,R(y), \tag{50}$$

je $F(x):=G(e^x)$ primitivní funkcí funkce $f(x)$.

To, co jsme právě řekli, je samozřejmě jen nástin možného postupu; v každém konkrétním příkladě je třeba ověřit všechny předpoklady substituční metody a stanovit, v jakém intervalu resp. v jakých intervalech budou naše výsledky platit.

Příklad 9.8a. Funkci primitivní v $\mathbb{R}$ k funkci

$$f(x):=\frac{e^x}{e^{2x}+3} \tag{51}$$

vidíme na první pohled, protože jmenovatel zlomku je roven $(e^x)^2+3$ a čitatel e^x je derivací e^x. Podle 1SM a podle (4) je tedy

$$f(x)=\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}}\Big)'\quad\text{všude v } \mathbb{R}. \tag{52}$$

Příklad 9.8b. Funkce

$$f(x) := \frac{e^x + 1}{(e^x - 1)(e^{2x} - e^2)} \tag{53}$$

má primitivní funkce v intervalech $I_1 := (-\infty, 0)$, $I_2 := (0, 1)$ a $I_3 := (1, +\infty)$. Abychom v každém z těchto intervalů našli jednu z nich, položíme $e^x = y$, což náš problém převede podle 1SM na nalezení primitivní funkce k funkci

$$g(y) := \frac{y + 1}{y(y - 1)(y^2 - e^2)} \tag{54}$$

v intervalech $(0, 1) = \exp(I_1)$, $(1, e) = \exp(I_2)$ a $(e, +\infty) = \exp(I_3)$.

Vynásobíme-li rozklad

$$g(y) = \frac{A}{y} + \frac{B}{y - 1} + \frac{C}{y - e} + \frac{D}{y + e} \tag{55}$$

jmenovatelem levé strany a dosadíme-li do výsledku postupně $y = 0$, $y = 1$, $y = \pm e$, dostaneme tyto hodnoty konstant A, B, C, D:

$$A = \frac{1}{e^2}, \quad B = \frac{2}{1 - e^2}, \quad C = \frac{e + 1}{2e^2(e - 1)}, \quad D = \frac{e - 1}{2e^2(e + 1)}\,. \tag{56}$$

Integrací identity (55) získáme identitu

$$g(y) = \big(A \lg|y| + B \lg|y - 1| + C \lg|y - e| + D \lg|y + e|\big)' \tag{57}$$

platnou všude v $\mathbb{R} - \{-e, 0, 1, e\}$; dosadíme-li do ní podle (56), lze výsledek upravit na tvar

$$g(y) = \left(\frac{\lg|y|}{e^2} - \frac{1}{e^2 - 1}\left(2\lg|y - 1| - \frac{e^2 + 1}{2e^2}\lg|y^2 - e^2| - \frac{1}{e}\lg\left|\frac{y - e}{y + e}\right|\right)\right)'; \tag{58}$$

podle 1SM je tedy

$$f(x) = \left(\frac{x}{e^2} - \frac{1}{e^2 - 1}\left(2\lg|e^x - 1| - \frac{e^2 + 1}{2e^2}\lg|e^{2x} - e^2| - \frac{1}{e}\lg\left|\frac{e^x - e}{e^x + e}\right|\right)\right)' \tag{59}$$

všude v $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

* * *

Příklad 9.9. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := \frac{R(\lg x)}{x}, \quad \text{kde } R \text{ je racionální funkce}, \tag{60}$$

se substitucí $y = \lg x$ v 1SM převede na integraci racionální funkce $R(y)$.

Příklad 9.9a. Funkce

$$f(x) := \frac{5 \lg x}{x (\lg^3 x + \lg^2 x - 2)} \tag{61}$$

má primitivní funkce v intervalech $(0, e)$ a $(e, +\infty)$, protože logaritmus je spojitý v $\mathbb{R}_+$ a polynom $y^3 + y^2 - 2 = (y-1)(y^2 + 2y + 2)$ má právě jeden reálný kořen $y = 1$, kterému odpovídá $x = e$.

Jak čtenář snadno ověří, je

$$g(y) := \frac{5y}{y^3 + y^2 - 2} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}\,\frac{2y+2}{y^2+2y+2} + \frac{3}{(y+1)^2+1} \tag{62}$$

všude v $\mathbb{R} - \{1\}$. V důsledku toho platí rovnost

$$g(y) = \Big(\lg|y-1| - \tfrac{1}{2}\lg(y^2 + 2y + 2) + 3\operatorname{arctg}(y+1)\Big)'$$

pro všechna $y \neq 1$ a rovnost

$$f(x) = \Big(\lg|\lg x - 1| - \tfrac{1}{2}\lg\big(\lg^2 x + 2\lg x + 2\big) + 3\operatorname{arctg}(\lg x + 1)\Big)' \tag{63}$$

pro všechna $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.

* * *

Polynomem dvou proměnných u, v rozumíme součet konečného počtu výrazů tvaru $au^m v^n$, kde $a \in \mathbb{R}$ a kde m, n jsou nezáporná celá čísla. Podíl p/q dvou polynomů p, $q \not\equiv 0$ proměnných u, v se nazývá **racionální funkce proměnných** u, v.

Příklad 9.10. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,\right), \tag{64}$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných, $s > 1$ je celé číslo a a, b, c, d jsou reálná čísla, pro něž je $ad - bc \neq 0$, se dá převést na integraci racionální funkce tím, že zavedeme novou proměnnou

$$t := \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,. \tag{65}$$

Podrobněji řečeno: Rozřešíme právě napsanou rovnici vzhledem k x a aplikujeme 2SM se substituující funkcí

$$x = \omega(t) := \frac{dt^s - b}{a - ct^s}\,. \tag{65*}$$

V konkrétních případech hledáme vždy maximální intervaly, v nichž má funkce (64) *primitivní funkci, a samozřejmě ověřujeme všechny předpoklady substituční metody.*

Příklad 9.10a. Integrujme funkci

$$f(x) := \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,; \tag{66}$$

snadno ověříme, že zlomek pod odmocninou je kladný, právě když je $x \in (1,2)$; primitivní funkci budeme proto hledat právě v tomto intervalu. Substituce

$$\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = t\,, \ \text{ tj. } \ x = \omega(t) := \frac{2t^2+1}{t^2+1}\,, \ t \in \mathbb{R}_+\,, \tag{67}$$

předpoklady 2SM splňuje, protože všude v $\mathbb{R}_+$ je

$$\omega'(t) = \frac{2t}{(t^2+1)^2} > 0 \tag{68}$$

a $\omega(\mathbb{R}_+) = (1,2)$. 2SM vede k identitám

$$\begin{aligned} f(\omega(t))\,\omega'(t) &= \frac{t^2+1}{2t^2+1}\cdot t\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t^2}{(2t^2+1)(t^2+1)} \\ &= \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{2t^2+1} = \big(2\operatorname{arctg} t - \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t)\big)' \end{aligned} \tag{69}$$

platným v $\mathbb{R}_+$; v intervalu $(1,2)$ platí proto rovnost

$$f(x) = \left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2(x-1)}{2-x}}\right)'. \tag{70}$$

Příklad 9.10b. Funkce

$$f(x) := \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \tag{71}$$

je definována všude v $\mathbb{R}$ až na body $0, 1$ a je ve svém definičním oboru spojitá; má tedy primitivní funkce v intervalech $I_1 := (-\infty, 0)$, $I_2 := (0,1)$, $I_3 := (1, +\infty)$. Užijeme substituci

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t\,, \ \text{ tj. } \ x = \omega(t) := \frac{t^3+1}{t^3-1}\,. \tag{72}$$

Protože je

$$\omega'(t) = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} < 0 \ \text{ pro všechna } \ t \in \mathbb{R} - \{0,1\}\,, \tag{73}$$

jsou předpoklady 2SM splněny v každém z intervalů $J_1 := (-\infty, 0)$, $J_2 := (0,1)$, $J_3 := (1, +\infty)$. Protože je

$$\omega(-\infty+) = 1\,,\ \ \omega(0\pm) = -1\,,\ \ \omega(1-) = -\infty\,,\ \ \omega(1+) = +\infty\,,\ \ \omega(+\infty-) = 1\,,$$

zobrazuje funkce ω intervaly J_1, J_2, J_3 po řadě na intervaly $(-1,1)$, $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, *které bohužel nejsou totožné s intervaly I_k, v nichž máme hledat funkci primitivní k f*. Abychom dospěli k poněkud lepší shodě, označme

$$K_1' := (0,1)\,,\ K_1'' := (-1,0)\,,\ K_2 := (-\infty,-1)\,,\ K_3 := J_3 = (1,+\infty)\,. \tag{74$'$}$$

Pak je

$$\omega(K_1') = (-\infty,-1)\,,\quad \omega(K_1'') = (-1,0)\,,\quad \omega(K_2) = (0,1)\,,\quad \omega(K_3) = I_3 \tag{74$''$}$$

a podle 2SM budeme v intervalech (74′) hledat primitivní funkci funkce

$$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = \left(\frac{t^3-1}{t^3+1}\right)^2 \cdot t \cdot \frac{-6\,t^2}{(t^3-1)^2} = -\frac{6\,t^3}{(t^3+1)^2}\,, \tag{75$'$}$$

kterou ovšem nejdříve rozložíme na jednoduché zlomky:

$$\begin{aligned} g(t) = {}&-\frac{2}{3}\,\frac{1}{t+1} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{5}{3}\,\frac{1}{t^2-t+1} \\ &-\frac{2t-1}{(t^2-t+1)^2} + \frac{1}{(t^2-t+1)^2}\,. \end{aligned} \tag{75$''$}$$

Substitucí $(2t-1)/\sqrt{3} = z$ a užitím 1SM dojdeme k rovnosti

$$-\frac{5}{3}\,\frac{1}{t^2-t+1} = \left(-\frac{10}{3\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,;$$

touž substitucí a navíc integrací per partes získáme další rovnost

$$\frac{1}{(t^2-t+1)^2} = \left(\frac{1}{3}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,.$$

Primitivní funkce k ostatním sčítancům v (75″) jsou jistě patrné na první pohled.

Malou úpravou výsledků dostaneme pak tuto funkci primitivní ke $g(t)$:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{t+1}{t^2-t+1} - \lg|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + \frac{1}{3}\,\lg(t^2-t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\,.$$

Dosadíme-li za t podle (72) a upravíme-li opět výsledek, získáme identitu

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{3}\Bigg[&\lg\left(\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right) - 2\lg\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right| \\ &- 3\,\frac{x-1}{x}\,\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right)\right)\Bigg]'\,, \end{aligned} \tag{76}$$

zatím ovšem jen v intervalech (74″). Funkce $f(x)$ i funkce napsaná vpravo v závorkách [ ] je však spojitá v bodě -1; podle V.9.6 platí proto rovnost (76) v celém intervalu $I_1 = (-\infty, 0)$. Protože v intervalech I_2, I_3 žádné problémy nebyly, je tím integrace funkce (71) dokončena.

* * *

Příklad 9.11. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := R(\sin x, \cos x)\,, \tag{77}$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných.

A. Předpokládejme nejdříve, že funkce f je spojitá v nějakém otevřeném intervalu $I \subset (-\pi, \pi)$. Položíme-li

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = t \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\pi, \pi)\,, \tag{78}$$

bude

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,; \tag{78′}$$

užijeme-li 2SM s funkcí

$$\omega(t) := 2 \operatorname{arctg} t\,, \ t \in \mathbb{R}, \tag{79}$$

inverzní k (78), jejíž derivace

$$\omega'(t) = \frac{2}{1+t^2} > 0$$

je racionální, bude racionální i funkce

$$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,.$$

Integraci funkce (77) *lze tedy substitucí* (79) *převést na integraci racionální funkce.* ■
Je-li $G(t)$ funkce primitivní ke $g(t)$ v $\omega_{-1}(I)$, je $F(x) := G(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)$ funkce primitivní k $f(x)$ v I.

