10. Newtonův integrál

Definice. Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ a nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body a, b. Říkáme, že F je **zobecněnou primitivní funkcí funkce f v intervalu** I, je-li funkce F *spojitá* v I a platí-li rovnost $F' = f$ všude v $I - K$, kde $K \subset I$ je nějaká konečná množina. Slova „zobecněná primitivní funkce“ budeme často zkracovat na „z. p. f.“, množinu všech z. p. f. funkce f v intervalu I budeme značit $\mathrm{ZPF}(f;\, I)$.

Poznámka 10.1. Všimněme si, že funkce f může mít v intervalu I z. p. f., *aniž je všude v I definována*; stačí, aby byla definována *všude v I až na jistou konečnou množinu*. Všimněme si dále, že na rozdíl od primitivní funkce mluvíme o z. p. f. v libovolných (nejen tedy v otevřených) intervalech. [1]) $\square$

Je zřejmé, že

$$F \in \mathrm{ZPF}(f;\, I),\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow F + c \in \mathrm{ZPF}(f;\, I). \tag{1}$$

Důležité však je, že platí i obrácené tvrzení:

Věta 10.1. *Je-li $F \in \mathrm{ZPF}(f;\, I)$ a $G \in \mathrm{ZPF}(f;\, I)$, existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G = F + c$.*

V důsledku toho platí:

(2) *Má-li f v (a, b) primitivní funkci, je* $\mathrm{ZPF}(f;\, (a, b)) = \mathrm{PF}(f; a, b)$.

Věta 10.2. (Základní existenční věta.) *Je-li funkce f spojitá a omezená v omezeném intervalu (a, b), je $\mathrm{ZPF}(f;\, \langle a, b\rangle) \ne \emptyset$ a každá z.p.f. funkce f v $\langle a, b\rangle$ je primitivní funkcí funkce f v (a, b).*

Příklad 10.1. A. Protože funkce $|x|$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a protože rovnost $|x|' = \operatorname{sgn} x$ platí pro všechna $x \ne 0$, je $|x|$ z. p. f. funkce $\operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$.

B. Protože je $\lg|x| = x(\lg|x| - 1)'$ pro všechna $x \ne 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} x(\lg|x| - 1) = 0$, je funkce

$$F(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x(\lg|x| - 1) & \text{pro } x \ne 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{array} \right\} \tag{3}$$

z. p. f. funkce $\lg|x|$ v $\mathbb{R}$.

C. Funkce $f(x) := \operatorname{sgn}(\cos x)$ nemá žádnou z. p. f. v $\mathbb{R}$ (obecněji: v žádném neomezeném intervalu), funkce $F(x) := \arcsin(\sin x)$ je však její z. p. f. v každém omezeném intervalu. [2])

---

[1]) V obou případech je právě takto zavedená terminologie výhodná všude tam, kde s pojmem primitivní resp. zobecněné primitivní funkce pracujeme.

[2]) To je samozřejmě důsledek definice, v níž se připouští pouze konečný počet výjimečných bodů, v nichž rovnost $F' = f$ neplatí. Definici z. p. f. by však bylo možné zobecnit tak, aby funkce F z příkladu 10.1C byla (podle obecnější definice) z. p. f. funkce f v celém $\mathbb{R}$. Dáváme však přednost vyslovené definici, protože je jednoduchá a protože s ní v dalším vystačíme.

Označení. Je-li $-\infty \le a < b \le +\infty$, je-li F spojitá v (a,b) a existují-li *konečné* limity $F(a+)$, $F(b-)$, budeme číslo

$$[F]_a^b \quad (\equiv [F(x)]_a^b) := F(b-) - F(a+) \tag{4}$$

nazývat **zobecněný přírůstek funkce** F **na intervalu** (a,b). Existují-li konečné limity $F(a+)$, $F(b-)$, budeme říkat, že zobecněný přírůstek **má smysl**; v opačném případě (tj. když některá z limit $F(a+)$, $F(b-)$ buď neexistuje, nebo není konečná) řekneme, že zobecněný přírůstek **nemá smysl**. □

Všimněme si, že limitu $F(a+)$ resp. $F(b-)$ lze nahradit hodnotou $F(a)$ resp. $F(b)$, právě když je F spojitá v bodě a zprava resp. v bodě b zleva. *Je-li F spojitá v $\langle a,b\rangle$, je zobecněný přírůstek $[F]_a^b$ totožný s přírůstkem $F(b)-F(a)$ funkce F na intervalu $\langle a,b\rangle$.* □

Předpokládejme, že

1) $-\infty \le a < b \le +\infty$ a že I je interval s krajními body a, b;

2) $\mathrm{ZPF}(f;\,(a,b)) \neq \emptyset$, $F \in \mathrm{ZPF}(f;\,(a,b))$;

3) zobecněný přírůstek $[F]_a^b$ má smysl.

Protože každá z.p.f. k f v (a,b) se (podle V.10.1) od F liší jen aditivní konstantou, *nezávisí zobecněný přírůstek na bližší volbě funkce* $F \in \mathrm{ZPF}(f;\,(a,b))$, a (za právě vyslovených předpokladů) má proto dobrý smysl tato definice:

Newtonův integrál funkce f **přes interval** I **s krajními body** $a < b$ definujeme rovností

$$\int_a^b f := [F]_a^b\,, \text{ kde } F \in \mathrm{ZPF}(f;\,(a,b)), \tag{5}$$

má-li její pravá strana smysl. Symbolu vlevo se též říká (Newtonův) integrál funkce f **od** a **do** b, číslo a resp. b je tzv. **dolní** resp. **horní mez** integrálu (5). Funkce f se nazývá **integrand** nebo **integrovaná funkce**, interval I je **integrační obor**.

Z praktických (i historických) důvodů se místo $\int_a^b f$ často píše např. $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(t)\,dt$, ..., přičemž x, t, ... se pak nazývá **integrační proměnná**.

P ř í k l a d :

$$\int_1^2 x^t\,dx \quad \text{resp.} \quad \int_1^2 x^t\,dt$$

znamená integrál *obecné mocniny* Id^t resp. *obecné exponenciály* $\exp_x$.

Symboly dx, dt, ... (které čteme „dé iks“, „dé té“, ... a které se do integrálu dostaly v souvislosti s historickými představami o tom, že integrál je jakýsi součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin) v současnosti jen vyznačují, „podle které proměnné se integruje“; to je samozřejmě nutné vědět, integruje-li se funkce více než jedné proměnné.

Úmluva. Protože se v dalším budeme zabývat jen Newtonovým integrálem, budeme mluvit krátce o *integrálu*. □

Poznámka 10.2. Danou funkci f lze integrovat v daných mezích a, b podle celé řady více nebo méně obecných definic integrálu, z nichž každá má své výhody i nevýhody. Newtonův integrál se počítá (na rozdíl např. od dobře známého Riemannova integrálu nebo od daleko obecnějšího integrálu Lebesgueova) v zásadě podle definice, a to *jak pro omezené, tak i pro neomezené intervaly a integrandy.* Omezenost resp. neomezenost intervalu (a, b) resp. integrandu f může ovšem mít vliv na *existenci* integrálu. Do výkladu elementární analýzy se však tento integrál hodí i proto, že není nutný (pro studenty zpravidla velmi nudný) výklad tzv. *zobecněného* resp. *nevlastního integrálu*, bez něhož nelze v Riemannově teorii mluvit ani o integrálu přes neomezený interval, ani o integrálu z neomezené funkce.

Všem, kteří se ve své práci bez integrálů neobejdou, autor vřele doporučuje seznámit se s Newtonovým a Lebesgueovým integrálem. Lebesgueův integrál má (nejen v $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$, ale i v eukleidovských prostorech $\mathbb{R}^n$ libovolné dimenze $n \in \mathbb{N}$) vynikající vlastnosti; jeho výpočet se přitom v mnohých případech převádí na výpočet integrálu Newtonova.

