13. Posloupnosti a řady funkcí

V kapitole 12 jsme zavedli pojem *stejnoměrné konvergence posloupnosti* zobrazení takto: Je-li X libovolná množina, (Y, σ) metrický prostor a jsou-li f a f_k, kde $k \in \mathbb{N}$, zobrazení množiny X do Y, říkáme, že *posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje v* X *stejnoměrně k* f, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje k_0 tak, že

$$k > k_0\,,\ x \in X\ \Rightarrow\ \sigma(f_k(x), f(x)) < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Víme, že stejnoměrná konvergence se liší od *bodové konvergence v* X (tedy od podmínky, že $f_k(x) \to f(x)$ pro každé $x \in X$) tím, že číslo k_0 nezávisí na $x \in X$, zatímco při bodové konvergenci je obecně na x závislé.

Konvergenci a součet řady funkcí, jejichž hodnoty leží v nějakém n.l.p. Y, jsme zavedli v Po.12.1: *Stejnoměrná konvergence řady* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ se součtem s se definuje jako stejnoměrná konvergence posloupnosti jejích částečných součtů $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ k s, tedy jako platnost výroku: Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje n_0 tak, že

$$n > n_0,\ x \in X\ \Rightarrow\ \|\, s_n(x) - s(x) \,\| = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \,\| < \varepsilon\,. \tag{1'}$$

Je jistě zřejmé, že platí např. toto tvrzení:

(2) *Je-li* $m \in \mathbb{N}$ a $X = \bigcup_{j=1}^{m} X_j$, *konverguje posloupnost nebo řada funkcí v* X *stejnoměrně, právě když konverguje stejnoměrně na každé z množin* X_j.

Příklad 13.1. Pro platnost právě vysloveného tvrzení je podstatné, že jde o sjednocení *konečného počtu* množin, protože *analogické tvrzení pro nekonečnou posloupnost množin neplatí*: Funkce $f_k(x) := x/k$ konvergují v $\mathbb{R}$ (bodově) k nulové funkci, konvergence je stejnoměrná v každém intervalu $X_j := \langle -j, j \rangle$, kde $j \in \mathbb{N}$, ale *není stejnoměrná* v $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$.

Poznámka 13.1. Stejnoměrná konvergence má řadu důsledků, které z bodové konvergence obecně nevyplývají. Platí např. toto velmi důležité tvrzení:

(3) *Jsou-li zobrazení* f_k *spojitá v m.p.* X *a je-li* $f_k \to f$ *stejnoměrně v* X, *je i zobrazení* f *spojité v* X.

Podobně pro řady funkcí, jejichž hodnoty leží v n.l.p.:

(3′) *Jsou-li zobrazení* f_k *spojitá v m.p.* X *a konverguje-li řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *stejnoměrně v* X, *je součet řady spojitý v* X.

Z bodové konvergence spojitých funkcí spojitost limitní funkce ovšem neplyne: Funkce $f_k(x) := x^k$ konvergují bodově v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ k funkci $f(x)$ rovné 0 v intervalu $\langle 0, 1)$ a 1 v bodě 1. $\square$

Řady, jejichž členy mají hodnoty v obecných n. l. p., studuje podrobněji tzv. *funkcionální analýza* – subdisciplína matematické analýzy vzniklá kolem roku 1930. Protože hlavním předmětem zájmu této sbírky příkladů je daleko starší *klasická analýza*, omezíme se v dalším na řady komplexních funkcí.

Úmluva. Nebude-li řečeno výslovně něco jiného (např. že členy řady jsou reálné), budeme „řadou" rozumět *řadu komplexních funkcí*. □

Následující věta ukazuje, že stejnoměrná konvergence značně zjednodušuje opakované limitní přechody.

Věta 13.1. (Věta o záměně limitních přechodů.) *Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť v jistém okolí $P(a)$ konverguje posloupnost funkcí $f_k : P(a) \to \mathbb{R}$ stejnoměrně k funkci $f : P(a) \to \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{x\to a} f_k(x) = A_k \in \mathbb{R}$ pro každé k. Pak existují konečné limity $\lim_{k\to\infty} A_k$, $\lim_{x\to a} f(x)$ a mají touž hodnotu.*

Analogická tvrzení platí pro limitu zprava resp. zleva v bodech $a < +\infty$ resp. $a > -\infty$; okolí $P(a)$ se v tom případě nahradí okolím $P^+(a)$ resp. $P^-(a)$.

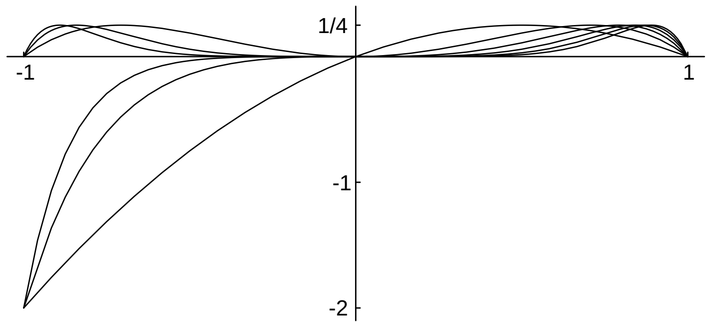
Poznámka 13.2. Název věty souvisí s tím, že její tvrzení lze napsat ve tvaru

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(\lim_{x\to a} f_k(x)\big). \tag{4}$$

Pro aplikaci V. 13.1 je podstatné, že se předpokládá jen existence „vnitřních" limit v (4) (a stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$); *existenci (konečných) „vnějších" limit (včetně jejich rovnosti) zaručuje věta sama.*

Věta se dosti často užívá i *k vyvrácení stejnoměrnosti konvergence*: *Pokud existují a jsou konečné obě „vnitřní" limity v (4) a buď některá z dvojnásobných limit (4) neexistuje, nebo není konečná, nebo sice obě existují, ale nejsou stejné, není konvergence $f_k \to f$ stejnoměrná v žádném $P(a)$.* (Podobně „zprava" a „zleva".)