Připomeňme ještě identity, které se často užívají při úpravě výsledků:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} & \text{pro všechna} \ \ x \not\equiv \pi \mod 2\pi \\[2ex] \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{pro všechna} \ \ x \not\equiv 0 \mod \pi \end{array} \right\}. \quad \square \tag{80}$$

Je-li $I \subset (0, 2\pi)$, lze s výhodou užít substituci

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}x = t\,, \quad \text{tj.} \ \ x = \omega_1(t) := 2 \operatorname{arccotg} t\,, \ t \in \mathbb{R}; \tag{81}$$

v tom případě však je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = -\frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad \omega_1'(t) = -\frac{2}{1+t^2}\,. \tag{81'}$$

B. Máme-li funkci tvaru (77) integrovat v intervalu obsaženém v některém z intervalů $I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ (resp. $J_k := (2k\pi, 2(k+1)\pi)$), kde $k \in \mathbb{Z}$, můžeme užít opět substituci $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = t$ (resp. $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}x = t$); inverzní k ní bude nyní ovšem funkce

$$\omega(t) := 2 \operatorname{arctg} t + 2k\pi \quad (\text{resp. } \omega(t) := 2 \operatorname{arccotg} t + 2k\pi). \tag{79'}$$

Můžeme však také uvážit, že f je 2π-periodická funkce, posunout interval I o vhodný sudý násobek čísla π tak, aby posunutý interval I^* ležel v I_0 (resp. v J_0), najít primitivní funkci v I^* a nakonec se (s využitím periodicity) vrátit zpět do I.

C. Je-li funkce (77) spojitá v $\mathbb{R}$ a známe-li její primitivní funkci F_0 v intervalu $I_0 = (-\pi, \pi)$, lze její primitivní funkci v $\mathbb{R}$ získat např. tímto postupem:

Protože f je spojitá v kompaktním intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, je v něm omezená, takže je $|f| \le M$ pro vhodnou konstantu $M \in \mathbb{R}_+$. Pro každé dva body x', x'' z I_0 existuje podle *věty o přírůstku funkce* [6]) bod ξ (ležící mezi body x', x'') tak, že

$$|F_0(x'') - F_0(x')| = |F_0'(\xi)(x'' - x')| = |f(\xi)(x'' - x')| \le M|x'' - x'|;$$

z toho ihned plyne platnost BC podmínky [7]) nutné a postačující k tomu, aby existovaly konečné limity $F_0(\pi-)$, $F_0(-\pi+)$.

Položíme-li $F_0(\pi) := F_0(\pi-)$, bude funkce F_0 spojitá v polouzavřeném intervalu $I_0^* := (-\pi, \pi\rangle$ a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ bude funkce F_k definovaná podmínkou

$$F_k(x) := F_0(x - 2k\pi) \quad \text{pro všechna} \quad x \in I_k^* := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\rangle \tag{82}$$

spojitá v I_k^* a primitivní k f v $I_k = ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. Číslo

$$\Delta := F_k((2k+1)\pi-) - F_{k+1}((2k+1)\pi+) = F_0(\pi-) - F_0(-\pi+) \tag{83}$$

pak nezávisí na k a snadno nahlédneme, že funkce

$$F := F_k + k\Delta \quad \text{v} \quad I_k^* \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{84}$$

je spojitá v celém $\mathbb{R}$. Podle V.9.6 je funkcí primitivní k f také v celém $\mathbb{R}$.

D. Je-li f spojitá v nějakém (otevřeném) intervalu délky $\le 2\pi$, který není částí žádného z intervalů I_k resp. J_k, lze při hledání funkce primitivní k f v I postupovat podobně jako v C; vysvětlíme to na příkladě, z něhož bude patrná jak podstata problému, tak i jeho řešení:

---

[6]) Máme na mysli tzv. Lagrangeovu větu o přírůstku funkce: *Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci všude v (a, b), existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

[7]) BC podmínka zní v našem případě takto: *Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje $P^+(-\pi)$ (resp. $P^-(\pi)$) tak, že pro každé dva body x', x'' z tohoto okolí je $|F(x'') - F(x')| < \varepsilon$.*

Je-li f spojitá např. v intervalu $I := (-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, substituujeme $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ v každém z intervalů $(-\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Nechť F_1 resp. F_2 je funkce primitivní k f v prvním resp. ve druhém z těchto intervalů. Nejdříve rozšíříme F_1 spojitě na interval $(-\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$ tím, že položíme $F_1(\pi) := F_1(\pi-)$. Pak najdeme číslo $\Delta := F_1(\pi) - F_2(\pi+)$ a definujeme

$$(85') \qquad F := \left\{ \begin{array}{ll} F_1 & \text{v } (-\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle \\ F_2 + \Delta & \text{v } (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{array} \right\}.$$

Z definice čísla Δ plyne, že $F(\pi+) = F_2(\pi+) + \Delta = F_1(\pi) = F(\pi)$, takže F je spojitá v celém intervalu I; podle V.9.6 je tam funkcí primitivní k f.

Postupovali jsme tak, aby vynikla podobnost s postupem vysvětleným v bodě C; nechceme-li však zavádět (v tomto případě dost zbytečné) číslo Δ, stačí definovat:

$$(85'') \qquad F := \left\{ \begin{array}{ll} F_1 & \text{v } (-\frac{1}{2}\pi, \pi) \\ F_1(\pi-) & \text{v bodě } \pi \\ F_2 - F_2(\pi+) + F_1(\pi-) & \text{v } (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{array} \right\}.$$

Poznamenejme[8]), že existence konečných limit $F_1(\pi-)$, $F_2(\pi+)$ plyne z existence funkce G primitivní k f v celém I (sr. v V.9.2); funkce G je samozřejmě v I spojitá, a má tedy v bodě π (dokonce oboustrannou) limitu. Pak stačí uvážit, že funkce F_1 resp. F_2 se od G liší v $(-\frac{1}{2}\pi, \pi)$ resp. v $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ jen o aditivní konstantu.

E. Má-li funkce f periodu π, převedeme její integraci na integraci racionální funkce substitucí $\operatorname{tg} x = t$; substituci lze ovšem užít jen v intervalech obsažených v některém z intervalů $K_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ve 2SM pak položíme $\omega(t) := \operatorname{arctg} t + k\pi$, $t \in \mathbb{R}$, a užijeme vzorce

$$(86) \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}, \quad \omega'(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

z nichž první dva platí pro všechna $x \not\equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi$. V intervalech obsažených v některém z intervalů $L_k := (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, lze užít substituci $\operatorname{cotg} x = t$.

Tyto substituce mají (proti substitucím $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ resp. $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x = t$) tu výhodu, že *jako výsledek vyjde jednodušší racionální funkce*. Ukažme to na příkladě: Je-li

$$(87) \qquad f(x) := \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x},$$

dostaneme po substituci $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ resp. $\operatorname{tg} x = t$ funkci

$$\frac{16t^4}{t^8 - 4t^6 + 22t^4 - 4t^2 + 1} \cdot \frac{2}{t^2+1} \quad \text{resp.} \quad \frac{t^4}{t^4+1} \cdot \frac{1}{t^2+1}.$$

[8]) Zejména pro čtenáře, kteří si všimli, že píšeme jisté limity bez odůvodnění, že existují.

Po dosazení $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ vznikl z $f(x)$ zlomek, jehož jmenovatel má stupeň dvakrát větší než jmenovatel zlomku vzniklého dosazením $\operatorname{tg} x = t$; je to způsobeno rozdíly mezi vzorci (78′) a (prvních dvou identit z) (85). [9])

Je-li funkce f spojitá a π-periodická v celém $\mathbb{R}$ (jako v právě uvedeném příkladě), je třeba po nalezení primitivních funkcí v každém z intervalů K_k (resp. L_k) zkonstruovat primitivní funkci v $\mathbb{R}$ např. způsobem vyloženým v části C.

Je-li f spojitá v nějakém otevřeném intervalu I délky $\leq \pi$, který není částí žádného K_k a žádného L_k, můžeme postupovat podobně jako v části D.

F. Má-li funkce f tvar

$$f(x) := R(\sin x)\cos x \quad \text{resp.} \quad f(x) := R(\cos x)\sin x, \tag{88}$$

kde R je racionální funkce, užijeme 1SM, v níž položíme $\sin x = y$ resp. $\cos x = y$; dostaneme tím racionální funkci $R(y)$ resp. $-R(y)$. [10])

Příklad 9.11a. Protože maximálními intervaly, v nichž je spojitá funkce

$$f(x) := \frac{1+\sin x}{1+\cos x}, \tag{89}$$

jsou intervaly $I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, užijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$, přesněji substituci (79′). Užitím vzorců (78′) a 2SM dospějeme k identitám

$$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = \frac{t^2+2t+1}{t^2+1} = 1 + \frac{2t}{t^2+1} = \big(t + \lg(t^2+1)\big)'$$

platným v celém $\mathbb{R}$. Dosazením $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ pak získáme funkci

$$F(x) := \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x + \lg(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x + 1) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x - \lg(\cos^2\tfrac{1}{2}x) \tag{90}$$

primitivní k $f(x)$ v každém I_k.

Poznamenejme, že jsme se při substituci $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ mohli omezit na interval I_0; přesněji řečeno, mohli jsme aplikovat 2SM s funkcí (79), jejíž obor hodnot je I_0. (Tím bychom se vyhnuli trochu složitějším rovnostem (79′).) Došli bychom k závěru, že funkce (90) (s $x \in I_0$) je funkcí primitivní k $f(x)$ v I_0. Kdybychom pak definovali $F(x)$ jako výraz za druhým rovnítkem v (90) všude, kde má tento výraz smysl (tedy ve sjednocení všech I_k), bylo by vzhledem k jeho π-periodicitě a k π-periodicitě funkce $f(x)$ zřejmé, že $F(x)$ je funkcí primitivní k $f(x)$ v každém intervalu I_k. (Pro každé $x \in I_k$ je $x - k\pi \in I_0$ a vzhledem π-periodicitě je $(F(x))' = (F(x-k\pi))' = f(x-k\pi) = f(x)$ podle věty o diferencování superpozice.)

---

[9]) Příklad jsme vybrali tak, aby bylo zřejmé, že první substituce může být v některých případech *zcela nevhodná*, protože její výsledek nemusíme umět (na rozdíl od výsledku druhé substituce) rozložit na jednoduché zlomky.

[10]) Připomeňme, že ve většině případů, kdy lze užít obě substituční metody, dáváme přednost první z nich. Kdybychom hledali funkci primitivní k funkci tvaru (88) v intervalu I, v němž není sin resp. cos ryze monotónní, nemohli bychom druhou metodu v celém I vůbec aplikovat.