Poznámka 10.3. Je jistě zřejmé, že *z existence integrálu $\int_a^b f$ plyne existence integrálu $\int_c^d f$ pro každý interval $(c, d) \subset (a, b)$.*

Věta 10.3. (Základní věta o existenci integrálu.) *Je-li funkce f spojitá a omezená v omezeném intervalu (a, b), integrál $\int_a^b f$ existuje.*

Příklad 10.2. A. Z rovnosti $\sin x = (-\cos x)'$ v $\mathbb{R}$ plyne, že např.

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2, \qquad \int_\pi^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -2;$$

protože funkce $\cos x$ nemá ani v $-\infty$, ani v $+\infty$ limitu, nemá funkce $\sin x$ integrál přes žádný neomezený interval.

B. Při označení z části B příkladu 10.1 je

$$\int_{-e}^{1} \lg|x| \, dx = \big[F(x)\big]_{-e}^{1} = 1 \cdot (0-1) - (-e) \cdot (1-1) = -1;$$

vůbec nevadí, že integrand není v bodě 0 definován a že není omezený.

C. Z identity $x e^{-x} = \big(-(x+1)e^{-x}\big)'$ platné pro všechna $x \in \mathbb{R}$ plyne, že

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \, dx = \big[-(x+1)e^{-x}\big]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1;$$

jak je patrné, nekonečná horní mez výpočet integrálu vůbec nekomplikuje.

D. Protože $\cos x/(1+\sin x) = \big(\lg(1+\sin x)\big)'$ pro všechna $x \not\equiv -\frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$, je např.

$$\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos x}{1+\sin x} \, dx = \lg\big(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\big) - \lg\big(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\big) = 2\lg\big(1+\sqrt{2}\big) \doteq 1.763.$$

Na rozdíl od toho

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx \quad \textit{neexistuje},$$

protože integrand nemá v $(0, 2\pi)$ žádnou z. p. f. Kdyby totiž taková funkce G existovala, lišila by se v intervalu $(0, \frac{3}{2}\pi)$ od funkce $F(x) := \lg(1+\sin x)$ jen aditivní konstantou a z rovnosti $\lim_{x\to 3\pi/2} F(x) = -\infty$ by plynula rovnost $\lim_{x\to 3\pi/2-} G(x) = -\infty$; to však by bylo ve sporu se spojitostí funkce G v $(0, 2\pi)$.

Tento příklad měl čtenáře varovat: Nestačí mechanicky počítat a pak zjistit, že nalezená funkce $F(x)$ má v krajních bodech příslušného intervalu (a, b) konečné limity; je nutné zkontrolovat, zdali je $F(x)$ v (a, b) spojitá. V případě, že tomu tak není, je třeba existenci z. p. f. v (a, b) i příslušného integrálu pečlivě zvážit.

E. Je jistě zřejmé, že

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \pi;$$

tentokrát jsme (bez potíží) integrovali funkci, která není v bodech ± 1 definována a v intervalu $(-1, 1)$ není omezená.

F. Protože v $\mathbb{R}_+$ platí identity

$$\frac{1}{x} = (\lg x)', \quad \frac{1}{x^\alpha} = \Big(\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big)' \text{ pro všechna } \alpha \neq 1, \tag{6}$$

je

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \quad \textit{pro všechna } \alpha < 1, \tag{7}$$

zatímco *pro žádné* $\alpha \geq 1$ *tento integrál neexistuje*, a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \quad \textit{pro všechna } \alpha > 1, \tag{8}$$

zatímco *pro žádné* $\alpha \leq 1$ *tento integrál neexistuje*. Integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \textit{neexistuje pro žádné } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

G. Podle V. 10. 3 integrály

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,dx$$

existují, což bohužel neznamená, že je dovedeme vypočítat. Problém je v nalezení primitivní funkce k integrandu. □

Obsahem následujících pěti vět jsou základní vlastnosti Newtonova integrálu; jejich znalost je nutná jak při počítání, tak při zjišťování existence integrálu.

Věta 10.4. (Linearita integrálu vzhledem k integrandu.) *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li $f_1, \dots, f_n$ funkce, $c_1, \dots, c_n$ (konečné reálné) konstanty, je*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k \,, \tag{10}$$

existují-li integrály vpravo.

Věta 10.5. (Monotonie integrálu.) *Je-li $f \le g$, je*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g \,, \tag{11}$$

existují-li oba integrály.

Věta 10.6. (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru.) *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a je-li*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \tag{12}$$

libovolné dělení intervalu (a, b), je

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \,, \tag{13}$$

má-li jedna strana této rovnosti smysl.

Věta 10.7. (Integrace per partes.) *Je-li $F \in \mathrm{ZPF}(f;\, (a, b))$, $G \in \mathrm{ZPF}(g;\, (a, b))$, je*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b \; - \int_a^b fG \,, \tag{14}$$

mají-li (aspoň) dva ze tří napsaných výrazů smysl.

Věta 10.8. (Věta o substituci.) *Předpokládejme, že spojitá ryze monotónní funkce $\omega : (\alpha, \beta) \to_{\mathrm{na}} (a, b)$ má konečnou nenulovou derivaci všude v $(\alpha, \beta) - K$, kde $K \subset (\alpha, \beta)$ je konečná množina. Pak je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\omega(t))\,|\omega'(t)|\,dt \,, \tag{15}$$

existuje-li jeden z napsaných integrálů.

Poznámka 10.4. Je-li ω rostoucí, je $\omega' > 0$ všude v $(\alpha, \beta) - K$, $a = \omega(\alpha+)$, $b = \omega(\beta-)$, $\alpha = \omega_{-1}(a+)$, $\beta = \omega_{-1}(b-)$ a pravou stranu (15) lze psát bez absolutní hodnoty:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt \,. \tag{15_{r}}$$

Je-li ω klesající, je $\omega' < 0$ v $(\alpha, \beta) - K$, $a = \omega(\beta-)$, $b = \omega(\alpha+)$, $\alpha = \omega_{-1}(b-)$, $\beta = \omega_{-1}(a+)$ a (15) je ekvivalentní s rovností

$$(15_{\mathrm{k}}) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,.$$

Poznamenejme při příležitosti, že je výhodné **zobecnit pojem integrálu** takto:

1) Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ a pro každou funkci f položíme $\int_a^a f = 0$.

2) Je-li $+\infty \geq a > b \geq -\infty$, klademe $\int_a^b f = -\int_b^a f$, existuje-li integrál vpravo podle dosavadní definice.

Po tomto zobecnění lze (15) napsat v těchto dvou ekvivalentních tvarech:

$$(15^*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\omega_{-1}(a+)}^{\omega_{-1}(b-)} f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,,$$

$$(15^{**}) \qquad \int_{\omega(\alpha+)}^{\omega(\beta-)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,.$$

Obě rovnosti platí jak pro rostoucí, tak i pro klesající funkce ω – samozřejmě za předpokladů věty 10.8 o funkci ω a za předpokladu, že jedna strana příslušné rovnosti má smysl.

Poznámka 10.5. Jak věta o integraci per partes, tak i věta o substituci dovolují začít počítat integrál bez předběžného ověření, že existuje; to je z početního hlediska velmi výhodné, a tedy i důležité.

Má-li daný integrál tvar levé strany (14), můžeme integrovat per partes (třeba i několikrát za sebou) a teprve pak ověřit, že výsledek má smysl. (Sr. s Př. 10.3.)

Rovnost (15) lze (za příslušných předpokladů o substituující funkci ω) aplikovat „zleva doprava“ i „zprava doleva“. Postup v prvním případě, kdy výchozím integrálem je levá strana (15), připomíná 2SM; ve druhém případě, kdy počítáme integrál, který má tvar pravé strany (15), se postup podobá 1SM. Předpoklady o ω ve větě 10.8 nejsou ovšem stejné jako v 1SM a 2SM. Důležité však je, že nemusíme zjišťovat existenci výchozího integrálu; stačí, aby existoval integrál vzniklý substitucí. (Sr. s Př. 10.4.)