Podobným způsobem lze ovšem využít i tvrzení (3): *Je-li limita f spojitých funkcí f_k nespojitá funkce, není konvergence $f_k \to f$ stejnoměrná.*



K PŘÍKLADU Z PO. 13.2 : f_k, $1 \le k \le 6$

P ř í k l a d : Je-li $f_k(x) := x^k - x^{2k}$, je $f_k \to 0$ všude v intervalu $(-1, 1\rangle$, konvergence však není stejnoměrná v žádném $P^+(-1)$, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$A_{2k} := f_{2k}(-1+) = f_{2k}(-1) = 0$, $A_{2k-1} := f_{2k-1}(-1+) = f_{2k-1}(-1) = -2$, takže $\lim A_k$ neexistuje.

K důkazu, že konvergence není stejnoměrná ani v žádném $P^-(1)$, však ani tvrzení (3), ani větu 13.1 užít nelze. (Běžnými metodami vyšetřování průběhu funkce ovšem zjistíme, že $\max f_k(\langle 0,1\rangle) = f_k(\sqrt[k]{1/2}) = \frac{1}{4}$; protože v každém $P^-(1)$ leží skoro všechna čísla $\sqrt[k]{1/2}$, je konvergence $f_k \to 0$ v každém $P^-(1)$ opravdu nestejnoměrná.) □

Jak víme, je spojitost v bodě a „*lokální vlastnost*“, tj. vlastnost, která nezávisí na tom, jak je funkce definována mimo jakékoli předem dané okolí $U(a)$. Proto lze tvrzení (3) velmi účelně zobecnit, a to tím, že zobecníme pojem stejnoměrné konvergence:

Definice. Říkáme, že **posloupnost** $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ zobrazení m. p. (X,ρ) do m. p. (Y,σ) **konverguje v** X **lokálně stejnoměrně** k zobrazení $f : X \to Y$, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $U(x)$ tak, že $f_k \to f$ stejnoměrně v $U(x)$.

Říkáme, že **řada** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **konverguje lokálně stejnoměrně v** X, má-li tuto vlastnost posloupnost jejích částečných součtů. □

Poznámka 13.3. Obecně je lokálně stejnoměrná konvergence slabší než konvergence stejnoměrná – ukazuje to nahoře uvedený příklad funkcí $f_k(x) = x/k$, které k nulové funkci nekonvergují v $\mathbb{R}$ stejnoměrně, ale lokálně stejnoměrně ano. Z Borelovy věty však snadno plyne platnost tohoto tvrzení:

Věta 13.2. *Konverguje-li posloupnost resp. řada lokálně stejnoměrně v X, je její konvergence stejnoměrná na každé kompaktní množině $K \subset X$.*

Důsledek. *Je-li (X,ρ) kompaktní prostor, je lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti resp. řady v X ekvivalentní s její stejnoměrnou konvergencí v X.*

Hlavní část právě uvedené věty lze v některých prostorech obrátit:

Věta 13.3. *Je-li $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde kompaktní množiny X_n splňují inkluzi $X_n \subset \operatorname{int} X_{n+1}$ pro každé n, konverguje posloupnost resp. řada lokálně stejnoměrně v X, právě když konverguje stejnoměrně na každé kompaktní množině $K \subset X$.*

Dodatek. *Podmínku věty splňují např. všechny eukleidovské prostory, všechny jejich otevřené a uzavřené podprostory, a také všechny intervaly obsažené v $\mathbb{R}$.*

Zobecněním tvrzení (3) a (3′) je tato důležitá věta:

Věta 13.4. *Je-li $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost zobrazení spojitých v m. p. X a je-li $f_k \to f$ lokálně stejnoměrně v X, je i zobrazení f spojité v X.*

Konverguje-li řada funkcí spojitých v X lokálně stejnoměrně v X, je její součet funkce spojitá v X.

Lokálně stejnoměrná konvergence souvisí i s derivováním:

Věta 13.5. (Věta o derivování posloupnosti a řady člen po členu.) *Konverguje-li posloupnost funkcí $f_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ aspoň v jednom bodě $c \in (a,b)$ a je-li $f_k' \to g$ lokálně stejnoměrně v (a,b), konverguje i posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ lokálně stejnoměrně v (a,b); označíme-li f její limitu, je $f' = g$ v (a,b).*

Obdobně pro řady: Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ reálných funkcí aspoň v jednom bodě $c \in (a,b)$ a je-li konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ v (a,b) lokálně stejnoměrná, platí totéž i pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, přičemž

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \quad \text{všude v } (a,b). \tag{5}$$

Poznámka 13.4. Pamatujme, že se v první části věty 13.5 nepředpokládá lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, ale lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_k'\}$ (a že obdobně je tomu ve druhé části věty s příslušnými řadami). *Z lokálně stejnoměrné konvergence diferencovatelných funkcí – dokonce ani z jejich stejnoměrné konvergence – neplyne ani bodová konvergence posloupnosti příslušných derivací.* (Příklad: Funkce $\sin k^2x/k$ konvergují k nulové funkci stejnoměrně v $\mathbb{R}$, ale příslušná posloupnost derivací $k\cos k^2x$ nekonverguje nikde.) $\square$

Napíšeme-li v předcházející větě g_k místo f_k' a G_k místo f_k, dostaneme toto ekvivalentní tvrzení:

Věta 13.5'. (Věta o integraci posloupnosti a řady člen po členu.) *Má-li každá z funkcí $g_k : (a,b) \to \mathbb{R}$, kde $k \in \mathbb{N}$, v (a,b) funkci primitivní, konverguje-li posloupnost $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ v (a,b) lokálně stejnoměrně k funkci g a je-li posloupnost $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ funkcí primitivních k funkcím g_k zvolena tak, aby konvergovala aspoň v jednom bodě $c \in (a,b)$, konverguje posloupnost $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ v (a,b) lokálně stejnoměrně k jisté funkci G, která je funkcí primitivní k funkci g v (a,b).*

Obdobně pro řady: Má-li každá z funkcí $g_k : (a,b) \to \mathbb{R}$, kde $k \in \mathbb{N}$, v intervalu (a,b) primitivní funkci, konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ v (a,b) lokálně stejnoměrně a jsou-li funkce G_k primitivní v (a,b) k funkcím g_k zvoleny tak, aby řada $\sum_{k=1}^{\infty} G_k$ konvergovala aspoň v jednom bodě $c \in (a,b)$, konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} G_k$ v (a,b) lokálně stejnoměrně a její součet je funkce primitivní v (a,b) k součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$.