Příklad 9.11b. Na rozdíl od příkladu 9.11a je funkce

$$f(x) := \frac{1+\sin x}{2+\cos x} \tag{91}$$

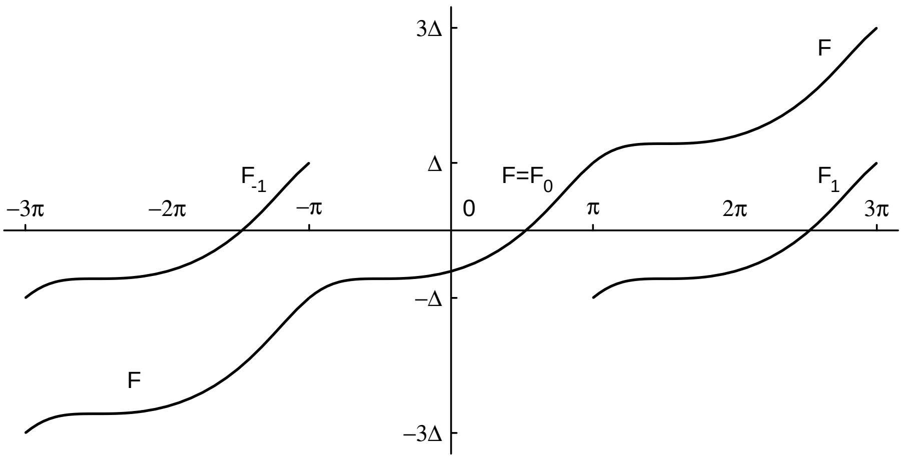
spojitá v celém $\mathbb{R}$. Aplikace 2SM s funkcí $\omega(t) = 2\,\mathrm{arctg}\, t$ vede k rovnostem

$$\begin{aligned} h(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) &= \frac{(1+t)^2}{3+t^2}\,\frac{2}{1+t^2} = \frac{2}{3+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{3+t^2} \\ &= \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}} + \lg\frac{1+t^2}{3+t^2}\Big)' \end{aligned}$$

platným pro všechna $t \in \mathbb{R}$; funkce

$$F_0(x) := \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{\mathrm{tg}\,\frac12 x}{\sqrt{3}}\Big) + \lg\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\frac12 x}{3+\mathrm{tg}^2\,\frac12 x} \tag{92}$$

je proto funkcí primitivní k $f(x)$ v I_0.



K PŘÍKLADU 9.11B

Položme $F_0(\pi) := F_0(\pi-) = \pi/\sqrt{3}$; takto rozšířená funkce F_0 je spojitá v intervalu $I_0^* := (-\pi, \pi\rangle$. Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ označme

$$I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)\,, \quad I_k^* := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\rangle \tag{93}$$

a v I_k^* definujme funkci F_k podmínkou $F_k(x) := F_0(x - 2k\pi)$. (Protože funkce F_0 je 2π-periodická, je $F_k(x)$ v I_k rovno pravé straně rovnosti (92) a $F_k((2k+1)\pi) := \pi/\sqrt{3}$.) Funkce F_k je spojitá v I_k^* a zároveň je funkcí primitivní k f v I_k. Položíme-li

$$\Delta := F_k((2k+1)\pi) - F_{k+1}((2k+1)\pi+) = F_0(\pi) - F_0(-\pi+) = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,\pi\,, \tag{94}$$

je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \quad \text{v} \quad I_k^* \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{95}$$

funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11c. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} \tag{96}$$

je spojitá v $\mathbb{R}$ a funkci k ní primitivní (v $\mathbb{R}$) lze najít pomocí 1SM: V intervalech $K_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, vytkneme z čitatele i jmenovatele výraz $\cos^2 x$ a $f(x)$ upravíme na tvar

$$f(x) = \frac{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 1)}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 4)} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{(\operatorname{tg}^2 x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 4)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,; \tag{96'}$$

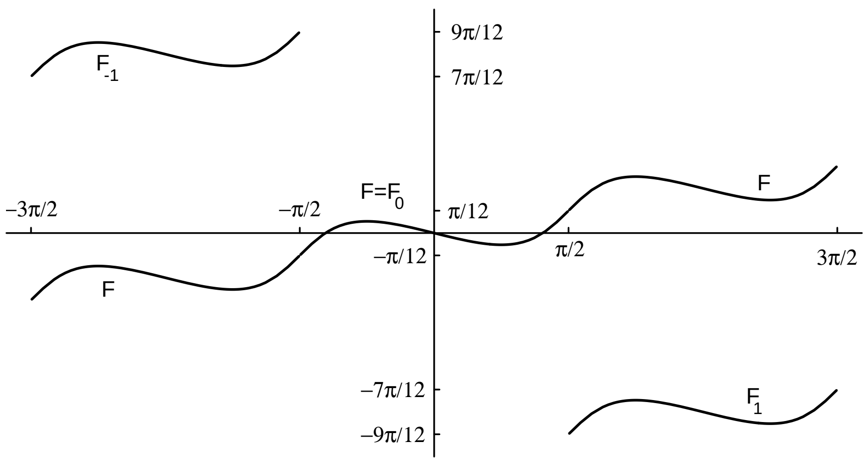
pak v 1SM položíme $\operatorname{tg} x = y$. Protože rovnosti

$$g(y) := \frac{y^2 - 1}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{y^2+4} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{y^2+1} = \Big(\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} y\Big)'$$

platí všude v $\mathbb{R}$, je funkce

$$F_k(x) := \tfrac{5}{6}\operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x) - \tfrac{2}{3}x \tag{97}$$

funkcí primitivní k $f(x)$ v K_k.



K PŘÍKLADU 9.11C

Funkci F_k rozšíříme spojitě na interval $K_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi\rangle$ tím, že položíme $F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi) := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) := \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$; protože $F_{k+1}(\frac{1}{2}(2k+1)\pi+) = -\frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$, je

$$\Delta := F_k(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) - F_{k+1}(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi+) = \tfrac{5}{6}\pi$$

a funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \quad \text{v} \quad K_k^* \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{98}$$

je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11d. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)(2\sin^2 x - 1)} \tag{99}$$

má primitivní funkce v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod x, v němž je buď $\cos x = \frac{1}{2}$, nebo $\sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Maximálními intervaly s touto vlastností jsou intervaly

$$\begin{aligned} A_k &:= (2k\pi - \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi), \quad & B_k &:= (2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi), \\ C_k &:= (2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi), \quad & D_k &:= (2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi), \\ E_k &:= (2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi), \quad & F_k &:= (2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{3}\pi), \end{aligned} \tag{100}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. V každém z nich napíšeme $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = \frac{-\sin x}{(2\cos x - 1)(2\cos^2 x - 1)}, \tag{99'}$$

položíme $\cos x = y$ a aplikujeme 1SM. Zbývá najít primitivní funkci funkce

$$g(y) := \frac{1}{(2y-1)(2y^2-1)} \tag{101}$$

v intervalech, které neobsahují žádný z bodů $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Čtenář snadno ověří, že identita

$$g(y) = \frac{a}{2y-1} + \frac{b}{\sqrt{2}\,y - 1} + \frac{c}{\sqrt{2}\,y + 1}, \tag{102}$$

kde

$$a = -2, \quad b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1), \quad c = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \tag{103}$$

je rozkladem $g(y)$ na jednoduché zlomky. Funkce

$$G(y) := -\lg|2y-1| + \frac{b}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}\,y - 1| + \frac{c}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}\,y + 1|, \tag{104}$$

kterou lze napsat také ve tvaru

$$G(y) = -\lg|2y-1| + \tfrac{1}{2}\lg|2y^2-1| + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\lg\left|\frac{\sqrt{2}y-1}{\sqrt{2}y+1}\right|, \tag{104'}$$

je proto funkcí primitivní ke $g(y)$ (v intervalech, které neobsahují žádný z bodů $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$) a funkce $G(\cos x)$, tj. funkce

$$F(x) := -\lg|2\cos x - 1| + \tfrac{1}{2}\lg|2\cos^2 x - 1| + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\lg\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right|, \tag{105}$$

funkcí primitivní k $f(x)$ v každém z intervalů (100).

* * *

Příklad 9.12. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\big), \tag{106}$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných a $a \neq 0$, b, c jsou konstanty.

Označíme

$$p(x) := ax^2+bx+c, \quad P := \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}, \quad D := b^2 - 4ac \tag{107}$$

a vyšetříme tyto dva případy:

A. $a \in \mathbb{R}_-$ a p má dva různé reálné kořeny $x_1 < x_2$, takže $P = (x_1, x_2)$.

B. $a \in \mathbb{R}_+$ a p má dva různé kořeny – buď reálné, nebo imaginární. [11])

V případě **A** vysvětlíme dvě metody hledání funkce primitivní k funkci (106):

A1. Je-li $x \in P$, je $p(x) = -a(x-x_1)(x_2-x)$ a všechny tři faktory jsou kladné. Vytkneme-li před odmocninu z $p(x)$ např. výraz $(x_2 - x)$, tj. napíšeme-li

$$\sqrt{p(x)} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{-a}\,(x_2-x)\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}\,, \tag{108}$$

změní se (106) na funkci tvaru $R^*(x, \sqrt{(x-x_1)/(x_2-x)}\,$, kde R^* je zřejmě opět racionální funkce. Dále tedy můžeme postupovat jako v odstavci 9.10. [12])

A2. Napišme $p(x)$ ve tvaru

$$p(x) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{D}{4a} = -a\Big(\frac{D}{4a^2} - \Big(x - \frac{b}{2a}\Big)^2\Big); \tag{109}$$

[11]) Jen tyto dva případy přinesou totiž něco nového: Je-li $a = b = 0$ a $c \geq 0$, je $f(x)$ racionální funkce; je-li $a = b = 0$ a $c < 0$, nemá odmocnina v (106) smysl. Případ $a = 0 \neq b$ jsme již vyšetřili v odstavci 9.10. Má-li p dvojnásobný kořen x_0 a je-li $a < 0$, má odmocnina smysl jen v bodě x_0; je-li $a > 0$, je $\sqrt{p(x)} = \sqrt{a(x-x_0)^2} = \pm\sqrt{a}\,(x-x_0)$ a $f(x)$ je racionální funkce.

[12]) Lze vytknout i výraz $x - x_1$; *ať již však vytýkáme cokoli, měli bychom pečlivě zkontrolovat znaménko vytýkaného výrazu.*

protože předpokládáme, že $p(x)$ má dva různé reálné kořeny, je $D > 0$, takže lze provést substituci

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{-2a}\, y\,. \tag{110}$$

Tím $p(x)$ přejde ve výraz $d(1-y^2)$, kde $d := -D/4a$. Další substitucí $y = \sin t$ nebo $y = \cos t$ pak dostaneme funkci tvaru (77) z odstavce 9.11. $\square$

Má-li polynom p za situace **B** imaginární kořeny, je $P = \mathbb{R}$; má-li reálné kořeny

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;<\; x_2 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \tag{111}$$

je $P = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$. V obou případech je funkce

$$\psi(x) := \sqrt{a}\, x + \sqrt{ax^2 + bx + c} \tag{112}$$

diferencovatelná všude v P. Její derivace

$$\psi'(x) = \sqrt{a} + \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{113}$$

tam nemá žádný kořen, protože z rovnosti $\psi'(x) = 0$ by plynula – jak čtenář snadno ověří – rovnost $D = 0$. Substituční rovnice $\psi(x) = t$, kterou je obvyklé psát spíše ve tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}\, x\,, \tag{114}$$

má pro $x \in P$ a $t \in \psi(P)$ právě jedno řešení

$$x = \omega(t) := \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\, t + b}\,. \tag{115}$$

Funkce $\psi : P \to \mathbb{R}$ a $\omega : \psi(P) \to_{\mathrm{na}} P$ jsou navzájem inverzní, přičemž druhá z nich splňuje všechny předpoklady 2SM v každém otevřeném intervalu $J \subset \psi(P)$. Protože $\omega(t)$ je racionální funkce proměnné t, platí totéž o její derivaci

$$\omega'(t) = 2\, \frac{\sqrt{a}\, t^2 + bt + \sqrt{a}\, c}{(2\sqrt{a}\, t + b)^2}\,; \tag{116}$$

totéž však platí i o výrazu

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}\, \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\, t + b} = \frac{\sqrt{a}\, t^2 + bt + \sqrt{a}\, c}{2\sqrt{a}\, t + b}\,. \tag{117}$$

Z toho plyne, že substituce (114), jedna z tzv. **Eulerových substitucí**, převádí (za situace **B**, tj. při $a > 0$) integraci funkce (106) na integraci racionální funkce.