Příklad 10.3. Označme

$$(16) \qquad I_n := \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx \ \text{ pro každé celé číslo } n \geq 0\,.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme integrací per partes ($F(x) = x^n$, $f(x) = nx^{n-1}$, $g(x) = e^{-x}$, $G(x) = -e^{-x}$) rovnosti

$$I_n := \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx = nI_{n-1}\,,$$

existuje-li integrál I_{n-1}. Protože však $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \big[-e^{-x}\big]_0^{+\infty} = 1$ existuje, platí totéž o $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$; formální důkaz indukcí jistě není třeba provádět. Z rekurentního vzorce $I_n = nI_{n-1}$ pak ihned plyne, že

$$(16^*) \qquad I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n! \ \textit{ pro každé celé číslo } \ n \geq 0\,.$$

Příklad 10.4. Protože funkce $\omega(t) := e^t$ zobrazuje interval $(1, +\infty)$ na interval $(e, +\infty)$ a splňuje všechny předpoklady V.10.8, je

$$(17) \qquad \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \lg^\alpha x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\,t^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}\,, \ \text{je-li } \alpha > 1\,;$$

pro žádné $\alpha \leq 1$ integrál neexistuje (sr. s Př.10.2, část F). $\square$

Ke zjednodušení výpočtu integrálu se často dají využít specifické vlastnosti integrandu:

Věta 10.9. *Pro každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí tato dvě tvrzení:* 1. *Má-li f periodu $p \in \mathbb{R}_+$ a je-li $-\infty < a < b < +\infty$, platí pro každé $k \in \mathbb{Z}$ rovnost*

$$\int_a^b f = \int_{a+kp}^{b+kp} f\,, \quad \textit{existuje-li jeden z integrálů.}$$

2. *Je-li funkce f sudá (resp. lichá) a je-li $a \in \mathbb{R}_+$, je*

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f \ \ \Big(\textit{resp.} \int_{-a}^a f = 0\Big)\,, \ \textit{existuje-li integrál} \ \int_0^a f.$$

Příklad 10.5. V integrálu

$$(18) \qquad I := \int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x}\,dx$$

(ze spojité funkce na kompaktním intervalu) nelze přímo substituovat $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = t$, protože integrační obor je příliš dlouhý. Vzhledem k 2π-periodicitě integrandu je však $I = 5\int_{-\pi}^{\pi} f$; užijeme-li 2SM s $\omega = 2\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to_{\text{na}} (-\pi, \pi)$, dostaneme:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2+\sin x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(t^2+t+1)\,(t^2+1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+t+1}\Big)\,dt$$

$$= \left[2\operatorname{arctg} t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = 2\pi\Big(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) \doteq -0.972\,.$$

Je tedy $I = 10\pi\,(1 - 2/\sqrt{3}) \doteq -4.86$.

Poznámka 10.6. V knihách pojednávajících o elementech integrálního počtu se často *určitým integrálem* rozumí Riemannův integrál, *neurčitým integrálem* primitivní funkce. To není v souladu s terminologií teorie integrálu[3]), podle níž může být integrál podle jakékoli definice jak určitý, tak i neurčitý. Zhruba řečeno: *Určitý integrál* je integrál, jehož meze jsou (pevně zvolená) čísla, kdežto *neurčitý integrál* získáme tím, že např. horní mez ponecháme proměnnou.

P ř í k l a d : *Číslo* $\int_{-1}^{1} \lg|x|\,dx$ $(= -2)$ je určitý *Newtonův* integrál, *funkce* $\int_0^x \lg|x|\,dx$, kde $x \in \mathbb{R}$, je *Newtonův* neurčitý integrál. Podle Př. 10.1B oba integrály (jako Newtonovy) existují; příslušné Riemannovy integrály však *neexistují*, protože integrand není omezený v žádném $P(0)$ (a není tedy splněna základní podmínka existence Riemannova integrálu). Druhý z napsaných integrálů je *zobecněnou primitivní funkcí* funkce $\lg|x|$ v $\mathbb{R}$; *není to však její funkce primitivní.* □

Poslední tři věty této kapitoly se zabývají existencí Newtonova integrálu.

Věta 10.10. (Srovnávací kritérium – 1. verze.) *Nechť* $-\infty < a < b \le +\infty$, *nechť funkce* f *je spojitá v intervalu* $\langle a, b)$, *nechť spolu s funkcí* $g : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ *splňuje nerovnost* $|f| \le g$ *všude v* (a, b) *a nechť existuje integrál* $\int_a^b g$. *Pak existují i integrály*

$$\int_a^b f\,, \quad \int_a^b |f|\,. \tag{19}$$

Analogické tvrzení platí pro intervaly tvaru $(a, b\rangle$, *kde* $-\infty \le a < b < +\infty$.

Poznámka 10.7. *V obecném případě neexistuje žádný logický vztah mezi existencí integrálů* (19); ilustrují to tyto čtyři příklady:

A. Oba integrály (19) existují, je-li $-\infty < a < b < +\infty$ a je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$. (Sr. s V. 10.3.)

B. Je-li f *Dirichletova funkce*, tj. je-li $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$ a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, žádný z integrálů (19) neexistuje v žádných mezích $a \ne b$.[4])

C. Je-li $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = -1$ pro všechna $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ a je-li $-\infty < a < b < +\infty$, první integrál neexistuje, druhý existuje, protože $|f(x)| \equiv 1$.

D. Jak ukážeme v Př. 10.9,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \textit{existuje}, \qquad \int_0^{+\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \quad \textit{neexistuje}.$$

Definice. Nechť existuje první z integrálů (19). Pak podle toho, zdali druhý z integrálů (19) existuje, nebo neexistuje, říkáme, že první integrál konverguje **absolutně** resp. **neabsolutně**. □

---

[3]) *Teorie integrálu* je rozsáhlá disciplína, v níž se studují různé definice integrálu. *Integrální počet* je zaměřen spíše na početní techniku vybraného druhu integrálu.

[4]) Důkaz bychom založili na známé větě, podle níž má derivace spojité funkce tzv. Darbouxovu vlastnost; protože Dirichletova funkce tuto vlastnost nemá, nemá primitivní funkci v žádném intervalu, a tedy nemá ani zobecněnou primitivní funkci. Totéž platí o funkci f z části C.

Jak je patrné, *srovnávací kritérium je kritériem absolutní konvergence; neabsolutní konvergenci podle něj zjišťovat nelze.* □

Praktické aplikace srovnávacího kritéria lze značně usnadnit zavedením dvou nových symbolů:

Definice a označení. Je-li $c \in \mathbb{R}^*$ a jsou-li f, g dvě funkce, píšeme

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro} \quad x \to c \tag{20}$$

(a čteme: „$f(x)$ je velké O $g(x)$ pro $x \to c$“), existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $|f(x)| \le K|g(x)|$ platí všude v jistém $P(c)$.

Relace

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro} \quad x \to c-\,, \quad f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro} \quad x \to c+ \tag{20*}$$

se definují analogicky; v první z nich nahradíme $P(c)$ okolím $P^-(c)$, ve druhé okolím $P^+(c)$ (za předpokladu, že $-\infty < c \le +\infty$ resp. $-\infty \le c < +\infty$).

Říkáme, že $f(x)$ a $g(x)$ jsou **stejného řádu pro** $x \to c$ a píšeme

$$f(x) \asymp g(x) \quad \text{pro} \quad x \to c\,, \tag{21}$$

je-li $f(x) = O(g(x))$ a zároveň $g(x) = O(f(x))$ pro $x \to c$. Analogicky jsou definovány relace „$f(x) \asymp g(x) \quad \text{pro} \quad x \to c-$“ a „$f(x) \asymp g(x) \quad \text{pro} \quad x \to c+$“.