Slovo „integrace“ není jednoznačné: může znamenat nejen přechod k primitivní funkci, ale i přechod k integrálu. Stejnoměrná konvergence souvisí i s druhým z těchto významů: [1])

Věta 13.6. (Limitní přechod za znamením integrálu.) *Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí $f_k : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ stejnoměrně v $\langle a,b\rangle$, je*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k\,. \tag{6}$$

Věta 13.7. (Integrace řady člen po členu – 2. verze.) *Jsou-li $f_k : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ funkce spojité v $\langle a,b\rangle$ a konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ v $\langle a,b\rangle$ stejnoměrně, je*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k\,. \tag{7}$$

[1]) Ve větách 13.6 a 13.7 se integrují spojité funkce v konečných mezích, a je proto jedno, máme-li na mysli Newtonův, Riemannův nebo např. Lebesgueův integrál.

Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti i řady spojitých funkcí lze někdy dokázat i pomocí této věty:

Věta 13.8. (Diniho věta.) *Nechť X je kompaktní prostor a nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí spojitých v X. Pak platí:*

1. *Je-li posloupnost $\{f_k(x)\}$ pro každé $x \in X$ monotónní a omezená a je-li funkce $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ spojitá v X, je konvergence $f_k \to f$ v X stejnoměrná.*

2. *Jsou-li funkce f_k nezáporné a je-li součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ spojitý v X, konverguje tato řada stejnoměrně v X.*

Příklad 13.2. Posloupnost funkcí $f_k(x) := x^{(k+1)/(2k-1)}$ je v každém bodě $x \in \mathbb{R}_+^0$ monotónní – v bodech 0 a 1 je konstantní, pro $x \in (0,1)$ rostoucí, pro $x > 1$ klesající. Protože všechny funkce f_k jsou v $\mathbb{R}_+^0$ spojité a protože totéž platí i o funkci $f(x) = \lim f_k(x) = \sqrt{x}$, konverguje posloupnost $\{f_k\}$ stejnoměrně v každém kompaktním intervalu $I \subset \mathbb{R}_+^0$; v $\mathbb{R}_+^0$ je tedy tato konvergence lokálně stejnoměrná. Vzhledem k tomu, že $f_k(k^{2k-1}) - f(k^{2k-1}) = k^k(k - 1/\sqrt{k}\,) \to +\infty$ pro $k \to \infty$, posloupnost nekonverguje stejnoměrně v žádném $P(+\infty)$, a tím spíše ne v $\mathbb{R}_+^0$.

* * *

Pro derivování a integrování tzv. **mocninných řad**, tj. řad tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\zeta)^k\,, \tag{8}$$

kde **koeficienty** a_k a **střed** ζ stejně jako „proměnná“ z jsou komplexní čísla, platí daleko jednodušší pravidla než pro řady obecné.

Základním poznatkem o konvergenci mocninných řad je toto tvrzení:

Lemma 13.1. (Abelovo lemma.) *Konverguje-li mocninná řada* (8) *v některém bodě $z_1 \neq \zeta$, konverguje absolutně pro každé $z \in U(\zeta, |z_1 - \zeta|)$.*

Přímým důsledkem Abelova lemmatu je tato věta:

Věta 13.9. *Pro každou řadu* (8) *existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ tak, že platí:*

$$|z-\zeta| < R \Rightarrow \text{řada (8) konverguje absolutně,} \tag{9}$$

$$|z-\zeta| > R \Rightarrow \text{řada (8) diverguje.} \tag{10}$$

Dodatek. *Je-li $R > 0$, řada* (8) *konverguje v množině $\{z \in \mathbb{C};\, |z-\zeta| < R\}$ lokálně stejnoměrně.* $\square$

Číslo R je vlastnostmi (9) a (10) určeno jednoznačně a nazývá se **poloměr konvergence** řady (8).

Protože nechceme měnit definici okolí $U(\zeta, R)$ (v níž je $R \in \mathbb{R}_+$) a protože poloměr konvergence může být i $+\infty$, zavedeme označení

$$K(\zeta,R) = \left\{ \begin{array}{cl} U(\zeta,R) & \text{pro } R \in \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{C} & \text{pro } R = +\infty \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Pro řady (8) s poloměrem konvergence $R > 0$ se množina (11) nazývá **kruh konvergence**; *řady s nulovým poloměrem konvergence kruh konvergence nemají.*

Věta 13.10. (Věta o derivování mocninné řady člen po členu.) *Pro každé $p \in \mathbb{N}$ má řada*

$$\sum_{k=p}^{\infty} k\,(k-1)\cdots(k-p+1)\,a_k\,(z-\zeta)^{k-p}\,, \tag{12}$$

která vznikla p-násobným derivováním člen po členu řady (8)*, týž poloměr konvergence R jako řada* (8)*.*

Je-li $R > 0$ a označíme-li $F(z)$ součet řady (8)*, je*

$$F^{(p)}(z) = \sum_{k=p}^{\infty} k\,(k-1)\cdots(k-p+1)\,a_k\,(z-\zeta)^{k-p} \text{ pro každé } z \in K(\zeta,R) \tag{13}$$

a pro každé celé číslo $p \geq 0$, přičemž

$$a_k = \frac{F^{(k)}(\zeta)}{k!} \text{ pro každé } k \geq 0\,. \tag{14}$$

Důsledek. *Je-li $R > 0$, jsou koeficienty a_k určeny součtem $F(z)$ řady* (8) *jednoznačně. Speciálně: Je-li $F \equiv 0$ v jistém $U(\zeta)$, jsou všechna a_k rovna* 0. [2])

Poznámka 13.5. Derivace v předcházející větě jsou samozřejmě derivacemi „podle komplexní proměnné“. Mocninnou řadu s kladným poloměrem konvergence lze tedy derivovat člen po členu a součet výsledné řady je derivací součtu řady původní. Mocninnou řadu však lze také *integrovat člen po členu*; touto operací dojdeme ke *komplexní primitivní funkci* součtu původní řady, tedy k funkci, jejíž derivace podle komplexní proměnné je rovna tomuto součtu:

Věta 13.11. *Má-li řada* (8) *poloměr konvergence $R > 0$, je*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\zeta)^k = \Big(c + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\frac{(z-\zeta)^{k+1}}{k+1}\Big)' \text{ pro všechna } z \in K(\zeta,R) \tag{15}$$

a pro každou konstantu $c \in \mathbb{C}$.