Z početního hlediska je velmi výhodné, že *při aplikaci Eulerovy substituce v konkrétních příkladech není nutné ověřovat předpoklady druhé substituční metody*, protože jsme je ověřili obecně.

Všimněme si ještě, že poslední zlomky ve (116) a (117) jsou velmi podobné; je-li navíc $a = 1$, je v jejich čitatelích totéž co pod odmocninou na levé straně (114) – jen x je třeba nahradit t. Této podobnosti lze využít při kontrole správnosti výpočtů v konkrétních situacích.

Bylo by zbytečné pamatovat si (115); daleko lépe se asi pamatuje Eulerova substituce (114). Z této substituční rovnice vypočteme x jako funkci t, tj. najdeme funkci ω. Z toho, co jsme dokázali, plyne, že při výpočtech nebudeme mít žádné potíže, jako je např. nula ve jmenovateli nebo nejednoznačnost výsledku.

Příklad 9.12a. Hledejme funkci primitivní k funkci

$$f(x) := x\sqrt{6 + x - x^2}\,. \tag{118}$$

Protože koeficient u x^2 je záporný a protože polynom pod odmocninou má kořeny -2 a 3, je $(-2, 3)$ (jediný) maximální interval, v němž primitivní funkce existuje. Napišme $f(x)$ ve tvaru $x(3 - x)\sqrt{(x + 2)/(3 - x)}$, položme

$$\sqrt{\frac{x + 2}{3 - x}} = t\,, \quad \text{tj. } x = \omega(t) := \frac{3t^2 - 2}{t^2 + 1}\,, \tag{119}$$

a vypočítejme

$$\omega'(t) = \frac{10t}{(t^2 + 1)^2}\,, \quad 3 - x = \frac{5}{t^2 + 1}\,. \tag{120}$$

Protože $(-2, 3) = \omega(\mathbb{R}_+)$, budeme hledat funkci primitivní k funkci

$$\begin{aligned} g(t) :&= f(\omega(t))\,\omega'(t) = \frac{3t^2 - 2}{t^2 + 1} \cdot \frac{5}{t^2 + 1} \cdot t \cdot \frac{10t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{150}{(t^2 + 1)^2} - \frac{400}{(t^2 + 1)^3} + \frac{250}{(t^2 + 1)^4} \end{aligned} \tag{121}$$

v $\mathbb{R}_+$. Násobíme-li identity (28_2), (28_3), (28_4) po řadě čísly 150, -400, 250 a sečteme-li výsledky, dostaneme (po evidentní úpravě) identitu

$$g(t) = \Big(\frac{25}{8}\operatorname{arctg} t + \frac{25}{8}\frac{t}{t^2 + 1} - \frac{575}{12}\frac{t}{(t^2 + 1)^2} + \frac{125}{3}\frac{t}{(t^2 + 1)^3}\Big)' \tag{122}$$

platnou všude v $\mathbb{R}_+$. Dosadíme-li podle první rovnosti ve (119) a druhé rovnosti ve (120), dostaneme (po úpravě) tento konečný výsledek:

$$f(x) = \left(\frac{25}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x + 2}{3 - x}} - \frac{8x^2 - 2x - 51}{8}\sqrt{6 + x - x^2}\right)' \text{ v } (-2, 3)\,. \tag{123}$$

Příklad 9.12b. Vzhledem k tomu, že polynom $-x^2 + 5x - 4$ má kořeny 1 a 4, budeme primitivní funkci funkce

$$f(x) := \sqrt{-x^2 + 5x - 4} \tag{124}$$

hledat v intervalu $I := (1, 4)$; abychom ilustrovali i druhý možný postup za situace **A**, užijeme tentokrát rozklad

$$-x^2 + 5x - 4 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\left[1 - \left(\frac{2x - 5}{3}\right)^2\right]; \tag{125}$$

při lineární substituci

$$\tfrac{1}{3}(2x - 5) = t \quad \text{neboli} \quad x = \omega(t) := \tfrac{1}{2}(3t + 5) \tag{126}$$

odpovídá intervalu I proměnné x interval $J := (-1, 1)$ proměnné t a $\omega'(t) = \frac{3}{2}$.

Podle 2SM sestrojíme funkci

$$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = \tfrac{9}{4}\sqrt{1 - t^2}\,, \quad t \in J, \tag{127}$$

a provedeme hned další substituci $t = \tau(s) := \sin s$, $s \in K := (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Její derivace $\tau'(s) = \cos s$ je v K kladná, přičemž $\tau(K) = J$. Aplikujeme opět 2SM a píšeme

$$\begin{aligned} h(s) :&= g(\tau(s))\,\tau'(s) = \tfrac{9}{4}\cos^2 s = \tfrac{9}{8}(1 + \cos 2s) \\ &= \left(\tfrac{9}{8}(s + \tfrac{1}{2}\sin 2s)\right)' = \left(\tfrac{9}{8}(s + \sin s \cos s)\right)' \end{aligned} \tag{128}$$

pro všechna $s \in K$. Protože v K je $\cos s = \sqrt{1 - \sin^2 s}$ [13]), je

$$g(t) = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin t + t\sqrt{1 - t^2}\,\right)' \ \text{ v } \ (-1, 1)\,, \tag{129}$$

takže

$$f(x) = \left(\tfrac{9}{8}\arcsin \tfrac{1}{4}(2x - 5) + \tfrac{1}{4}(2x - 5)\sqrt{-x^2 + 5x - 4}\,\right)' \ \text{ v } \ (1, 4)\,. \tag{130}$$

Příklad 9.12c. Protože je $x^2 + 4x + 5 > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, má funkce

$$f(x) := x\sqrt{x^2 + 4x + 5} \tag{131}$$

[13]) Obecně je $\cos u = \pm\sqrt{1 - \sin^2 u}$ (a podobně $\sin u = \pm\sqrt{1 - \cos^2 u}$); *před užitím kterékoli z těchto identit je třeba vždy pečlivě zvážit, které znaménko je v té které konkrétní situaci správné.* Kdybychom se např. rozhodli pro substituci $t = \cos s$ v intervalu $(-\pi, 0)$, museli bychom $\sin s$ nahrazovat výrazem $-\sqrt{1 - \cos^2 s}$.

primitivní funkce v celém $\mathbb{R}$. Položíme-li $\sqrt{x^2+4x+5} = t - x$, bude

$$x = \omega(t) := \frac{t^2-5}{2(t+2)}, \quad \omega'(t) = \frac{t^2+4t+5}{2(t+2)^2}, \tag{132a}$$

$$\sqrt{x^2+4x+5} = t - \frac{t^2-5}{2(t+2)} = \frac{t^2+4t+5}{2(t+2)}; \tag{132b}$$

podle 2SM budeme proto v intervalu $(-2, +\infty) = \omega_{-1}(\mathbb{R})$ [14]) integrovat funkci

$$\begin{aligned} g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) &= \frac{t^2-5}{2(t+2)} \cdot \frac{t^2+4t+5}{2(t+2)} \cdot \frac{t^2+4t+5}{2(t+2)^2} \\ &= \frac{t^2-3}{8} - \frac{1}{t+2} - \frac{1}{8(t+2)^2} - \frac{1}{2(t+2)^3} - \frac{1}{8(t+2)^4}. \end{aligned} \tag{133}$$

Dostaneme tak identitu

$$g(t) = \left(\frac{t^3}{24} - \frac{3t}{8} - \lg(t+2) + \frac{1}{8(t+2)} + \frac{1}{4(t+2)^2} + \frac{1}{24(t+2)^3}\right)'. \tag{134}$$

Dosazením $t = x + \sqrt{x^2+4x+5}$ a algebraickou úpravou výsledku (při níž vynecháme nepodstatnou aditivní konstantu $5/12$) získáme identitu

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{3}(x^2+x-1)\sqrt{x^2+4x+5} - \lg\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)\right)' \tag{135}$$

platnou všude v $\mathbb{R}$.

Poznámka 9.5. Protože funkce lze často integrovat několika různými způsoby, může se stát, že získané výsledky se na první pohled dosti podstatně liší; jeden z nich může např. obsahovat funkci arcsin nebo arccos, druhý funkci arctg. Snad je proto vhodné připomenout, že platí např. identity

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}, \tag{136'}$$

$$\arccos x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{pro všechna } x \in (-1, 1\rangle. \tag{136''}$$

I když však tyto identity při porovnávání výsledků užijeme, nemusíme dostat stejnou primitivní funkci; v každém intervalu by se však výsledky měly lišit nejvýše o aditivní konstantu.

* * *

[14]) Tento interval lze najít např. tak, že vypočítáme limity v $\pm\infty$ (ryze monotónní) funkce $\psi(x) := x + \sqrt{x^2+4x+5}$, která je funkcí inverzní k funkci $\omega(t)$.

Příklad 9.13. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu. Tak zde budeme nazývat rovnice tvaru

$$y' + fy = g\,, \tag{137}$$

kde

(138) funkce f, g jsou spojité v jistém intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Říkáme, že funkce $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **řešení**[15]) této rovnice (v intervalu (a, b)), je-li všude v (a, b) diferencovatelná a splňuje-li identitu

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \tag{137'}$$

pro každé $x \in (a, b)$.

Obecným řešením rovnice (137) (v intervalu (a, b)) se nazývá množina všech jejích řešení (v (a, b)); **rozřešit** rovnici (137) znamená najít její obecné řešení.

Integračním faktorem rovnice (137) nazýváme každou funkci tvaru $\pm \exp \circ F$, kde $F \in PF(f; a, b)$. Podle V.9.2 integrační faktory existují; snadno přitom nahlédneme (sr. s V.9.1), že platí:

Je-li H integrační faktor rovnice (137), *jsou integračními faktory této rovnice právě všechny funkce tvaru kH, kde $0 \neq k \in \mathbb{R}$.*

Popišme nyní jednoduchý *algoritmus řešení* rovnice (137) (za předpokladu (138)):

1. Rovnici (137) vynásobíme (kterýmkoli) jejím integračním faktorem; protože tento faktor je všude nenulová funkce, je rovnost (137) *ekvivalentní* s rovností

$$(y' + fy) \cdot \exp \circ F = g \cdot \exp \circ F \tag{139}$$

v tom smyslu, že identita (137′) platí všude v (a, b), právě když všude v (a, b) platí identita

$$(y'(x) + f(x)y(x))\, e^{F(x)} = g(x)\, e^{F(x)}\,. \tag{139'}$$

2. Levá strana rovnice (139′) je zřejmě derivací funkce $y(x)e^{F(x)}$. Pravá strana této rovnice je funkce spojitá v (a, b), a má tam tedy primitivní funkce. Je-li $G(x)$ kterákoli z nich, je (139′) ekvivalentní s rovnicí

$$\big(y(x)e^{F(x)}\big)' = G'(x)\,. \tag{139''}$$

3. Právě napsaná rovnost derivací, platná všude v (a, b), je ekvivalentní s existencí konstanty $c \in \mathbb{R}$, pro niž je $y(x)e^{F(x)} = G(x) + c$ všude v (a, b), což je dále ekvivalentní s rovností

$$y(x) = e^{-F(x)}(G(x) + c) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (a, b)\,. \tag{140}$$

---

[15]) Často se podrobněji říká „*partikulární řešení*“.

Z postupu řešení je zřejmé, že

(141) *funkce* $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ *je řešením rovnice* (137), *právě když existuje* $c \in \mathbb{R}$ *tak, že platí* (140).

Zároveň je patrné, že

(142) *pro každá dvě čísla* $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ *existuje právě jedno řešení* $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ *rovnice* (137) *tak, že* $y(x_0) = y_0$;

dosazením do (140) získáme ihned příslušnou konstantu $c = y_0\, e^{F(x_0)} - G(x_0)$.