Poznámka 10.8. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(x) = O(g(x)) \quad \textit{pro} \quad x \to c \tag{22}$$

a

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} - \{0\} \;\Rightarrow\; f(x) \asymp g(x) \quad \textit{pro} \quad x \to c; \tag{23}$$

analogické implikace platí samozřejmě i „zleva“ a „zprava“.

Příklad 10.6. Pro $x \to 0$ platí např. tyto relace:

$$\sin x \asymp x\,, \quad \arcsin x \asymp x\,, \quad \operatorname{tg} x \asymp x\,, \quad \operatorname{arctg} x \asymp x\,, \tag{24}$$

$$\sinh x \asymp x\,, \quad \operatorname{argsinh} x \asymp x\,, \quad \lg(1 \pm x) \asymp x\,, \quad \exp x - 1 \asymp x\,, \tag{25}$$

$$\cos x - 1 \asymp x^2\,, \quad \cosh x - 1 \asymp x^2\,, \quad \sin x - x \asymp x^3\,. \tag{26}$$

Pro $x \to 0+$ je

$$|\lg x|^\alpha = O(x^{-\beta}) \text{ pro všechna } \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}_+\,, \tag{27}$$

pro $x \to +\infty$ je

$$\lg^\alpha x = O(x^\beta)\,, \quad x^\alpha = O(e^{\beta x}) \text{ pro všechna } \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}_+\,, \tag{28}$$

$$\operatorname{arccotg} x \asymp \frac{1}{x}\,, \tag{29}$$

a pro $x \to 1$ platí např. relace

$$\arccos x \asymp \sqrt{1-x} \asymp \sqrt{1-x^2}\,. \tag{30}$$

Všechny tyto vztahy lze snadno dokázat pomocí Taylorových polynomů a l'Hospitalova pravidla; *jejich znalost je nutná, chceme-li efektivně aplikovat tuto verzi srovnávacího kritéria*:

Věta 10.11. (Srovnávací kritérium – 2. verze.) *Jsou-li funkce f, g spojité a nezáporné v intervalu $\langle a, b)$, kde $-\infty < a < b \le +\infty$, platí tato dvě tvrzení:*

1. *Je-li $f(x) = O(g(x))$ pro $x \to b-$, pak*

$$\text{z existence integrálu } \int_a^b g \ \text{ plyne existence integrálu } \int_a^b f\,. \tag{31}$$

2. *Je-li $f(x) \asymp g(x)$ pro $x \to b-$, pak*

$$\text{existence integrálu } \int_a^b f \ \text{ je ekvivalentní s existencí integrálu } \int_a^b g\,. \tag{32}$$

Analogická tvrzení platí pro intervaly tvaru $(a, b\rangle$, kde $-\infty \le a < b < +\infty$. □

Tvrzení 2 věty 10.11 se často nazývá **symetrická verze srovnávacího kritéria.**

Příklad 10.7. Pro každou trojici čísel α, β, γ (z $\mathbb{R}$) je funkce

$$f(x) := \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x \operatorname{arccotg}^\beta x}{x^\gamma} \tag{33}$$

spojitá a kladná v $\mathbb{R}_+$; ke zjištění, pro která α, β, γ existuje $\int_0^{+\infty} f$, užijeme kromě V. 10.11 i výsledky z Př. 10.2 a z Př. 10.6.

Protože pro $x \to 0+$ je $\operatorname{arctg} x \asymp x$ a $\operatorname{arccotg} x \asymp 1$, je také $\operatorname{arctg}^\alpha x \asymp x^\alpha$ a $\operatorname{arccotg}^\beta x \asymp 1$ (pro každou dvojici čísel α a β). Z toho plyne, že $f(x) \asymp 1/x^{\gamma-\alpha}$, takže

$$\int_0^1 f\,dx \ \text{ existuje, právě když je } \ \gamma - \alpha > -1\,. \tag{34'}$$

Pro $x \to +\infty$ je $\operatorname{arctg}^\alpha x \asymp 1$ pro každé α a $\operatorname{arccotg}^\beta x \asymp 1/x^\beta$ pro každé β; z toho plyne, že $f(x) \asymp 1/x^{\beta+\gamma}$, takže

$$\int_1^{+\infty} f\,dx \ \text{ existuje, právě když je } \ \beta + \gamma > 1\,. \tag{34''}$$

Z (34′) a (34″) vyplývá, že

$$\int_0^{+\infty} f\,dx \ \text{ existuje, právě když je } \ \gamma > \max(\alpha - 1, 1 - \beta)\,. \tag{34}$$

Příklad 10.8. Pro každou dvojici čísel α, β (z $\mathbb{R}$) je funkce

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha \lg^\beta x} \tag{35}$$

spojitá a kladná v intervalu $(1, +\infty)$; vyšetříme, kdy existuje integrál $\int_2^{+\infty} f$.

Pro $\alpha = 1$ jsme velmi podobný problém (s jiným označením parametrů) vyřešili již v Př. 10.4: $\int_e^{+\infty} f$ existuje, právě když je $\beta > 1$. Protože existence integrálu $\int_2^e f$ plyne ze spojitosti funkce f v intervalu $\langle 2, e\rangle$, je i existence integrálu $\int_2^{+\infty} f$ (pro $\alpha = 1$) ekvivalentní s nerovností $\beta > 1$.

Je-li $\alpha > 1$, je číslo $\gamma := \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ kladné, a v důsledku toho je $x^\gamma \lg^\beta x \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ a pro každé $\beta \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\gamma} \cdot x^\gamma \lg^\beta x} = O\Big(\frac{1}{x^{1+\gamma}}\Big) \quad \text{pro} \quad x \to +\infty,$$

a protože $1 + \gamma > 1$, integrál $\int_2^{+\infty} f$ existuje podle 1. části věty 10.11.

Je-li $\alpha < 1$, je číslo $\delta := \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ kladné, takže $x^{-\delta} \lg^\beta x \to 0$ pro $x \to +\infty$ a pro každé $\beta \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že $h(x) := 1/(x^{-\delta} \lg^\beta x) \to +\infty$, a existuje tedy $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $h(x) \geq K$ platí pro všechna $x \in \langle 2, +\infty)$. [5] V tomto intervalu pak platí i relace

$$f(x) = \frac{1}{x^{1-\delta} \cdot x^{-\delta} \lg^\beta x} \geq \frac{K}{x^{1-\delta}}\,;$$

protože je $1 - \delta < 1$, integrál $\int_2^{+\infty} (K/x^{1-\delta})\, dx$ neexistuje; podle V. 10.10 platí totéž i o integrálu $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$.

Tím je dokázáno, že

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \lg^\beta x} \ \ \textit{existuje} \ \Leftrightarrow \ (\alpha > 1) \vee ((\alpha = 1) \wedge (\beta > 1)). \tag{36}$$

Poznámka 10.9. Vyšetření existence integrálu v právě dořešeném příkladě dalo dost práce; příčinou je skutečnost, že funkce $\lg^\beta x$ a x^α nejsou téhož řádu pro žádnou dvojici čísel α, β. (Relace $\lg^\beta x \asymp x^\alpha$ pro $x \to +\infty$ nemůže platit, protože pro každé $\beta \in \mathbb{R}$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$ je $\lg^\beta x = o(x^\alpha)$ pro $x \to +\infty$. [6]) V souvislosti s tím říkáme, že *každá kladná mocnina x roste do nekonečna rychleji než kterákoli mocnina* $\lg x$. Této okolnosti bylo nutné obratně využít – pro $\alpha > 1$ k důkazu existence, pro $\alpha < 1$ k důkazu neexistence integrálu. Podobně bychom postupovali, kdyby se

---

[5]) Podrobněji: Z podmínky $h(x) \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ plyne existence čísla $c \in (2, +\infty)$, pro něž $x > c \Rightarrow h(x) > 1$. Protože h je na intervalu $\langle 2, c\rangle$ spojitá a kladná, má tam i kladné minimum; označíme-li je d, stačí položit $K = \min(d, 1)$.