* * *

Vysvětleme nyní metody, jimiž lze účelně vyšetřovat stejnoměrnou resp. lokálně stejnoměrnou konvergenci v případě, že jde o posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbb{R}$.

Úmluva. Úloha „*vyšetřit stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$*“ bude znamenat, že máme najít

1. bodovou limitu na maximální množině M, v níž posloupnost konverguje;
2. všechny intervaly, v nichž posloupnost konverguje stejnoměrně;

[2]) Poslední tvrzení je analogií známého tvrzení o polynomech: *Je-li $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \equiv 0$ např. v nějakém intervalu $I \subset \mathbb{R}$, je $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.*

3. maximální množinu resp. všechny maximální intervaly, v nichž je konvergence lokálně stejnoměrná;

4. všechny body $a \in \mathbb{R}^*$, pro něž *existuje* (pravé, levé, oboustranné) prstencové okolí, v němž posloupnost konverguje bodově, ale konvergence není stejnoměrná v *žádném* takovém okolí.

V případě *řad* je úkol i postup analogický; vyšetřujeme však zpravidla jen (bodovou, stejnoměrnou, lokálně stejnoměrnou) konvergenci, protože součet lze najít jen výjimečně. □

Vysvětlíme nyní *standardní metodu*, kterou lze při hledání odpovědí na tyto otázky aplikovat v případě posloupnosti:

I. *Najdeme bodovou limitu* f funkcí f_k na maximální množině M, na níž existuje a je konečná; v konkrétních případech to bude zpravidla sjednocení jistých disjunktních intervalů.

II. Protože $f_k \to f$ stejnoměrně v neprázdné množině $X \subset M$, právě když je

$$\sup\{|f_k(x) - f(x)|;\, x \in X\} \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty, \tag{16}$$

je většinou účelné vytvořit funkce

$$g_k := f_k - f \tag{17}$$

a vyšetřit jejich průběh.[3]) *Posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje v* $X \neq \emptyset$ *stejnoměrně k funkci* f, *právě když je*

$$\sup\{|g_k(x)|;\, x \in X\} \to 0 \quad \textit{pro} \quad k \to \infty. \tag{16'}$$

Vzhledem k tomu, že

$$Y \subset \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \sup\{|y|;\, y \in Y\} = \max(\sup Y, -\inf Y),$$

můžeme místo suprem (16′) hledat čísla

$$\inf\{g_k(x);\, x \in X\} \quad \text{a} \quad \sup\{g_k(x);\, x \in X\}; \tag{16''}$$

konvergence $f_k \to f$ *je stejnoměrná v* $X \neq \emptyset$, *právě když obě posloupnosti čísel* (16″) *konvergují k nule*.

Stává se, že hledání přesných hodnot infim a suprem (16″) je obtížné; může to být někdy i zbytečné, protože podaří-li se nám najít *odhady*

$$A_k \le g_k(x) \le B_k \quad \text{pro všechna } x \in X, \tag{18}$$

pro něž je $A_k \to 0$, $B_k \to 0$, je platnost (16) zaručena.

[3]) K tomu je samozřejmě třeba dobře ovládat příslušné metody – vyložili jsme je v kapitole 7 Úvodu.

Poznamenejme, že podmínka (16′) je geometricky velmi názorná: *Je splněna, právě když vodorovný pás*

$$Z(\varepsilon) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ -\varepsilon < y < \varepsilon\}$$

obsahuje pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ grafy skoro všech funkcí g_k. Obráceně tedy: *Existuje-li pás $Z(\varepsilon)$ tak, že graf funkce g_k v něm není obsažen pro nekonečně mnoho indexů k, není konvergence $g_k \to 0$ stejnoměrná v X.*

III. Po nalezení všech intervalů, v nichž je konvergence stejnoměrná, užijeme V.13.3, podle níž *je konvergence lokálně stejnoměrná v intervalu I, právě když je stejnoměrná na každém kompaktním intervalu $J \subset I$.*

IV. *Existuje-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a posloupnost bodů $a_k \in M$ tak, že $a \neq a_k \to a$ a že nerovnost $|g_k(a_k)| \geq \varepsilon$ platí pro nekonečně mnoho indexů k, není konvergence $f_k \to f$ stejnoměrná v žádném $P(a)$.*

Jak jsme však již řekli v Po.13.2, lze k nalezení bodů $a \in \overline{M}$, v jejichž žádném okolí $P(a)$ není konvergence $f_k \to f$ stejnoměrná, užít i tvrzení (3) a V.13.1.

Podobná tvrzení platí samozřejmě i pro okolí $P^+(a)$ a $P^-(a)$.