Zadáme-li čísla $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, říkáme, že jsme zadali **počáteční podmínky řešení** rovnice (137); často se stručněji mluví o **počáteční podmínce** $y(x_0) = y_0$. Jak je patrné, zadání počáteční podmínky vede k výběru *právě jednoho* řešení z nekonečné množiny *všech* řešení rovnice (137) neboli z jejího *obecného řešení*.

Poznámka 9.6. Grafy řešení se nazývají *integrální křivky*. Tvrzení (142) názorně znamená, že každým bodem množiny $(a, b) \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka.

Příklad 9.13a. Rozřešme diferenciální rovnici

$$y' + xy = x. \tag{143}$$

Protože je $x = \left(\frac{1}{2}x^2\right)'$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je funkce $\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ integračním faktorem rovnice. Kromě toho je $xe^{x^2/2} = \left(e^{x^2/2}\right)'$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Řešeními rovnice (143) jsou tedy právě všechny funkce $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$y(x) = e^{-x^2/2} \cdot \left(e^{x^2/2} + c\right) = 1 + ce^{x^2/2}, \ \text{ kde } \ c \in \mathbb{R}. \tag{144}$$

Řešení y, splňující např. počáteční podmínku $y(0) = 0$, získáme dosazením této rovnosti do (144); odpovídající konstantou je zřejmě $c = -1$.

Příklad 9.13b. Rozřešme diferenciální rovnici

$$y' + y \operatorname{cotg} x = \cos x; \tag{145}$$

maximálními intervaly, v nichž jsou spojité funkce $\operatorname{cotg} x$ a $\cos x$ jsou intervaly $I_k := (k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Protože v každém I_k je

$$\operatorname{cotg} x = (\lg|\sin x|)', \ \ \cos x\,|\sin x| = \cos x \cdot (-1)^k \sin x = \left((-1)^k \tfrac{1}{2} \sin^2 x\right)', \tag{146}$$

je funkce $y : I_k \to \mathbb{R}$ řešením rovnice (145), právě když existuje konstanta c_k tak, že rovnost

$$y(x) = \frac{(-1)^k}{\sin x}\left(\tfrac{1}{2}(-1)^k \sin^2 x + c_k\right) = \tfrac{1}{2}\sin x + \frac{(-1)^k c_k}{\sin x} \tag{147}$$

platí pro všechna $x \in I_k$. Protože každé číslo c_k lze napsat ve tvaru $(-1)^k d_k$, lze ekvivalentně říci, že funkce $y : I_k \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice (145), právě když existuje konstanta $d_k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$y\,(x) = \tfrac{1}{2} \sin x + \frac{d_k}{\sin x} \quad \text{pro všechna } x \in I_k\,. \tag{147'}$$

Řešení y (v I_k), které splňuje počáteční podmínku $y\,(\frac{1}{2}(2k+1)\pi) = 0$, se získá dosazením do (147′); odpovídá mu konstanta $d = -\frac{1}{2}$. $\square$

Algoritmus řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu pomocí integračního faktoru není v zásadě nijak složitý; často však narazíme na neodstranitelnou překážku související s tím, že primitivní funkce některých jednoduchých spojitých funkcí nepatří mezi tzv. *elementární funkce* [16]). Ilustrujme to příkladem:

Příklad 9.13c. Rovnice

$$y' - 2xy = 1\,, \tag{148}$$

na první pohled jednodušší než rovnice (143), má řešení opět v celém $\mathbb{R}$. Protože jejím integračním faktorem je funkce $\exp(-x^2)$, je rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$\big(ye^{-x^2}\big)' = e^{-x^2}\,, \tag{149}$$

jejíž pravá strana patří mezi nejznámější funkce, které nemají elementární primitivní funkci. Označíme-li však $\mathrm{Erf}(x)$ funkci primitivní k $\exp(-x^2)$ splňující podmínku $\mathrm{Erf}(0) = 0$, můžeme v algoritmu pokračovat: Všude v $\mathbb{R}$ je

$$y(x)e^{-x^2} = \mathrm{Erf}(x) + c\,, \quad \text{tedy} \quad y(x) = (\mathrm{Erf}(x) + c)\,e^{x^2}\,, \tag{150}$$

kde c je libovolná konstanta. Tím je popsáno obecné řešení rovnice (148).

Pokud poněkud předběhneme a užijeme výsledků z kapitoly 10, můžeme funkci $\mathrm{Erf}(x)$ napsat ve tvaru

$$\mathrm{Erf}(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx\,, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{151}$$

druhý ze vztahů (150) lze pak nahradit rovností

$$y(x) = e^{x^2} \Big(\int_0^x e^{-x^2} dx + c \Big), \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{150'}$$

z níž je patrné na první pohled, kterou funkci jsme integrovali. [17])

[16]) Jsou to zhruba řečeno funkce, které nelze vytvořit z „běžných funkcí“ (jako jsou obecné mocniny, exponenciály, logaritmy, goniometrické a cyklometrické funkce) *konečným počtem* algebraických operací a superpozic.

[17]) Funkce (151) („Er*ror* f*unction*“) má principiální význam pro teorii pravděpodobnosti, ale také např. pro některé fyzikální obory; až na multiplikativní konstantu $2/\sqrt{\pi}$ je to tzv. *pravděpodobnostní integrál*, jehož hodnoty jsou již desítky let podrobně tabelovány.

Cvičení

V každém z příkladů 9.01–9.148 je úkolem najít funkci primitivní k dané funkci, a to ve všech maximálních (otevřených) intervalech, v nichž existuje; α a β jsou libovolná reálná čísla.

9.01. $x^3 \sin x^2$

9.02. $x^5 e^{-x^2}$

9.03. $x^3 \lg(1+x^2)$

9.04. $x^\alpha \lg x$

9.05. $x \sin x$

9.06. $x \cos x$

9.07. $x^2 \sin x$

9.08. $x^2 \cos x$

9.09. $x^3 \sin x$

9.10. $x^3 \cos x$

9.11. $\sin^2 x$

9.12. $\cos^2 x$

9.13. $\sin^3 x$

9.14. $\cos^3 x$

9.15. $x \sinh x$

9.16. $x \cosh x$

9.17. $x^2 \sinh x$

9.18. $x^2 \cosh x$

9.19. $\arcsin x$

9.20. $\operatorname{arctg} x$

9.21. $x^2 \operatorname{arctg} x$

9.22. $x^2 \operatorname{arccotg} x$

9.23. $x^2 \arcsin x$

9.24. $x^2 \arccos x$

9.25. $\dfrac{x}{x^4+1}$

9.26. $\dfrac{x^3}{x^4+1}$

9.27. $\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

9.28. $\dfrac{\cos x}{1+3\sin^2 x}$

9.29. $\dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}$

9.30. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

9.31. $\dfrac{1}{x \lg^2 x (\lg x - 1)}$

9.32. $\dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x - 3}$

9.33. $\dfrac{1}{e^{2x}-1}$

9.34. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

9.35. $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

9.36. $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

9.37. $\dfrac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$

9.38. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

9.39. $\dfrac{x}{\sin^2 x}$

9.40. $\dfrac{x}{\cos^2 x}$

9.41. $\dfrac{1}{x^4-1}$

9.42. $\dfrac{4x^2}{x^4-1}$

9.43. $\dfrac{1}{x^3+1}$

9.44. $\dfrac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}$

9.45. $\dfrac{3x-1}{x^2(x-1)^2}$

9.46. $\dfrac{32x^5}{(2x-1)^3}$

9.47. $\dfrac{x^5}{(x^2-4)^2}$

9.48. $\dfrac{x^6}{(x^2+2)^2}$

9.49. $\dfrac{1}{(x-1)^3(x+1)}$

9.50. $\dfrac{x^4}{(x^2-1)(x-2)}$

9.51. $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x}$

9.52. $\cos \alpha x \, \cos \beta x$

9.53. $\sqrt{x^2+1}$

9.54. $\sqrt{x^2-1}$

9.55. $\dfrac{1}{x^4+1}$

9.56. $\dfrac{x^2}{x^4+1}$

9.57. $3\sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

9.58. $\dfrac{\sin x}{(\cos x-1)(2\cos x-1)}$

9.59. $\dfrac{1}{\sin x\,(2\cos^2 x-1)}$

9.60. $\dfrac{\sinh x}{\cosh x\,(\sinh^2 x-3)}$

9.61. $\dfrac{6\lg x}{x\,(\lg^2 x-1)(\lg^2 x-4)}$

9.62. $\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

9.63. $\dfrac{x^3+2x+2}{x^3-3x^2+2x}$

9.64. $\dfrac{2x^2+6x+5}{x^4+5x^2+4}$

9.65. $\dfrac{x^4-6x^2+81}{x\,(x^2-9)^2}$

9.66. $\dfrac{x^4}{x^3-2x^2-5x+6}$

9.67. $\dfrac{7x^2-x+5}{x^4+x^2+1}$

9.68. $\dfrac{x^4+x^3-4x^2+20x+16}{(x+2)^3(x-2)^2}$

9.69. $\dfrac{x^5+3x^4+2x^3+4x^2+2x+2}{x^2\,(x^2+2x+2)}$

9.70. $\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2(x^2-2x+2)(x-1)^2}$

9.71. $\dfrac{e^{2x}}{e^{4x}+1}$

9.72. $\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$

9.73. $\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}-1}$

9.74. $\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+e^x+1}$

9.75. $\dfrac{1}{e^{2x}-e^x+1}$

9.76. $\dfrac{e^{x}}{e^{4x}+1}$

9.77. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg^2 x}{\lg^3 x+8}$

9.78. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg^2 x}{(\lg x-1)^2}$

9.79. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg x+1}{\lg^2 x-\lg x+1}$

9.80. $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\lg^4 x-1}$

9.81. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg(2x)}{\lg^2 x+3}$

9.82. $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\lg^3 x-5\lg^2 x+6\lg x}$

9.83. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

9.84. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

9.85. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$

9.86. $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$

9.87. $\dfrac{1}{x-3}\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$

9.88. $(x-3)\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$

9.89. $x\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$

9.90. $x^2\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$

9.91. $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1}$

9.92. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+1}$

9.93. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}-4}$

9.94. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}}$

9.95. $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$

9.96. $\dfrac{2\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt[3]{x+3}+2}$

9.97. $\dfrac{2\sqrt[3]{x-1}+1}{2\sqrt[3]{x-1}-1}$

9.98. $\dfrac{\cos x}{\cos x+1}$

9.99. $\dfrac{\sin x}{\sin x+1}$

9.100. $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x-1}$

9.101. $\dfrac{1}{(1-\cos x)\sin x}$

9.102. $\dfrac{1}{(1+\cos x)\sin x}$

9.103. $\dfrac{1}{2\sin^2 x-1}$

9.104. $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

9.105. $\dfrac{\cos x}{\sin x-\cos x}$

9.106. $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

9.107. $\dfrac{2\sin x}{\sin^2 x+1}$

9.108. $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$

9.109. $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

9.110. $\dfrac{1}{\sin x+2}$

9.111. $\dfrac{1}{\cos x+3}$

9.112. $\dfrac{\sin x}{\sin^4 x-1}$

9.113. $\dfrac{\cos x}{(\sin x-1)(\sin^2 x+1)}$

9.114. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-4\sin x\cos x}$

9.115. $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(4\sin^2 x-1)}$

9.116. $\dfrac{1}{(2\sin^2 x-1)(2\cos^2 x-1)}$

9.117. $\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

9.118. $\dfrac{1}{3\cos x+4\sin x+5}$

9.119. $\dfrac{\sin x+\sin^3 x}{\cos x+\cos^3 x}$

9.120. $\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}$

9.121. $\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+3}$

9.122. $\dfrac{1}{\cos^2 x-4\cos x\sin x+5\sin^2 x}$

9.123. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x+2}$

9.124. $\dfrac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x}$

9.125. $\sqrt{x^2+2x-3}$

9.126. $x\sqrt{x^2+2x-3}$

9.127. $\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+2x-3}$

9.128. $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x^2+2x-3}$

9.129. $\sqrt{x^2-5x+4}$

9.130. $x\sqrt{x^2-5x+4}$

9.131. $\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2-5x+4}$

9.132. $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x^2-5x+4}$

9.133. $\sqrt{(x-1)(5-x)}$

9.134. $\sqrt{x^2+x+1}$

9.135. $\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}$

9.136. $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x^2+x+1}$

9.137. $x\sqrt{x^2+x+1}$

9.138. $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

9.139. $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$

9.140. $\dfrac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

9.141. $\dfrac{1}{x\sqrt{8+2x-x^2}}$

9.142. $\dfrac{15}{x^2\sqrt{15-2x-x^2}}$

9.143. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

9.144. $\dfrac{2x}{\sqrt{9-x^2}-(9-x^2)}$

9.145. $\dfrac{8x^3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-4}}$

9.146. $\dfrac{x+1}{\sqrt{(x^2+x+1)^3}}$

9.147. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

9.148. $\dfrac{1}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}$

V příkladech 9.149 – 9.170 je úkolem najít obecná řešení příslušných rovnic, a to v maximálních intervalech, v nichž existují.