[6]) Připomeňme, že to znamená, že podíl levé a pravé strany této „rovnosti" má pro $x \to +\infty$ nulovou limitu. (Sr. s (25) v kapitole 6.)

v integrálu vyskytl např. součin $x^\alpha \exp(\beta x)$, protože ani tentokrát nemají faktory stejný řád pro $x \to +\infty$. Čtenáři doporučujeme, aby si postupy užité v Př. 10.8 dobře promyslil. $\square$

Dvě kritéria existence integrálu, která obsahuje následující věta, lze užít (na rozdíl od V. 10.10 a V. 10.11) i k vyšetření *neabsolutní konvergence*.

Věta 10.12. (Abelovo a Dirichletovo kritérium.) *Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$ a nechť funkce $f : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, funkce $g : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ spojitá a monotónní.*

Pak integrál

$$\int_a^b fg \tag{37}$$

existuje, platí-li jedna z těchto podmínek:

$$\int_a^b f \text{ existuje a funkce } g \text{ je omezená v } (a, b) \tag{38}$$

(Abelovo kritérium),

$$\text{funkce } f \text{ má omezenou primitivní funkci v } (a, b) \text{ a } \lim_{x\to b} g(x) = 0 \tag{39}$$

(Dirichletovo kritérium).

Dále platí: Jsou-li funkce h_1, h_2 spojité a kladné v $\langle a, b)$, je-li jejich podíl h_1/h_2 monotónní v $\langle a, b)$ a je-li $h_1(x) \asymp h_2(x)$ pro $x \to b-$, je existence integrálu $\int_a^b fh_1$ ekvivalentní s existencí integrálu $\int_a^b fh_2$ (symetrické Abelovo kritérium).

Analogická tvrzení platí pro intervaly $(a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, kde $-\infty \le a < b < +\infty$.

Příklad 10.9. Vyšetřme absolutní resp. neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx\,, \tag{40}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Integrand $f(x) := \sin x / x^\alpha$ je spojitý v $\mathbb{R}_+$ a splňuje podmínky

$$f(x) \asymp \frac{1}{x^{\alpha-1}} \text{ pro } x \to 0+, \quad f(x) = O\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big) \text{ pro } x \to +\infty. \tag{41}$$

V intervalu $(0, \pi)$ je $f(x) > 0$, a podle V. 10.11 $\int_0^\pi f$ tedy existuje, právě když je $\alpha < 2$; konvergence je pak samozřejmě absolutní. Podle druhé z relací (41), podle V. 10.10 a podle F z Př. 10.2 konverguje integrál $\int_\pi^{+\infty} f$ absolutně, je-li $\alpha > 1$. Zatím jsme tedy dokázali, že

$$\textit{pro } \alpha \in (1, 2) \textit{ konverguje integrál } (40) \textit{ absolutně.} \tag{42_1}$$

Dirichletovo kritérium nám poskytne další informaci: Protože funkce $-\cos x$ (která je funkcí primitivní k funkci $\sin x$) je v $\mathbb{R}_+$ omezená, protože funkce $1/x^\alpha$

je tam spojitá a monotónní a konverguje k 0 pro $x \to +\infty$, je-li $\alpha \in \mathbb{R}_+$, integrál $\int_\pi^{+\infty} f$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$ existuje. Z toho plyne, že *integrál* (40) *existuje pro všechna* $\alpha \in (0,2)$.

Dokažme nyní sporem, že

$$(42_2) \qquad \textit{pro každé } \alpha \in (0,1\rangle \textit{ konverguje integrál } (40) \textit{ neabsolutně.}$$

Předpokládejme, že integrál $\int_\pi^{+\infty}$ konverguje (pro některé $\alpha \in (0,1\rangle$) absolutně, tj. že existuje integrál

$$(43) \qquad I := \int_\pi^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx.$$

Protože funkce $G(x) := \int_\pi^x |f|$ je primitivní funkcí funkce $|f|$ v $\mathbb{R}_+$, je existence integrálu (43) ekvivalentní s existencí konečné limity $I := G(+\infty-)$; pak je ovšem i $\lim_{n\to\infty} G(n\pi) = I$. Z toho plyne, že

$$(44) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (G((k+1)\pi) - G(k\pi))$$
$$= \lim_{n\to\infty} G(n\pi) = I \ (< +\infty).$$

Zároveň však je

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \geq \frac{1}{\big((k+1)\pi\big)^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, takže

$$(45) \qquad G(n\pi) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \to +\infty \ \text{ pro } \ n \to \infty,$$

což je ve sporu s (44). Tím je (42_2) dokázáno.

Zbývá ověřit, že

$$(42_3) \qquad \textit{pro žádné } \alpha \leq 0 \textit{ integrál } (40) \textit{ neexistuje.}$$

Označíme-li $F(x)$ nějakou primitivní funkci k funkci $\sin x / x^\alpha$ v $\mathbb{R}_+$, plynula by z existence integrálu $\int_\pi^{+\infty} f$ existence konečné limity $\lim_{n\to\infty} F(n\pi)$. Kdyby bylo $F(n\pi) \to A \in \mathbb{R}$, bylo by i $F((n+1)\pi) \to A$, a tedy $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f = F((n+1)\pi) - F(n\pi) \to 0$. To však není pravda, protože (pro každé $\alpha \leq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$) je

$$(46) \qquad \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = 2.$$

Obsah tvrzení (42_1), (42_2), (42_3) je úplným řešením našeho problému. □

Symetrická verze Abelova kritéria se užívá ke zjednodušení integrandu; k důkazu existence integrálu náležitě zjednodušené integrované funkce lze pak užít např. Dirichletovo kritérium. Běžné problémy, s nimiž se při tom setkáváme, a jejich řešení ilustruje tento (poněkud náročnější) příklad:

Příklad 10.10. Vyšetřme existenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh x}{\operatorname{arccotg} x \cdot x^\alpha \cdot \lg x \cdot e^x} \cdot \sin \pi x \cdot \cos \frac{\pi}{x}\, dx\,, \tag{47}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Integrand $f(x)$ je spojitý jak v intervalu $(0,1)$, tak i v intervalu $(1,+\infty)$; protože pro $x \to 1$ je $\sinh x \to \sinh 1$, $\operatorname{arccotg} x \to \frac{1}{4}\pi$, $x^\alpha \to 1$, $\sin \pi x/\lg x \to -\pi$, $e^x \to e$, $\cos(\pi/x) \to -1$, existuje konečná limita

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2(1-e^{-2}) \doteq 1.72933$$

a stačí položit $f(1)$ rovno této limitě, aby se f stala spojitou v celém $\mathbb{R}_+$. Integrál $\int_{1/2}^2 f$ tedy jistě existuje a zbývá rozhodnout o existenci integrálů $\int_0^{1/2} f$, $\int_2^{+\infty} f$, což se redukuje na otázku, jak se $f(x)$ chová pro $x \to 0+$ a pro $x \to +\infty$.