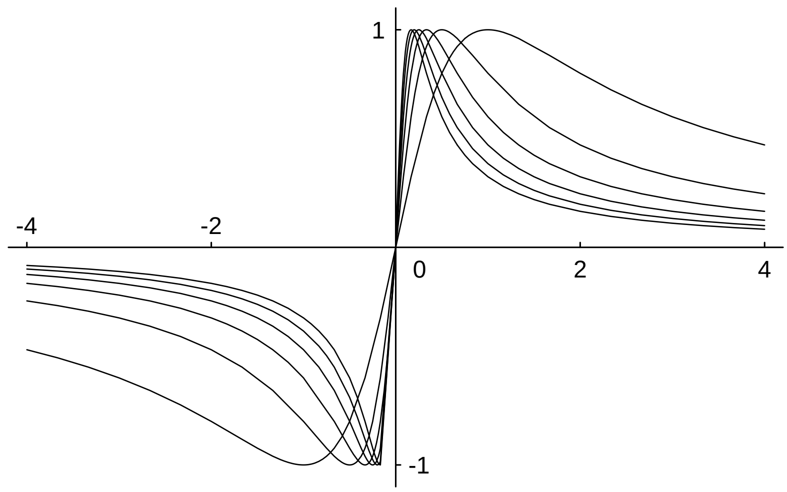
Příklad 13.3. Je-li

(19) $$f_k(x) := \frac{2kx}{1 + k^2x^2}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je zřejmě $f_k \to 0$ všude v $\mathbb{R}$. Všude v $\mathbb{R}$ existuje také derivace

(20) $$f_k'(x) = \frac{2k\,(1 - k^2x^2)}{(1 + k^2x^2)^2}\,;$$

je rovna 0, právě když je $x = \pm 1/k$.



K Př.13.3: f_k, $1 \leq k \leq 6$

Protože $f_k(\pm\infty\mp) = f_k(0) = 0$, $f_k(\pm 1/k) = \pm 1$, nabývá funkce f_k v bodě $-1/k$ svého minima rovného -1 a v bodě $1/k$ svého maxima rovného 1 (viz V. 8.2). Odtud plyne, že $\sup\{|f_k(x)|;\, x \in \mathbb{R}\} = 1$, což pro $k \to \infty$ nekonverguje k nule; *konvergence v* $\mathbb{R}$ *není stejnoměrná*.

Protože body $1/k$ resp. $-1/k$ konvergují zprava resp. zleva k nule, *není konvergence* $f_k \to 0$ *stejnoměrná v žádném* $P^+(0)$ *a v žádném* $P^-(0)$. Je-li však $\delta \in \mathbb{R}_+$, je funkce f_k pro všechna $k > 1/\delta$ klesající v intervalu $\langle \delta, +\infty)$ i v intervalu $(-\infty, -\delta\rangle$, takže v prvním z těchto intervalů je $f_k(\delta) \geq f_k(x) > 0$, ve druhém $0 > f_k(x) \geq f_k(-\delta)$. Protože $f_k(\delta) \to 0$, $f_k(-\delta) \to 0$, je z toho patrné, že $f_k \to 0$ stejnoměrně v obou těchto intervalech.

Shrneme-li výsledky, vidíme, že *konvergence* $f_k \to 0$ *je stejnoměrná v intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *právě když je* $0 \notin \overline{I}$; *konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$. [4])

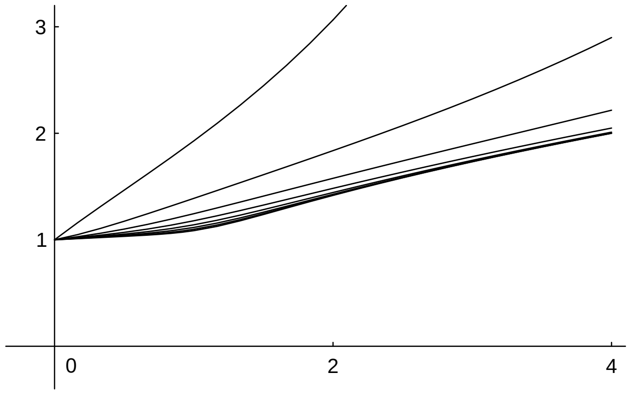
Příklad 13.4. Vyšetřme stejnoměrnou konvergenci funkcí

(21) $$f_k(x) := \sqrt[2k]{x^k + e^x} \quad \text{v intervalu } \langle 0, +\infty).$$

Spolu s výpočtem bodové limity dokážeme pomocí vhodných odhadů něco i o stejnoměrné konvergenci: Je-li $0 \leq x \leq 1$, je

(22) $$1 \leq f_k(x) \leq \sqrt[2k]{1+e} \to 1 \text{ pro } k \to \infty;$$

z toho je patrné, že *v intervalu* $\langle 0, 1\rangle$ *je konvergence* $f_k \to 1$ *stejnoměrná*.



K Př. 13.4: f_k, $1 \leq k \leq 8$

Pro každé (pevné) $x \in (1, +\infty)$ je $\lim_{k\to\infty} x^k = +\infty$, a v důsledku toho platí nerovnost $x^k > e^x$ pro všechna dost velká k (konkrétně: pro všechna $k > x/\lg x$); z toho plyne, že pro taková k je

(23) $$\sqrt{x} \leq f_k(x) = \sqrt[2k]{x^k + e^x} \leq \sqrt[2k]{2x^k} = \sqrt[2k]{2}\,\sqrt{x}.$$

Protože $\sqrt[2k]{2} \to 1$ pro $k \to \infty$, je zřejmé, že v intervalu $(1, +\infty)$ je $f_k(x) \to \sqrt{x}$.

[4]) Všimněme si, že z lokálně stejnoměrné konvergence v $\mathbb{R} - \{0\}$ a z konvergence v bodě 0 *neplyne* lokálně stejnoměrná konvergence v $\mathbb{R}$.

Položíme-li $g_k(x) = f_k(x) - \sqrt{x}$, bude

$$(24) \qquad 0 \le g_k(x) = \frac{(x^k + e^x) - x^k}{(f_k(x))^{2k-1} + (f_k(x))^{2k-2}\sqrt{x} + \ldots + (\sqrt{x}\,)^{2k-1}} \le \frac{e^x}{2k}\,,$$

protože každý z $2k$ výrazů ve jmenovateli je větší než 1. Je-li tedy $b \in (1, +\infty)$ a $x \in (1, b)$, je $0 \le g_k(x) \le e^b/2k$, což pro $k \to \infty$ konverguje k 0. Tím je dokázána *stejnoměrná konvergence* $f_k(x) \to \sqrt{x}$ *v každém omezeném intervalu* $(1, b)$.