9.149. $y'-xy=x$

9.150. $y'-y=x^3$

9.151. $y'-x^2y=x^2$

9.152. $y'+y=e^x$

9.153. $y'-y=e^x\sin x$

9.154. $y'+y=\sin x$

9.155. $y'+3x^2y=3x^5$

9.156. $y'+y=5e^x\sin x$

9.157. $y'+\sin x\cdot y=\sin x$

9.158. $y'+\dfrac{y}{x}=x$

9.159. $y'+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$

9.160. $y'+\dfrac{y}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9.161. $y'+\dfrac{y}{x\lg x}=1$

9.162. $y'+\dfrac{xy}{x^2+1}=x$

9.163. $y'+\lg x\cdot y=x^{-x}$

9.164. $y'-\operatorname{tg} x\cdot y=x$

9.165. $y' + \dfrac{x^2 y}{x^3 - 1} = x^2$

9.166. $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 3x$

9.167. $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9.168. $y' + \dfrac{y}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = 1$

9.169. $y' + \dfrac{y}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = x$

9.170. $y' - \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 3\sqrt{1+x^2}$

Řešení

Připomeňme, že lze napsat „$F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in M$“, protože derivování se provádí v množině M „bod po bodu“, ale případě, že M je např. sjednocením dvou disjunktních intervalů (a,b), (c,d), je třeba říci, že „F je primitivní funkcí funkce f v (a,b) a v (c,d)“, protože pojem primitivní funkce byl zaveden jen v (otevřených) intervalech. (P ř í k l a d : Lze napsat „$\big(x(\lg|x|-1)\big)' = \lg|x|$ pro všechna $x \neq 0$“, ale je třeba říci, že „$x(\lg|x|-1)$ je funkce primitivní k funkci $\lg|x|$ v intervalech $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$“.)

V seznamu řešení příkladů 9.01–9.148 dáme přednost prvnímu způsobu zápisu, protože je stručnější; každá z funkcí uvedených v následujícím seznamu má tedy v uvedeném oboru derivaci rovnou funkci zadané pod týmž číslem ve Cvičení.

9.01. $\frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2 \cos x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.02. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}\big(2 + 2x^2 + x^4\big)$ v $\mathbb{R}$

9.03. $\frac{1}{4}(x^4 - 1)\lg(1 + x^2) + \frac{1}{8}x^2(2 - x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.04. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\big((\alpha+1)\lg x - 1\big) & \text{pro } \alpha \neq -1 \\ \frac{1}{2}\lg^2 x & \text{pro } \alpha = -1 \end{array}\right\}$ v $\mathbb{R}_+$

9.05. $\sin x - x\cos x$ v $\mathbb{R}$

9.06. $\cos x + x\sin x$ v $\mathbb{R}$

9.07. $(2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$ v $\mathbb{R}$

9.08. $(x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x$ v $\mathbb{R}$

9.09. $(6 - x^2)x\cos x + 3(x^2 - 2)\sin x$ v $\mathbb{R}$

9.10. $(x^2 - 6)x\sin x + 3(x^2 - 2)\cos x$ v $\mathbb{R}$

9.11. $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.12. $\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.13. $-\frac{1}{3}\cos x(2 + \sin^2 x)$ $(= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.14. $\frac{1}{3}\sin x\,(2+\cos^2 x)$ $(=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x)$ v $\mathbb{R}$

9.15. $x\cosh x-\sinh x$ v $\mathbb{R}$

9.16. $x\sinh x-\cosh x$ v $\mathbb{R}$

9.17. $(x^2+2)\cosh x-2x\sinh x$ v $\mathbb{R}$

9.18. $(x^2+2)\sinh x-2x\cosh x$ v $\mathbb{R}$

9.19. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ v $(-1,1)$

9.20. $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\lg(x^2+1)$ v $\mathbb{R}$

9.21. $\frac{1}{6}(2x^3\,\mathrm{arctg}\,x+\lg(x^2+1)-x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.22. $\frac{1}{6}(2x^3\,\mathrm{arccotg}\,x-\lg(x^2+1)+x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.23. $\frac{1}{9}(3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2})$ v $(-1,1)$

9.24. $\frac{1}{9}(3x^3\arccos x-(x^2+2)\sqrt{1-x^2})$ v $(-1,1)$

9.25. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2$ v $\mathbb{R}$

9.26. $\frac{1}{4}\lg(x^4+1)$ v $\mathbb{R}$

9.27. $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ v $\mathbb{R}$

9.28. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\sin x)$ v $\mathbb{R}$

9.29. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$ v $\mathbb{R}$

9.30. $\lg\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$ pro $x\neq 0$

9.31. $\lg\left|1-\dfrac{1}{\lg x}\right|+\dfrac{1}{\lg x}$ pro $x\in\mathbb{R}_+,\ 1\neq x\neq e$

9.32. $-\frac{1}{2}\lg(3-2\cos^2 x)$ v $\mathbb{R}$

9.33. $\frac{1}{2}\lg|e^{2x}-1|-x$ pro $x\neq 0$

9.34. $\frac{1}{2}\arcsin^2 x$ v $(-1,1)$

9.35. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\lg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ v $(-1,1)$

9.36. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ v $(-1,1)$

9.37. $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ v $\mathbb{R}$

9.38. $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \lg\sqrt{1-x^2}$ v $(-1,1)$

9.39. $\lg|\sin x| - x \operatorname{cotg} x$ pro $x \neq k\pi$

9.40. $\lg|\cos x| + x \operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$

9.41. $\frac{1}{4}\lg\Bigl|\dfrac{x-1}{x+1}\Bigr| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ pro $x \neq \pm 1$

9.42. $\lg\Bigl|\dfrac{x-1}{x+1}\Bigr| + 2\operatorname{arctg} x$ pro $x \neq \pm 1$

9.43. $\frac{1}{3}\lg\Bigl|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\Bigr| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$ pro $x \neq -1$

9.44. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$ v $\mathbb{R}$

9.45. $\lg\Bigl|\dfrac{x}{x-1}\Bigr| + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-1}$, je-li $0 \neq x \neq 1$

9.46. $\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + 6x + 5\lg|2x-1| - \dfrac{5}{2(2x-1)} - \dfrac{1}{4(2x-1)^2}$ pro $x \neq \frac{1}{2}$

9.47. $\frac{1}{2}x^2 + 4\lg|x^2-4| - \dfrac{8}{x^2-4}$ pro $x \neq \pm 2$

9.48. $\frac{1}{3}x^3 - 4x + 5\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{2x}{x^2+2}$ v $\mathbb{R}$

9.49. $\dfrac{1}{8}\lg\Bigl|\dfrac{x-1}{x+1}\Bigr| + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ pro $x \neq \pm 1$

9.50. $\dfrac{1}{6}\Bigl(\lg\Bigl|\dfrac{x+1}{(x-1)^3}\Bigr| + 32\lg|x-2| + 3x^2 + 12x\Bigr)$, je-li $\pm 1 \neq x \neq 2$

9.51. $2\sqrt{x} - \lg(x+\sqrt{x}+1) - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}$ v $\mathbb{R}_+$

9.52. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}\Bigl(\dfrac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \dfrac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\Bigr) & \text{pro } \alpha^2 \neq \beta^2 \\ \dfrac{1}{2}\Bigl(x + \dfrac{\sin\alpha x\cos\alpha x}{\alpha}\Bigr) & \text{pro } \alpha^2 = \beta^2 \neq 0 \\ x & \text{pro } \alpha = \beta = 0 \end{array}\right\}$

9.53. $\frac{1}{2}\bigl(x\sqrt{x^2+1} + \lg(x+\sqrt{x^2+1})\bigr)$ v $\mathbb{R}$

9.54. $\frac{1}{2}\bigl(x\sqrt{x^2-1} - \lg|x+\sqrt{x^2-1}|\bigr)$, je-li $|x| > 1$

9.55. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\Bigl(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + \lg\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Bigr)$ v $\mathbb{R}$

9.56. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\Bigl(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) - \lg\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Bigr)$ v $\mathbb{R}$

9.57. $2\sqrt{x^3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \lg(x+1) - x$ v $\mathbb{R}_+$

9.58. $\lg\left|\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-1}\right|$, je-li $0\not\equiv x\not\equiv\pm\frac13\pi \mod 2\pi$

9.59. $\dfrac12\Big(\lg\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\sqrt2\lg\left|\dfrac{\sqrt2\cos x+1}{\sqrt2\cos x-1}\right|\Big)$, je-li $k\pi\neq x\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{4}$

9.60. $\frac18\lg\dfrac{|\sinh^2 x-3|}{\cosh^2 x}$ pro $x\neq\pm\operatorname{argsinh}\sqrt3$

9.61. $\lg\left|\dfrac{\lg^2 x-4}{\lg^2 x-1}\right|$ pro $x\in\mathbb{R}_+-\{e,e^{-1},e^2,e^{-2}\}$

9.62. $x\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\big)+\lg\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{|x+\sqrt{x^2-1}|}$, je-li $|x|>1$

9.63. $x+\lg|x|-5\lg|x-1|+7\lg|x-2|$ pro $x\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$

9.64. $\operatorname{arctg}x+\frac12\operatorname{arctg}\frac12x+\lg\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ v $\mathbb{R}$

9.65. $\lg|x|-\dfrac{6}{x^2-9}$, je-li $0\neq x\neq\pm3$

9.66. $\frac12x^2+2x+\frac{16}{15}\lg|x+2|-\frac16\lg|x-1|+\frac{81}{10}\lg|x-3|$
pro $x\in\mathbb{R}-\{-2,1,3\}$

9.67. $\dfrac{1}{\sqrt3}\Big(7\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt3}+5\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt3}\Big)+\frac12\lg\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ v $\mathbb{R}$

9.68. $\lg|x+2|-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$ pro $x\neq\pm2$

9.69. $\frac12x^2+x-\dfrac1x-\lg(x^2+2x+2)+3\operatorname{arctg}(x+1)$ pro $x\neq0$

9.70. $\frac35\operatorname{arctg}(x-1)-\frac25\operatorname{arctg}x+\frac1{10}\lg\dfrac{(x^2+1)(x-1)^{10}}{(x^2-2x+2)^6}-\dfrac{1}{x-1}$ pro $x\neq1$

9.71. $\frac12\operatorname{arctg}e^{2x}$ v $\mathbb{R}$

9.72. $e^x-\operatorname{arctg}e^x$ v $\mathbb{R}$

9.73. $e^x+\frac12\lg\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right|$ pro $x\neq0$