Pro $x \to 0+$ platí tyto relace:

$$\sinh x \asymp x\,, \quad \frac{1}{\operatorname{arccotg} x} \asymp 1\,, \quad \frac{1}{e^x} \asymp 1\,, \quad \sin \pi x \asymp x\,. \tag{48}$$

Čtenář jistě sám dokáže, že každá z kladných funkcí

$$\frac{\sinh x}{x}\,, \quad \frac{1}{\operatorname{arccotg} x}\,, \quad \frac{1}{e^x}\,, \quad \frac{\sin \pi x}{x} \tag{49}$$

je monotónní v intervalu $(0,1)$. První dvě rostou, a totéž platí tedy o jejich součinu; poslední dvě klesají, a totéž platí opět o jejich součinu. Aplikujeme-li dvakrát symetrickou verzi Abelova kritéria [7]) vidíme, že existence integrálu $\int_0^{1/2} f$ je ekvivalentní s existencí integrálu

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{x^\alpha \cdot \lg x} \cdot x \cdot \cos \frac{\pi}{x}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{x^{2-\alpha}}{\lg x} \cos \frac{\pi}{x}\, dx\,. \tag{50}$$

Tento integrál podle V.10.8 existuje, právě když existuje integrál, který z něj vznikne substitucí $x = \omega(t) := 1/t$; protože $\omega'(t) = -1/t^2$, je to integrál

$$\int_2^{+\infty} g\,, \quad \text{kde} \quad g(t) := \frac{\cos \pi t}{t^{4-\alpha} \lg t}\,. \tag{51}$$

---

[7]) Rostoucí funkci $\sinh x/(x \operatorname{arccotg} x)$ nahradíme x, místo klesající funkce $\sin \pi x/(xe^x)$ napíšeme ve druhém kroku 1; bylo by sice možné dokázat, že i součin všech čtyř funkcí (49) je monotónní (klesající) např. v intervalu $(0,1)$, ale zdůrazněme, že by to byla *zcela zbytečná* práce.

Funkce $\cos \pi t$ má (v celém $\mathbb{R}$) omezenou primitivní funkci $\sin \pi t/\pi$, funkce $h(t) := t^{4-\alpha} \lg t$ je spojitá a kladná v $(1, +\infty)$; je-li $\alpha \leq 4$, funkce h tam roste a její limita pro $t \to +\infty$ je rovna $+\infty$. Funkce $1/h(t)$ tam tedy klesá a má pro $t \to +\infty$ limitu 0, takže integrál (51) podle Dirichletova kritéria existuje; pro $\alpha \leq 4$ tedy existuje i $\int_0^{1/2} f$.

Je-li $\alpha > 4$, má kladná spojitá funkce $k(t) := t^{\alpha-4}/\lg t$ limitu rovnou $+\infty$ jak pro $t \to 1+$, tak i pro $t \to +\infty$, a má proto v intervalu $(0, 1)$ kladné minimum; označíme-li je $K(\alpha)$ a uvážíme-li, že $\operatorname{sgn}(\cos \pi x)$ je v každém intervalu tvaru $(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, kde $k \in \mathbb{N}$, konstantní, vidíme, že relace

$$(52) \qquad \left| \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{t^{\alpha-4}}{\lg t} \cos \pi t \, dt \right| \geq K(\alpha) \int_{k-1/2}^{k+1/2} |\cos \pi t| \, dt = \frac{2K(\alpha)}{\pi} > 0$$

platí pro všechna celá čísla $k \geq 2$. Kdyby integrál (51) existoval, musel by mít první integrál v (52) pro $k \to \infty$ nulovou limitu [8]); integrál tedy neexistuje, a totéž platí i o $\int_0^{1/2} f$.

Zatím jsme dokázali, že

$$(53_1) \qquad \textit{integrál } \int_0^{1/2} f \textit{ existuje, právě když je } \alpha \leq 4;$$

zbývá vyšetřit integrál $\int_2^{+\infty} f$.

Pro $x \to +\infty$ je

$$(54) \qquad \frac{\sinh x}{e^x} = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2x}) \asymp 1, \quad \frac{1}{\operatorname{arccotg} x} \asymp x, \quad \cos \frac{\pi}{x} \asymp 1;$$

v intervalu $\langle 2, +\infty)$ funkce $\sinh x/e^x$ a $\cos(\pi/x)$ rostou, funkce $1/(x \operatorname{arccotg} x)$ tam klesá. Postupnou aplikací symetrického Abelova kritéria zjistíme, že $\int_2^{+\infty} f$ existuje, právě když existuje integrál

$$(55) \qquad \int_2^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^\alpha \lg x} \, dx = \int_2^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x^{\alpha-1} \lg x} \, dx.$$

Je-li $\alpha \geq 1$, spojitá kladná funkce $x^{1-\alpha} \lg x$ roste a má pro $x \to +\infty$ limitu $+\infty$; její převrácená hodnota tedy klesá a má limitu 0. Protože funkce $\sin \pi x$ má v $\mathbb{R}$ omezenou primitivní funkci, integrál (55) podle Dirichletova kritéria existuje, a totéž platí o $\int_2^{+\infty} f$.

Je-li $\alpha < 1$, má (kladná spojitá) funkce $x^{1-\alpha}/\lg x$ pro $x \to 1+$ i pro $x \to +\infty$ limitu rovnou $+\infty$; má proto v $(1, +\infty)$ kladné minimum. Označíme-li je $L(\alpha)$, bude

[8]) Sr. s podobnou situací v Př. 10.9.

(56) $$\left|\int_k^{k+1} \frac{\sin \pi x}{x^{\alpha-1} \lg x}\, dx\right| \geq L(\alpha)\int_k^{k+1} |\sin \pi x|\, dx = \frac{2L(\alpha)}{\pi} > 0$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, z čehož (jak jsme již několikrát viděli) plyne, že integrál (55) neexistuje. Pro žádné $\alpha < 1$ neexistuje proto ani $\int_2^{+\infty} f$; tím je dokázáno, že

(53_2) $$\textit{integrál } \int_2^{+\infty} f \textit{ existuje, právě když je } \alpha \geq 1\,.$$

Shrneme-li dokázané výsledky, vidíme, že *integrál* (47) *existuje, právě když je* $1 \leq \alpha \leq 4$. Dodejme, že při důkazu, že *tento integrál konverguje absolutně, právě když je* $2 < \alpha < 3$, se postupuje jako v Př. 10.9. Pro $\alpha \in (2,3)$ se absolutní konvergence dokáže srovnávacím kritériem; důkaz, že integrál od 0 do $+\infty$ z $|f|$ pro $\alpha \in \langle 1,2\rangle \cup \langle 3,4\rangle$ neexistuje, je také podobný příslušné části Př. 10.9. V obou případech je však třeba vědět, že limita

(57) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\mu \lg k} \quad \text{je konečná, právě když je} \quad \mu > 1\,;$$

bude to dokázáno v následující kapitole.

Cvičení

Ve cvičeních 10.01–10.100 je úkolem vypočítat příslušný integrál, pokud existuje.[9])

10.01. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$

10.02. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$

10.03. $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\, dx$

10.04. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^3-1}\, dx$

10.05. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$

10.06. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

10.07. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\, dx$

10.08. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$

10.09. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$

10.10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

10.11. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx$

10.12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-x+1}\, dx$

[9]) Viz důležitou poznámku 10.5.