Protože $g_k(x) \ge \sqrt[2k]{e^x} - \sqrt{x} \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ a každé k, *je konvergence nestejnoměrná v každém* $P(+\infty)$. [5])

Résumé. *Je-li* $I \subset \langle 0, +\infty)$, *konverguje posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *stejnoměrně v* I, *právě když je interval* I *(shora) omezený; funkce* $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ *je přitom rovna* 1 *v intervalu* $\langle 0, 1\rangle$ *a* $\sqrt{x}$ *v intervalu* $\langle 1, +\infty)$. *Konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\langle 0, +\infty)$.

Příklad 13.5. Je-li

$$(25) \qquad f_k(x) := \frac{x}{k} \lg \frac{x}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}_+\,,$$

je $f_k(x) \to 0$ pro $k \to \infty$ a všechna $x \in \mathbb{R}_+$ a také $f_k(x) \to 0$ pro $x \to 0+$ a každé $k \in \mathbb{N}$. Protože derivace

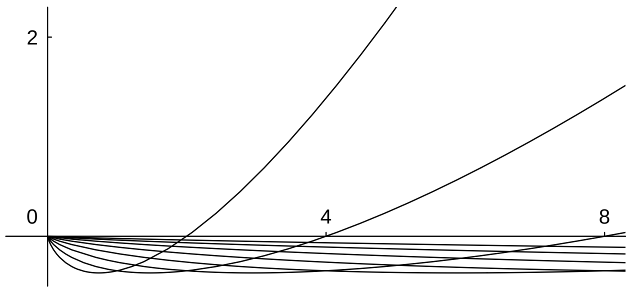
$$(26) \qquad f_k'(x) = \frac{1}{k}\Big(1 + \lg \frac{x}{k}\Big)$$

je rovna 0, právě když je $x = x_k := k/e$, a protože $f_k(x_k) = -1/e$, funkce f_k klesá v intervalu $(0, k/e\rangle$.

Je-li $a \in \mathbb{R}_+$, klesá funkce f_k v intervalu $(0, a\rangle$ pro všechna $k > ae$, takže pro tato k platí odhad

$$0 > f_k(x) \ge f_k(a) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (0, a\rangle\,.$$

Protože $f_k(a) \to 0$ pro $k \to \infty$, plyne z toho, že *posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně v každém intervalu* $(0, a\rangle$, *kde* $a \in \mathbb{R}_+$, *a tedy obecněji i v každém omezeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}_+$.



K Př. 13.5 : f_{2^k}, $0 \le k \le 8$

[5]) Z obrázku by to bylo patrné, kdybychom interval $\langle 0, 4\rangle$ nahradili např. intervalem $\langle 0, 20\rangle$.

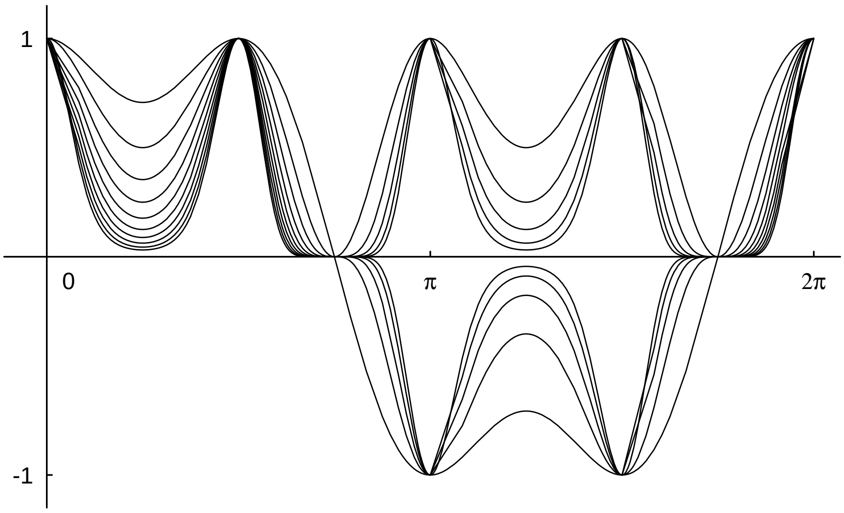
Obráceně, není-li interval $I \subset \mathbb{R}_+$ omezený, leží body x_k v I pro s.v. k, a protože $\lim_{k\to\infty} f_k \equiv 0$ v $\mathbb{R}_+$, zatímco $f_k(x_k) = -1/e$, *konvergence v I stejnoměrná není.*

Shrneme-li, vidíme, že *posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje v intervalu $I \subset \mathbb{R}_+$ stejnoměrně, právě když je tento interval omezený.* [6]) *V $\mathbb{R}_+$ je konvergence lokálně stejnoměrná.*

Příklad 13.6. Nechť

$$(27) \qquad f_k(x) := (g(x))^k\,, \ \text{kde } g(x) := \sin^3 x + \cos^3 x \ \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}\,;$$

protože tyto funkce jsou 2π-periodické, vyšetříme posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}$ nejdříve v intervalu $I := \langle 0, 2\pi\rangle$.



K Př. 13.6 : f_k, $1 \le k \le 10$

Derivace

$$(28) \qquad g'(x) = 3\sin x \cos x\,(\sin x - \cos x)$$

existuje všude v $\mathbb{R}$ a v I se rovná 0, právě když je x rovno některému z čísel 0, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, přičemž hodnoty funkce g v těchto bodech jsou po řadě 1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 1, -1, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, -1, 1. V intervalu I nabývá tedy funkce g svého maxima rovného 1 v bodech 0, $\frac{1}{2}\pi$, 2π a minima rovného -1 v bodech π, $\frac{3}{2}\pi$; v ostatních bodech $x \in I$ je $|g(x)| < 1$.