9.74. $\dfrac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\dfrac{2e^x+1}{\sqrt3}$ v $\mathbb{R}$

9.75. $x+\dfrac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\dfrac{2e^x-1}{\sqrt3}-\frac12\lg(e^{2x}-e^x+1)$ v $\mathbb{R}$

9.76. $\dfrac{\sqrt2}{4}\Big(\operatorname{arctg}(\sqrt2e^x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt2e^x-1)+\frac12\lg\dfrac{e^{2x}+\sqrt2e^x+1}{e^{2x}-\sqrt2e^x+1}\Big)$ v $\mathbb{R}$

9.77. $\frac13\lg|\lg^3 x+8|$ v $\mathbb{R}_+-\{e^{-2}\}$

9.78. $\lg x + 2\lg|\lg x - 1| - \dfrac{1}{\lg x - 1}$ v $\mathbb{R}_+ - \{e\}$

9.79. $\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\lg x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\lg(\lg^2 x - \lg x + 1)$ v $\mathbb{R}_+$

9.80. $\frac{1}{4}\lg\left|\dfrac{\lg x - 1}{\lg x + 1}\right| - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(\lg x)$ v $\mathbb{R}_+ - \{e, e^{-1}\}$

9.81. $\dfrac{\lg 2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\lg x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\lg(\lg^2 x + 3)$ v $\mathbb{R}_+$

9.82. $\frac{1}{6}\lg|\lg x| - \frac{1}{2}\lg|\lg x - 2| + \frac{1}{3}\lg|\lg x - 3|$ v $\mathbb{R}_+ - \{1, e^2, e^3\}$

9.83. $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}} - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{2(x-1)}{2-x}}$ v $(1, 2)$

9.84. $\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}} - \sqrt{(x-1)(2-x)}$ v $(1, 2)$

9.85. $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}} - \dfrac{4}{\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3(2-x)}{2(x-3)}}$ v $(2, 3)$

9.86. $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}\,\dfrac{x-2}{3-x}} - \dfrac{\sqrt{(x-2)(3-x)}}{3x}$ v $(2, 3)$

9.87. $\arcsin\dfrac{2x-9}{3}$ nebo $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$ v $(3, 6)$

9.88. $\dfrac{27}{4}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}} + \frac{1}{4}(x-6)(2x+3)\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$ v $(3, 6)$

9.89. $\dfrac{7}{2}\left(\lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} + 1\right| - \lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} - 1\right|\right) + \frac{1}{2}(x+4)(x-5)\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$
v $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$

9.90. $\dfrac{25}{2}\left(\lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} - 1\right| - \lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} + 1\right|\right)$

$+ \frac{1}{6}(x+4)(2x^2 - 9x + 49)\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$ v $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$

9.91. $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt{3}}\right) + 2\left(\lg(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1) - \sqrt{x}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

9.92. $\frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{x} - \sqrt{x(x+1)} - \lg(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\,)\right)$ v $\mathbb{R}_+$

9.93. $\frac{1}{5}\left(48\lg|\sqrt[3]{x+2} - 4| - 3\lg|\sqrt[3]{x+2} + 1| + 15\sqrt[3]{x+2}\,\right)$,
je-li $-3 \neq x \neq 62$

9.94. $3\left(\sqrt[3]{x-1} - \lg|\sqrt[3]{x-1} + 1|\right)$, je-li $0 \neq x \neq 1$

9.95. $(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}-\dfrac{1}{2}\left(\lg|x-1|+3\lg\left|\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}-1\right|\right)$

$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}+1\right)\right)$ pro $x\neq 1$

9.96. $6\lg\left(\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt[3]{x+3}+2\right)+3\sqrt[3]{(x+3)^2}+12\sqrt[3]{x+3}$

$-12\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{x+3}-1\right)$

9.97. $x+\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\right)+\frac{3}{4}\lg|2\sqrt[3]{x-1}-1|$ pro $x\neq\frac{9}{8}$

9.98. $x-\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$, je-li $x\not\equiv\pi \mod 2\pi$

9.99. $x+\dfrac{\cos x}{\sin x+1}$, je-li $x\not\equiv-\frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$

9.100. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\lg\dfrac{1-\cos^3 x}{(1-\cos x)^3}$, je-li $x\neq 2k\pi$

9.101. $\dfrac{1}{2(\cos x-1)}+\frac{1}{4}\lg\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, je-li $x\not\equiv 0 \mod \pi$

9.102. $\dfrac{1}{2(\cos x+1)}+\frac{1}{4}\lg\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ pro $x\not\equiv 0 \mod \pi$

9.103. $\frac{1}{2}\lg\left|\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right|$ pro $x\neq\frac{1}{4}(2k+1)\pi$

9.104. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\lg\left|\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|$ pro $x\neq\frac{1}{4}(2k+1)\pi$

9.105. $\frac{1}{2}\left(\lg|\sin x-\cos x|-x\right)$ pro $x\neq\frac{1}{4}(4k+1)\pi$

9.106. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lg\left|\dfrac{1-\cos x+(1-\sqrt{2})\sin x}{1-\cos x+(1+\sqrt{2})\sin x}\right|$ pro $x\not\equiv\frac{1}{4}\pi \mod \pi$

9.107. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lg\dfrac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}$ v $\mathbb{R}$

9.108. $-\operatorname{arctg}(\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.109. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\sin^2 x-1)$ v $\mathbb{R}$

9.110. $\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2+\sin x-2\cos x}{\sqrt{3}\sin x}+k\pi\right) & \text{v } ((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)\\ (2k+1)\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.111. $\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{2}\sin x}+k\pi\right) & \text{v } ((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)\\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.112. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\lg\dfrac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}-\dfrac{1}{2\cos x}$ pro $x\neq\frac{1}{2}(2k+1)\pi$

9.113. $\frac{1}{4}\lg\dfrac{(1-\sin x)^2}{1+\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin x)$ pro $x\neq\frac{1}{2}(4k+1)\pi$

9.114. $\frac{1}{2}\lg\left|\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x-\cos x}\right|$, je-li $k\pi+\frac{1}{6}\pi\neq x\neq k\pi+\frac{1}{3}\pi$

9.115. $\dfrac{1}{3}\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\lg\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}\right|\right)$, je-li $\frac{1}{2}\pi\not\equiv x\not\equiv\pm\frac{1}{6}\pi \mod \pi$

9.116. $\dfrac{\sin x\cos x}{1-2\cos^2 x}$ pro $x\neq\frac{1}{4}(2k+1)\pi$

9.117. $$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(2k\pi+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1) & \\ +\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x-1)\big) & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right) \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x=\frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$$

9.118. $$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\sin x}{\cos x-2\sin x-1}, & \text{je-li } \pi\not\equiv x\not\equiv\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \mod 2\pi \\ 0 & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$$

9.119. $\frac{3}{2}\lg(\cos^2 x+1)-2\lg|\cos x|$ pro $x\neq\frac{1}{2}(2k+1)\pi$

9.120. $$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(k\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x+\cos x}{\sqrt{3}\cos x}\Big) & \\ -\frac{1}{2}\lg(1+\sin x\cos x) & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right) \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{pro } x=\frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$$

9.121. $$\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{2\sin x}{\cos x+1}\right)+k\pi & \text{v } \left((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\right) \\ \frac{1}{2}(2k+1)\pi & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$$

9.122. $$\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}x-2)+k\pi & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right) \\ \frac{1}{2}(2k+1)\pi & \text{pro } \frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$$

9.123. $$\left\{\begin{array}{ll}x-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+1}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}k\pi & \text{v } \left((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\right) \\ (2k+1)(1-\sqrt{2})\pi & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$$

9.124. $$\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)+k\pi & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right) \\ \frac{1}{2}(2k+1)\pi & \text{pro } \frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$$

9.125. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-3} - \lg\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2$

v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.126. $\frac{1}{6}(2x^2+x-9)\sqrt{x^2+2x-3} + \lg\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2$

v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.127. $\sqrt{x^2+2x-3} - \lg\left|x+1-\sqrt{x^2+2x-3}\right|$

$+\,2\sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\dfrac{x-\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{3}}$ v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.128. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$

$+\lg\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|$ v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.129. $\frac{1}{4}(2x-5)\sqrt{x^2-5x+4} - \frac{9}{8}\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$

v $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

9.130. $\frac{1}{24}(8x^2-10x-43)\sqrt{x^2-5x+4} - \frac{45}{16}\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$

v $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

9.131. $\sqrt{x^2-5x+4} + 2\lg\left|\dfrac{5x-8+4\sqrt{x^2-5x+4}}{x}\right|$

$-\,\frac{5}{2}\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$ v $\mathbb{R}_-\cup(0,1)\cup(4,+\infty)$

9.132. $-\,\frac{5}{4}\lg\left|\dfrac{5x-8-4\sqrt{x^2-5x+4}}{x}\right| - \dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x}$

$+\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$ v $\mathbb{R}_-\cup(0,1)\cup(4,+\infty)$

9.133. $\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(5-x)} - 4\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{5-x}{x-1}}$ nebo

$\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(5-x)} + 2\arcsin\frac{1}{2}(x-3)$ v $(1,5)$

9.134. $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\lg\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)$

9.135. $\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\lg\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right|$

$+\lg\left|\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right|$ v $\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+$

9.136. $\frac{1}{2}\lg\left|\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right| - \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

$+\lg\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)$ v $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$

9.137. $\frac{1}{24}(8x^2+2x+5)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{3}{16}\lg(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1)$ v $\mathbb{R}$

9.138. $\frac{15}{4}\lg(2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1) - 4\lg(\sqrt{x^2-x+1}+x)$

$+\frac{1}{2}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} - x^2 - x$ v $\mathbb{R}$

9.139. $\frac{1}{4}\lg(2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1) - 4\lg\left|\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right|$

$-\frac{1}{2}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} - x^2 - x$ v $\mathbb{R}-\{1\}$

9.140. $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x+2}{4-x}} - \sqrt{8+2x-x^2}$ nebo

$\arcsin\frac{1}{3}(x-1) - \sqrt{8+2x-x^2}$ v $(-2,4)$

9.141. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\lg\left|\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{8+2x-x^2}-x-8}{x}\right|$ v $(-2,0)\cup(0,4)$

9.142. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\lg\left|\dfrac{\sqrt{15}\sqrt{15-2x-x^2}+x-15}{x}\right| - \dfrac{\sqrt{15-2x-x^2}}{x}$

v $(-5,0)\cup(0,3)$

9.143. $2\,\mathrm{arctg}\left(x-1+\sqrt{x^2-2}\right)$, je-li $|x|>\sqrt{2}$

9.144. $2\lg\left|\sqrt{9-x^2}-1\right|$, je-li $2\sqrt{2}\neq|x|<3$

9.145. $\frac{1}{15}\left((3x^2-8)\sqrt{(x^2+4)^3}-(3x^2+8)\sqrt{(x^2-4)^3}\right)$, je-li $|x|>2$

9.146. $\dfrac{2}{3}\,\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ v $\mathbb{R}$

9.147. $\dfrac{1}{4}\left(\lg\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{|\sqrt{x^2-1}+x|} + x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$, je-li $|x|>1$

9.148. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\lg\dfrac{\sqrt{2-x}+(2+\sqrt{3})\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}+(2-\sqrt{3})\sqrt{2+x}}$ v $(-2,2)$.

Následují obecná řešení diferenciálních rovnic 9.149 – 9.170 ; c znamená libovolnou reálnou konstantu.