10.13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

10.14. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

10.15. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^6+1}\,dx$

10.16. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

10.17. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)\,(x^4+1)}\,dx$

10.18. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3-x}{x^{12}+x^6+1}\,dx$

10.19. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$

10.20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2-x+2)^2}\,dx$

10.21. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$

10.22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

10.23. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+1)\,\operatorname{arctg} x}$

10.24. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

10.25. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,dx$

10.26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx$

10.27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$

10.28. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$

10.29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+3}\,dx$

10.30. $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}$

10.31. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\lg^2 x+2\lg x+2)^2}$

10.32. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

10.33. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^3 x\,dx$

10.34. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \sin x\,dx$

10.35. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

10.36. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} e^{-x}\cos^2 x\,dx$

10.37. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} e^{-\sin x}\cos x\,dx$

10.38. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\lg^3 x+1)}$

10.39. $\displaystyle\int_{1/3\pi}^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin^2\frac{1}{x}\,dx$

10.40. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}$

10.41. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \Big(3x\cos x^3-\frac{1}{x^2}\sin x^3\Big)\,dx$

10.42. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$

10.43. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

10.44. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$

10.45. $\int_0^1 x^2 \lg(1+x^2)\, dx$

10.46. $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}\, dx$

10.47. $\int_1^{+\infty} \frac{1-\lg x}{x^2}\, dx$

10.48. $\int_0^1 x \arcsin x\, dx$

10.49. $\int_0^1 \arccos^2 x\, dx$

10.50. $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x} \cos x\, dx$

10.51. $\int_{-16}^{15} \frac{dx}{\sqrt[5]{(16-x)^4}}$

10.52. $\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\lg^2 x}}$

10.53. $\int_{-\infty}^{0} \sqrt{\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}}\, dx$

10.54. $\int_{-1}^{0} x^2 \arccos x\, dx$

10.55. $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx \quad (r \in \mathbb{R}_+)$

10.56. $\int_{-1}^{1} \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

10.57. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x+1}{(e^{2x}+1)^2}\, dx$

10.58. $\int_{-1}^{1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

10.59. $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$

10.60. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x\,(1-x)}}\, dx$

10.61. $\int_e^{+\infty} \left(\frac{\lg x}{x}\right)^3 dx$

10.62. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$

10.63. $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2}\, dx$

10.64. $\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2}\, dx$

10.65. $\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$

10.66. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

10.67. $\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\, dx$

10.68. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

10.69. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

10.70. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

10.71. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx$

10.72. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx$

10.73. $\int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}\, dx$

10.74. $\int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{3-x}}\, dx$

10.75. $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}\, dx$

10.76. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+4x-3}}$

10.77. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

10.78. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

10.79. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

10.80. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

10.81. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}}$

10.82. $\displaystyle\int_{-5}^{1} \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

10.83. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$

10.84. $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{x}{\sqrt{6-x-x^2}}\,dx$

10.85. $\displaystyle\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+3}}$

10.86. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$

10.87. $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

10.88. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$

10.89. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x+4}\,dx$

10.90. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin x+2}$

10.91. $\displaystyle\int_{0}^{5\pi} \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$

10.92. $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} \frac{dx}{\cos x+3}$

10.93. $\displaystyle\int_{0}^{10\pi} \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$

10.94. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$

10.95. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$

10.96. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi} \frac{\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx$

10.97. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}\,dx$

10.98. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi} \frac{dx}{3\cos x+2\sin x+5}$

10.99. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$

10.100. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x+2}\,dx$

V příkladech 10.101 – 10.145 je $\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}$, $\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset\mathbb{R}_+$; úkolem je najít všechny hodnoty těchto parametrů, pro něž příslušný integrál konverguje 1) absolutně, 2) neabsolutně.

10.101. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx$

10.102. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$

10.103. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}$

10.104. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^a}\,dx$

10.105. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin x^\alpha\,dx$

10.106. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin(\lg x)\,dx$

10.107. $$\int_0^{+\infty} \cos x^\alpha \, dx$$

10.108. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x \, dx$$

10.109. $$\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}^\alpha x \, \sin \frac{1}{x^\beta} \, dx$$

10.110. $$\int_0^{+\infty} x^a \cos \frac{1}{x^\alpha} \, dx$$

10.111. $$\int_0^{+\infty} \left|1 - \frac{1}{x}\right|^a \frac{\sin x}{\lg |\lg x|} \, dx$$

10.112. $$\int_0^{+\infty} x^a \sin \frac{1}{x^\alpha} \, dx$$

10.113. $$\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg}^\alpha x \, \cos x \, dx$$

10.114. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{|\lg x|^\beta} \operatorname{arctg} x^\alpha \, dx$$

10.115. $$\int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \, \lg x \, \cos x \, dx$$

10.116. $$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^a} \sin x \, dx$$

10.117. $$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+1} \, \lg^a x \, dx$$

10.118. $$\int_0^{+\infty} x^a e^{-(bx+cx^2)} \, dx$$

10.119. $$\int_0^{\pi/2} x^a \left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right)^b \operatorname{tg}^c x \, dx$$

10.120. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \, \sin 2x}{x^\alpha} \, dx$$

10.121. $$\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \operatorname{arccotg} x \, \sin x \, dx$$

10.122. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2}-1} \sin \frac{1}{x^2} \, dx$$

10.123. $$\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg}^\alpha x^5 \, \sin^5 x^\beta \, dx$$

10.124. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \pi x}{x \lg^2 x} \, dx$$

10.125. $$\int_0^1 \arcsin^a (x(1-x)) \sin \frac{1}{x^\alpha} \, dx$$

10.126. $$\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)}{x \lg x} \sin \frac{1}{x} \, dx$$

10.127. $$\int_0^1 x^a (1-x)^b \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{1-x} \, dx$$

10.128. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cotg}^a x}{\cos^b x} \lg \frac{2x}{\pi} \, dx$$

10.129. $$\int_0^{+\infty} \frac{\lg(e^{2x}+e^x+1)}{x^a} \sin x \, dx$$

10.130. $$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\lg^\alpha 2x} \, dx$$

10.131. $$\int_0^{+\infty} x^a \arccos \frac{x}{x+1} \, \sin x \, dx$$

10.132. $$\int_0^{+\infty} \frac{\lg x \, \sin x}{x \operatorname{arctg}(1-x)} \, dx$$

10.133. $$\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \, \frac{\lg x}{\lg(x+1)} \, x^\alpha \, dx$$

10.134. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^a} \, dx$$

10.135. $$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x}{\lg^\beta(1+x)} \sin x \, dx$$

10.136. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha}{\operatorname{arctg}^\beta x} \sin \frac{1}{x} \, dx$$

10.137. $$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)}{x^\alpha} \sin 2x \, dx$$

10.138. $$\int_0^1 \frac{\arccos^\alpha x \, \sin^\beta \pi x}{x^\gamma (1-x)^\gamma} \, dx$$

10.139. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x \ \operatorname{arccotg}^\beta x}{x^\gamma} \cos x \, dx$

10.140. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\operatorname{arccotg}^\alpha x^\beta\right) dx$

10.141. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arccos^a\left(\frac{2 \operatorname{arctg} x}{\pi}\right) \sin\frac{1}{x^3} \, dx$

10.142. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \lg\frac{x^2-1}{x^2+1} \operatorname{arctg}\frac{x}{x^3-1} \, dx$

10.143. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{x}\right) \sin\left(x-\frac{1}{x}\right) dx$

10.144. $\displaystyle\int_0^{1} \arccos^a\left(\sqrt{1-x^4}\,\right) \cos\frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx$

10.145. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}^a x^\alpha \ \operatorname{arccotg}^\beta x^\gamma \ \arcsin(\sin x) \, dx$

Řešení

10.01. $\frac{1}{20}\pi + \frac{1}{5}\lg 2 \doteq 0.2957$

10.02. $\frac{1}{2}\lg 2 \doteq 0.3466$

10.03. $2\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 3 \doteq 0.837$

10.04. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.05. $\frac{2}{3}(\pi - \operatorname{arctg} 3 - 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}) \doteq 0.478$

10.06. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.07. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.08. neexistuje

10.09. $\frac{1}{4}\lg 2 \doteq 0.1733$

10.10. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.11. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) - \frac{1}{12}\pi \doteq 0.4212$

10.12. $\frac{1}{6}\left(\pi\sqrt{3} - \lg 27\right) \doteq 0.3576$

10.13. $\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 3.6276$

10.14. $\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi \doteq 1.1107$

10.15. $\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 0.6046$

10.16. $\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi \doteq 1.1107$

10.17. $\frac{1}{16}(\pi + \lg 4) \doteq 0.283$

10.18. 0

10.19. $\frac{1}{32}\pi \doteq 0.098175$

10.20. $\frac{2}{49}\pi \doteq 0.3393$

10.21. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.22. $-\frac{1}{2}$

10.23. $\lg\frac{4}{3} \doteq 0.2877$

10.24. 1

10.25. $\frac{1}{2}\pi \doteq 1.5708$

10.26. $\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi \doteq 1.1107$

10.27. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.28. $\lg(1+\sqrt{2}\,) \doteq 0.8814$