Z toho ihned plyne, že

[6]) Při takovéto formulaci výsledku již není třeba *explicite* dodávat, že konvergence není stejnoměrná v žádném $P(+\infty)$.

a) *posloupnost* $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *nemá limitu v bodech* $x = \pi$ *a* $x = \frac{3}{2}\pi$ *a má limitu* 1 *v bodech* $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 2\pi$; *v ostatních bodech* $x \in I$ *je limita rovna* 0 ;

b) *v žádném levém ani pravém (prstencovém) okolí bodů* $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ *není konvergence stejnoměrná* ;

c) *pro každé* $\delta \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ *existuje* $q \in (0,1)$ *tak, že* $|g(x)| < q$ *všude v množině*

$$I - (U(0,\delta) \cup U(\tfrac{1}{2}\pi,\delta) \cup U(\pi,\delta) \cup U(\tfrac{3}{2}\pi,\delta) \cup U(2\pi,\delta))\,; \tag{29}$$

z toho plyne, že v této množině je $|f_k| < q^k \to 0$, *takže konvergence* $f_k \to 0$ *je tam stejnoměrná.*

Úplná informace o bodové, stejnoměrné a nestejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}$ plyne z uvedených výsledků a z periodicity funkcí f_k:

A) $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje, právě když je* $\pi \not\equiv x \not\equiv \frac{3}{2}\pi \mod 2\pi$;

B) *v žádném levém ani pravém (prstencovém) okolí bodů* $x \equiv 0 \mod \frac{1}{2}\pi$ *není konvergence stejnoměrná* ;

C) *pro každé* $\delta \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ *existuje* $q \in (0,1)$ *tak, že* $|g(x)| < q$ *všude v množině*

$$\mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U(\tfrac{1}{2}k\pi, \delta)\,; \tag{29'}$$

v této množině je konvergence $f_k \to 0$ *stejnoměrná; konvergence je lokálně stejnoměrná v každém intervalu tvaru* $(\frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}(k+1)\pi)$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$, *tedy na množině* $\mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$.

* * *

V důkazech vět o stejnoměrné a lokálně stejnoměrné konvergenci řad komplexních funkcí hraje podstatnou roli příslušná **Bolzano–Cauchyho podmínka**: [7])

(30) *Pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* n_0 *tak, že* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in X \Rightarrow$
$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$.

Věta 13.12. (Bolzano–Cauchyho kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně v* X, *právě když platí podmínka* (30).

Důsledek. *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně v* X. *Pak je* $f_k \to 0$ *stejnoměrně v* X *a pro každou funkci* g *omezenou v* X *konverguje i řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g$ *stejnoměrně v* X.

Uveďme některá další kritéria stejnoměrné konvergence:

Věta 13.13. (Srovnávací kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Platí-li nerovnost* $|f_k(x)| \le g_k(x)$ *pro všechna* $x \in X$ *a všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a konverguje-li řada* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *stejnoměrně v* X, *platí totéž o řadách*

[7]) BC podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady je přímým důsledkem BC podmínky pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti, která zde není uvedena, protože ji (na rozdíl od podmínky pro řady) nebudeme nikde potřebovat. Čtenář ji jistě bude umět zkonstruovat sám; správnost svého výsledku pak může ověřit např. v [12] nebo v [27] (2. díl).

(31) $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\, f_k\,|\,.$$

S p e c i á l n ě : *Je-li* $|\, f_k(x)\,| \le c_k \in \mathbb{R}$ *pro všechna* $x \in X$ *a všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a je-li* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *konvergentní řada, konvergují obě řady (31) stejnoměrně v* X.

Poznámka 13.6. Je-li $|\, f_k\,| \le g_k$ (resp. $|\, f_k\,| \le c_k \in \mathbb{R}$) v X pro všechna $k \in \mathbb{N}$, říkáme, že $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ (resp. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$) je **majorantní řada** (stručněji: **majoranta**) řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (v X). $\square$

Srovnávací kritérium lze formulovat i jako *nutnou a postačující podmínku*:

Věta 13.13'. (Symetrická verze srovnávacího kritéria stejnoměrné konvergence řady.) *Nechť* $f_k : X \to \mathbb{C}$, $g_k : X \to \mathbb{C}$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a nechť existují konstanty* K_1, K_2 *tak, že je*

(32) $$0 < K_1 \le \left|\frac{f_k(x)}{g_k(x)}\right| \le K_2 < +\infty \quad \text{pro všechna } x \in X \text{ a všechna } k \in \mathbb{N}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, f_k\,|$ *konverguje stejnoměrně v* X, *právě když má tuto vlastnost řada* $\sum_{k=1}^{\infty} |\, g_k\,|$. $\square$

I když se srovnávací kritérium užívá ke zjištění stejnoměrné konvergence dosti často, je z jeho znění patrné, že je „dosti hrubé“ – nelze je užít např. v situacích, kdy první z řad (31) konverguje stejnoměrně, druhá ne. Následující tři věty jsou *jemnějšími kritérii* stejnoměrné konvergence.

Věta 13.14. (Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Nechť posloupnosti funkcí* $f_k : X \to \mathbb{C}$, $g_k : X \to \mathbb{R}$ *splňují tyto podmínky:*

(33′) $$\text{Pro každé } x \in X \text{ je } \; g_1(x) \ge g_2(x) \ge \ldots \ge g_k(x) \ge \ldots \ge 0\,,$$

(33″) $$g_k \to 0 \;\; \text{stejnoměrně v } X$$

a existuje $K \in \mathbb{R}_+$ *tak, že*

(34) $$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le K \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a všechna } x \in X\,.$$

Pak řada

(35) $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, g_k(x)$$

konverguje stejnoměrně v X.

Věta 13.15. (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *nechť je* $f_k : X \to \mathbb{C}$ *a* $g_k : X \to \mathbb{R}$, *přičemž nechť*

(36′) $$\text{posloupnost } \{g_k(x)\} \text{ je pro každé } x \in X \text{ monotónní}$$

a nechť existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x \in X\,,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow |g_k(x)| \leq K\,. \tag{36''}$$

Konverguje-li řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{37}$$

stejnoměrně v X, konverguje v X stejnoměrně i řada (35).