9.149. $c\exp(-\frac{1}{2}x^2) - 1$ v $\mathbb{R}$

9.150. $ce^x - (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$ v $\mathbb{R}$

9.151. $c\exp(\frac{1}{3}x^3) - 1$ v $\mathbb{R}$

9.152. $\frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$ v $\mathbb{R}$

9.153. $e^x(c - \cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.154. $ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.155. $x^3 - 1 + c\exp(-x^3)$ v $\mathbb{R}$

9.156. $e^x(2\sin x - \cos x) + ce^{-x}$ v $\mathbb{R}$

9.157. $1 + c\exp(\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.158. $\dfrac{c}{x} + \frac{1}{3}x^2$ v $\mathbb{R}_-$ a v $\mathbb{R}_+$

9.159. $1 + ce^{1/x}$ v $\mathbb{R}_-$ a v $\mathbb{R}_+$

9.160. $c\exp(\operatorname{cotg} x) + 1$ v $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

9.161. $\dfrac{c - x}{\lg x} + x$ v $(0, 1)$ a v $(1, +\infty)$

9.162. $\frac{1}{3}(x^2 + 1) + \dfrac{c}{\sqrt{x^2 + 1}}$ v $\mathbb{R}$

9.163. $(ce^x - 1)x^{-x}$ v $\mathbb{R}_+$

9.164. $1 + x\operatorname{tg} x + \dfrac{c}{\cos x}$ v $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

9.165. $\frac{1}{4}(x^3 - 1) + \dfrac{c}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ v $(-\infty, 1)$ a v $(1, +\infty)$

9.166. $\dfrac{c}{x + \sqrt{1 + x^2}} + 1 + 2x^2 - x\sqrt{1 + x^2}$ v $\mathbb{R}$

9.167. $1 + c\exp(-\arcsin x)$ v $(-1, 1)$

9.168. $x + \dfrac{c + \sqrt{1 - x^2}}{\arcsin x}$ v $(-1, 0)$ a v $(0, 1)$

9.169. $\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{c + x\sqrt{1 - x^2}}{\arcsin x} + 2x^2 - 1\Big)$ v $(-1, 0)$ a v $(0, 1)$

9.170. $x^2 + cx - 1 + (c + 2x)\sqrt{1 + x^2}$ v $\mathbb{R}$

Dodatek ke kapitole 9

Hledání funkce primitivní k funkci f je v literatuře nerozlučně spjato se symbolem $\int f(x)\,dx$, který se nazývá *neurčitý integrál* a v němž lze místo „integrační proměnné“ x napsat kterékoli jiné, nezadané písmeno. Rovnost

$$\text{(i)} \qquad \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x)+g(x))\,dx$$

má naznačit, že sečtením funkcí F, G primitivních k f, g získáme funkci primitivní k součtu $f+g$. Integrace per partes má při tomto značení tvar

$$\text{(ii)} \qquad \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx\,,$$

přičemž $F(x) := \int f(x)\,dx$, $G(x) := \int g(x)\,dx$. Substituce se provádí prostřednictvím vzorce

$$\text{(iii)} \qquad \int f(x)\,dx = \int f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,.$$

Pokud zůstaneme na takovéto úrovni „vyprávění“, neobjeví se žádný problém; hůře to ovšem dopadne, budeme-li chtít smysl symbolu $\int f(x)\,dx$ vysvětlit a dodržet při zacházení s ním běžná matematická pravidla. Máme v zásadě dvě možnosti: snažit se smysl uvedeného symbolu přesně definovat, nebo – zejména pokud se nám to nepovede – přestat tento symbol užívat. Autor se nesetkal s žádnou korektní definicí symbolu $\int f(x)\,dx$ a navíc jej považuje za zbytečný; důkaz, že primitivní funkce lze s úspěchem hledat bez tohoto symbolu, je podán v této kapitole. [18])

Ptejme se, co by mohl symbol $\int$ v identitách (i) – (iii) znamenat.

1) Nikdo se pravděpodobně symbolem $\int f(x)\,dx$ nesnaží přiřadit funkci f (řekněme raději v nějakém otevřeném intervalu I, jinak bude zmatek ještě větší) nějakou její *jednoznačně definovanou* primitivní funkci. Žádný návod použitelný v početní praxi, který by zaručil platnost všech rovností typu (i), totiž zřejmě neexistuje. Pokud autor (např. při řešení diferenciální rovnice) potřebuje jednoznačně definované primitivní funkce, nenapíše $\int f(x)\,dx$, ale např. $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, kde $x_0 \in I$, a zápis $\int_{x_0}^{x} f + \int_{x_0}^{x} g = \int_{x_0}^{x} (f+g)$ je samozřejmě zcela korektní. $\square$

V literatuře se kromě neurčitého prohlášení, že „$\int f(x)\,dx$ je funkce primitivní k $f(x)$“ (bez jakéhokoli dalšího vysvětlení nebo kvantifikátoru), setkáme s dvěma „definicemi“ tohoto symbolu.

---

[18]) Autorem korektního hledání primitivních funkcí je prof. Jan Mařík, který mnoho let pracoval na Karlově univerzitě; tento vynikající matematik, který mnoho energie věnoval metodice matematiky a jemuž dával často za pravdu i prof. Jarník, autor základních učebnic reálné analýzy, byl znám mj. jako tvrdý kritik všech nekorektností, nesrozumitelností a zbytečností.

2) Definuje-li se $\int f(x)\,dx$ jako *libovolná* funkce z $\mathrm{PF}(f;a,b)$, identita (i) *neplatí.* Je-li totiž na levé straně rovnosti (i) součet *libovolně, ale pevně vybraných* funkcí F, G (primitivních k f, g), *nemůže již být vpravo libovolně vybraná funkce*; musí tam být součet $F+G$. Situaci přitom *nelze zachránit* tím, že místo (i) napíšeme

$$\text{(i}'\text{)}\qquad \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x)+g(x))\,dx + c,$$

kde c je konstanta. Uznáme-li totiž např. správnost identit $\int 2x\,dx = x^2 + c_1$, $\int 4x^3\,dx = x^4 + c_2$, kde c_1, c_2 jsou *libovolné* konstanty, bude rovnost $\int 2x\,dx + \int 4x^3\,dx = \int (2x+4x^3)\,dx = x^2 + x^4 + c$ platit jen v případě, že $c = c_1 + c_2$, tedy s *vhodně zvolenou, nikoli libovolnou* konstantou. Nesrovnalosti se tedy jen přenesou z funkcí na konstanty.

3) Při pokusu definovat $\int f(x)\,dx$ jako *množinu* $\mathrm{PF}(f;a,b)$, je třeba vysvětlit, že „+“ v součtu $\mathrm{PF}(f;a,b) + \mathrm{PF}(g;a,b)$ na levé straně (i) *nemá* (*na rozdíl od součtu $f+g$ vpravo*) *význam obvyklého sčítání.* Smíříme-li se s tím a rozumíme-li znaménku + vlevo tak, že máme utvořit množinu všech součtů tvaru $F(x)+G(x)$, kde $F \in \mathrm{PF}(f;a,b)$, $G \in \mathrm{PF}(g;a,b)$, dostaneme tím skutečně množinu všech funkcí primitivních k $f+g$ v (a,b). Napišme však identitu (ii) ve tvaru

$$\text{(ii}''\text{)}\qquad \int F(x)g(x)\,dx + \int f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x),$$

který by měl být s (ii) ekvivalentní; pak máme vlevo množinu všech funkcí primitivních k $Fg + fG$, vpravo jednu konkrétní funkci. Měli bychom se tedy nejen smířit s tím, že „+“ má při hledání primitivních funkcí dva různé významy, ale zakázat i převádění výrazů z jedné strany rovnice na druhou? Nebo dovolíme, aby se nekonečná množina rovnala funkci? $\square$

Přestože ohromující procento uživatelů symbolu $\int$ je nakloněno tvrdit, že

$$\int f(x)\,dx - \int f(x)\,dx = 0,$$

což není pravda ani při definici z 2), ani z 3), nejvíce námitek lze mít proti identitě (iii). Ať již strany rovnosti (iii) znamenají funkci nebo množinu funkcí, rovnost nemůže nastat nikdy, protože vlevo se proměnná jmenuje x, vpravo t, a v naprosté většině případů mají primitivní funkce k f jiný definiční obor než funkce primitivní k $(f \circ \omega)\omega'$. Rovnost (iii) je tedy v příkrém rozporu se všeobecně přijatou definicí rovnosti funkcí. Kdybychom se snažili vadu odstranit, museli bychom sáhnout k poměrně složitému komentáři: Není-li ω ryze monotónní funkce, je po integraci vlevo třeba za x dosadit $\omega(t)$; v tomto případě lze ovšem (iii) užít jen „zprava doleva“, tj. místo funkce primitivní k funkci tvaru $(f \circ \omega)\,\omega'$ hledat funkci primitivní k f. Je-li funkce ω ryze monotónní, lze (iii) aplikovat jak „zprava doleva“, tak i „zleva doprava“; ve druhém případě je třeba po integraci vpravo za t dosadit $\omega_{-1}(x)$.

V obou případech lze ovšem substituci provést jen za dalších předpokladů, které jsme vysvětlili v textu o 1SM a 2SM. Naučí-li se někdo jen heslu, že „za dx se dosadí

$\omega'(t)\,dt$“, dojde asi brzy k nesmyslným výsledkům – autor se mnohokrát setkal např. se substitucí $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} t$ v intervalu $(0, 2\pi)$. $\square$

Uživatelé symbolu $\int$, včetně autorů různých tabulek „neurčitých integrálů“, píší i další nepřijatelné vzorce – např.

$$\text{(iv)} \qquad \int \frac{dx}{x} = \lg x + c \quad \text{resp.} \quad \int \frac{dx}{x} = \lg |x| + c\,.$$

První z nich, který užívají všechny autorovi známé počítačové programy, ignoruje, že funkce $1/x$ má primitivní funkci i v $\mathbb{R}_-$, kde výraz $\lg x$ nemá smysl; to pak vede k neúplným výsledkům např. při hledání funkce primitivní k f'/f, kde f je někde kladná, někde záporná.

Znamená-li levá strana druhé z identit (iv) např. nějakou funkci F splňující v $\mathbb{R} - \{0\}$ rovnost $F'(x) = 1/x$, liší se $F(x)$ od $\lg |x|$ v $\mathbb{R}_+$ obecně o jinou konstantu než v $\mathbb{R}_-$ a je velmi problematické obě tyto konstanty značit c. V případě „ještě nespojitějších“ funkcí je situace pochopitelně ještě horší; napíšeme-li např. rovnost

$$\text{(iv}'\text{)} \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \lg \left| \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x \right| + c\,,$$

znamená c v každém intervalu $((k-1)\pi, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, obecně jinou konstantu. $\square$

Shrneme-li, vidíme, že obě uvedené, v literatuře převažující definice symbolu $\int f(x)\,dx$ vedou ke značným nekorektnostem, k nutnosti každou z napsaných identit buď komentovat, nebo tolerovat, že doslova vzato neplatí. Zavedení symbolu $\int$ navíc zakrývá, že nejčastěji užívané identity (i) – (iii) nejsou ničím novým, protože se jedná jen o parafráze dobře známých vět o diferencování součtu, součinu a superpozice.

Symbol $\int$, který je nejen zdrojem všech nepříjemností a nejasností, ale svádí i k formálnímu přístupu na úkor porozumění, je tedy zřejmě zbytečný a podle Occamovy břitvy měl být dávno z matematiky odstraněn. Způsob hledání primitivních funkcí, vyložený v této kapitole, je naopak zcela exaktní a nevyžaduje žádné licence, konvence a komentáře.

Symbol $\int$ ilustruje jednu z charakteristických vlastností kalkulu: Nevadí, že nevíme, co symbol znamená, a že např. znaky „+“ a „=“ užíváme jinak, než je obvyklé. Držme se třísetleté tradice a hlavně počítejme; výsledek snad bude možné šikovnou slovní ekvilibristikou, měnící se případ od případu, nějak vysvětlit.