10.29. $\frac{5}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 3.023$

10.30. $\frac{11}{3}$

10.31. $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4} \doteq 0.1427$

10.32. $\frac{1}{2}\lg 2 \doteq 0.3466$

10.33. $\frac{4}{3}$

10.34. $\frac{3}{2}\pi^2 - 12 \doteq 2.8044$

10.35. $\frac{1}{8}\pi \doteq 0.3927$

10.36. $\frac{2}{5}e^{-\pi/2} \doteq 0.08315$

10.37. $1 - e^{-1} \doteq 0.6321$

10.38. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.39. π

10.40. $\frac{1}{3}(2 - \sqrt[4]{2}) \doteq 0.2703$

10.41. 0

10.42. $e - 5e^{-1} \doteq 0.8789$

10.43. π

10.44. $\frac{9}{8}$

10.45. $\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\lg 2 - \frac{1}{6}\pi \doteq 0.1519$

10.46. $\frac{3}{2}$

10.47. 0

10.48. $\frac{1}{8}\pi \doteq 0.3927$

10.49. $\pi - 2$

10.50. 0

10.51. 5

10.52. π

10.53. $\lg(1 + \sqrt{2}) \doteq 0.8814$

10.54. $\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{9} \doteq 0.825$

10.55. $\frac{1}{2}\pi r^2$

10.56. -2

10.57. $\frac{1}{2}(\lg 2 - 1) + \frac{1}{8}\pi \doteq 0.2393$

10.58. $\frac{1}{2}\pi^2 \doteq 4.935$

10.59. $\frac{1}{6}(\lg 2 - 1) + tf112 \doteq 0.2107$

10.60. $(\frac{1}{2}\pi)^2 \doteq 2.4674$

10.61. $\frac{19}{8}e^{-2} \doteq 0.3214$

10.62. $\frac{1}{16}\pi \doteq 0.19635$

10.63. $\frac{1}{32}\pi \doteq 0.09817$

10.64. $\frac{8}{105} \doteq 0.07619$

10.65. $10 - \frac{9}{2}\lg 3 \doteq 5.0562$

10.66. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.67. $3\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\pi + 4 \doteq 1.2181$

10.68. $\frac{2}{3}$

10.69. $\frac{1}{12}\sqrt{3} \doteq 0.1443$

10.70. neexistuje

10.71. $\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2}) \doteq 2.2956$

10.72. $\frac{1}{2}\pi \doteq 1.5708$

10.73. $3(\sqrt{2} - \lg(1 + \sqrt{2}) \doteq 1.5985$

10.74. $2\,\mathrm{arccotg}\,\frac{1}{2}\sqrt{2} \doteq 1.9106$

10.75. $\frac{1}{16}\big(4 + \sqrt{2}\lg(3 + 2\sqrt{2})\big) \doteq 0.4058$

10.76. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\pi \doteq 1.8138$

10.77. π

10.78. $\lg(1 + \frac{2}{7}\sqrt{7}) \doteq 0.563$

10.79. $\sqrt{2}\lg(\sqrt{2} + 1) \doteq 1.24645$

10.80. $\lg(2 + \sqrt{5}) \doteq 1.4436$

10.81. $\frac{1}{2}\lg(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}) \doteq 0.3838$

10.82. $\frac{9}{2}\pi \doteq 14.1372$

10.83. $2(\sqrt{2} - \arccos\frac{1}{3}) \doteq 0.3665$

10.84. $-\frac{1}{2}\pi$

10.85. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\lg(10-5\sqrt{3}) \doteq 0.1689$

10.86. π

10.87. 2π

10.88. $\frac{8}{3}$

10.89. $\frac{2}{7}\sqrt{7}\operatorname{arctg}(\frac{1}{11}\sqrt{7}) \doteq 0.1784$

10.90. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi \doteq 3.6276$

10.91. $\frac{5}{2}\sqrt{2}\pi$

10.92. $\sqrt{2}\pi \doteq 4.4429$

10.93. $10\sqrt{2}\pi \doteq 44.4288$

10.94. 2

10.95. $\frac{1}{4}\pi$

10.96. $\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 0.6046$

10.97. $\lg\big(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\big) \doteq 0.4812$

10.98. $\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 2.4184$

10.99. $\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\lg(2\sqrt{3}-3)\big) \doteq 1.1405$

10.100. $\frac{1}{2}(3\pi+\lg 3)-\sqrt{2}(\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{2}) \doteq -0.5322$

V následujících výsledcích znamenají slova „ne“ (pro integrály bez parametru) a „nikdy“ (pro integrály s parametrem nebo s parametry), že není splněna podmínka uvedená v nadpisu sloupce; „ano“ znamená, že splněna je.

integrál	absolutní konvergence	neabsolutní konvergence
10.101.	$1-a<b<1$	nikdy
10.102.	$1<a<3$	nikdy
10.103.	ano	ne
10.104.	ne	ne
10.105.	nikdy	$\alpha>1$
10.106.	ne	ne
10.107.	nikdy	$\alpha>1$
10.108.	ne	ano
10.109.	$\beta>1$	nikdy
10.110.	nikdy	$-\alpha-1<a<-1$
10.111.	nikdy	$-1<a<2$
10.112.	$-1<a<\alpha-1$	$-\alpha-1<a\le-1$
10.113.	$\alpha>1$	$0<\alpha\le 1$
10.114.	nikdy	$0<\beta<2$
10.115.	ne	ano
10.116.	$1<\alpha<3$	$0<\alpha\le 1$
10.117.	nikdy	nikdy

10.118.	$a > 1 \wedge (c > 0 \vee (c = 0 \wedge b > 0))$	nikdy
10.119.	$-a-1 < c < b+1$	nikdy
10.120.	$1 < \alpha < 3$	$0 < \alpha \leq 1$
10.121.	ne	ano
10.122.	$a > 1$	$-1 < a \leq 1$
10.123.	$\alpha > \frac{1}{5}$	$\alpha \leq \frac{1}{5} \wedge 5\alpha + \beta > 1$
10.124.	ano	ne
10.125.	$a > -1$	nikdy
10.126.	nikdy	ano
10.127.	$a > -1 \wedge b > -1$	buď $-2 < a \leq -1 \wedge b > -1$, nebo $a > -1 \wedge -2 < b \leq -1$
10.128.	$b-2 < a < 1$	nikdy
10.129.	nikdy	$1 < a < 2$
10.130.	nikdy	$0 < \alpha < 2$
10.131.	$-2 < a < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$
10.132.	ne	ano
10.133.	$\alpha > -\frac{1}{3}$	nikdy
10.134.	$1 < \alpha < 2$	$-1 < a \leq 1$
10.135.	nikdy	$0 < \beta < \alpha + 2$
10.136.	nikdy	$\alpha > \beta - 2$
10.137.	$1 < \alpha < 2$	$0 < \alpha \leq 1$
10.138.	$\gamma - \beta < 1$	nikdy
10.139.	$1 - \beta < \gamma < 1 + \alpha$	$0 < \beta + \gamma \leq 1 \wedge \gamma < 1 + \alpha$
10.140.	$\alpha\beta > 1$	nikdy
10.141.	$a > 2$	$-4 < a \leq 2$
10.142.	$a > -3$	nikdy
10.143.	ne	ano
10.144.	$a > -\frac{1}{2}$	nikdy
10.145.	$a\alpha + 2 > 0 \wedge \beta\gamma > 1$	$a\alpha + 2 > 0 \wedge 0 < \beta\gamma \leq 1$