Věta 13.15'. (Symetrická verze Abelova kritéria stejnoměrné konvergence řady.) *Nechť $f_k : X \to \mathbb{C}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nechť posloupnosti funkcí $g_k : X \to \mathbb{R}$ a $h_k : X \to \mathbb{R}$ splňují tyto podmínky:*

$$\text{posloupnost } \left\{\frac{g_k(x)}{h_k(x)}\right\}_{k=1}^{\infty} \text{ je pro každé } x \in X \text{ monotónní} \tag{38'}$$

a existují čísla K_1, K_2 tak, že

$$x \in X\,,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < K_1 \leq \frac{g_k(x)}{h_k(x)} \leq K_2 < +\infty\,. \tag{38''}$$

Pak řada (35) *konverguje stejnoměrně v X, právě když tam stejnoměrně konverguje řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) h_k(x)\,. \tag{35'}$$

Definice. Jsou-li A a X množiny a je-li $f_\alpha : X \to \mathbb{C}$ pro každé $\alpha \in A$, říkáme, že funkce f_α, $\alpha \in A$, jsou **stejně omezené v** X, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že nerovnost $|f_\alpha(x)| \leq K$ platí pro všechna $x \in X$ a všechna $\alpha \in A$.

Poznámka 13.7. Ve V. 13.14 (resp. V. 13.15) tedy předpokládáme stejnou omezenost v X částečných součtů $\sum_{k=1}^{n} f_k$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (resp. funkcí g_k). Podmínku (38'') věty 13.14* bychom mohli popsat jako „stejnou omezenost funkcí g_k/h_k zdola i shora kladnými konstantami“. □

Podobně jako je tomu u číselných řad, užívá se Abelovo kritérium (a to hlavně jeho symetrická verze) ke zjednodušení členů řad, zatímco Dirichletovo kritérium se aplikuje zpravidla až na řadu dostatečně zjednodušenou.

Příklad 13.7. Pro každé $\alpha > 1$ konverguje podle V. 13.13 jak řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k!x)}{k^\alpha}\,,$$

tak i řada příslušných absolutních hodnot stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$; její majorantou je konvergentní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$.

Příklad 13.8. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,, \quad \text{kde } f_k(x) := x^k e^{-kx} \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_-$, konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_+^0$. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f_k'(x) = kx^{k-1}(1-x)$, protože se tato derivace v $\mathbb{R}_+$ rovná 0, právě když je $x = 1$, a protože $f_k(0) = f_k(+\infty-) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$, nabývá nezáporná funkce $f_k\,|\mathbb{R}_+^0$ v bodě 1 svého maxima. (Sr. s V.8.2.)

Konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ je tedy majorantou v $\mathbb{R}_+^0$ řady (39), která tam proto podle srovnávacího kritéria konverguje stejnoměrně.

Příklad 13.9$^{\mathbf{o}}$. Porovnejme stejnoměrnost konvergence řad o členech

$$f_k(x) := \frac{x}{1+k^2x^2} \quad \text{a} \quad g_k(x) := \frac{x^2}{1+k^2x^2}\,, \tag{40}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0)$ jsou nulové, tedy konvergentní; je-li $x \neq 0$, je

$$|\,f_k(x)\,| \le \frac{|\,x\,|}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2|\,x\,|} \quad \text{a} \quad 0 \le g_k(x) \le \frac{x^2}{k^2x^2} \le \frac{1}{k^2}\,. \tag{41}$$

Z toho plyne, že

$$\textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ konverguje v } \mathbb{R} \textit{ bodově, řada } \sum_{k=1}^{\infty} g_k \textit{ stejnoměrně.} \tag{42}$$

Z prvního odhadu je zároveň patrné, že $|\,x\,| \ge \delta > 0 \Rightarrow |\,f_k(x)\,| \le 1/k^2\delta$, takže (podle V.13.13)

$$\textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ konverguje stejnoměrně v } \mathbb{R} - U(0,\delta) \textit{ pro každé } \delta \in \mathbb{R}_+\,. \tag{42}$$

Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ nekonverguje stejnoměrně v žádném } P^+(0) \textit{ a v žádném } P^-(0)\,; \tag{43}$$

vzhledem k lichosti funkcí f_k stačí nestejnoměrnost konvergence dokázat jen pro intervaly tvaru $(0,\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$. K tomu stačí ověřit *neplatnost* příslušné BC podmínky, tj. *platnost* její negace, která zní:

(44) *Existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $x \in (0,\delta)$ *tak, že* $|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\,| \ge \varepsilon$.

V našem případě však platí dokonce toto silnější a konkrétnější tvrzení:

$$n > \frac{1}{2\delta} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2n} \in (0,\delta)\,, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) \ge \frac{1}{4}\,. \tag{45}$$

Z nerovnosti $k \le 2n$ totiž plyne, že $k/2n \le 1$, takže $1 + (k/2n)^2 \le 2$ a

$$f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n\,(1+(k/2n)^2)} \ge \frac{1}{4n}\,.$$

Résumé. Přes podobnost funkcí (40) se obory stejnoměrné konvergence příslušných řad podstatně liší: *Druhá řada konverguje stejnoměrně v* $\mathbb{R}$, *první konverguje stejnoměrně v intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *právě když není* $0 \in \overline{I}$, *takže její konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\mathbb{R} - \{0\}$ *a nestejnoměrná v každém* $P^+(0)$ *i v každém* $P^-(0)$.

Podstatný rozdíl v chování obou řad způsobil faktor x, kterým se $g_k(x)$ liší od $f_k(x)$ a který podstatně zmenšil hodnoty funkcí $g_k(x)$ v blízkosti počátku.

Poznámka 13.8. Jsou-li splněny předpoklady srovnávacího kritéria (V.13.13), konvergují obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k\,|$ stejnoměrně; někdy se v takové situaci říká, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje **absolutně stejnoměrně**. Poznamenejme, že v tvrzení V.13.13 by stačilo uvést, že stejnoměrně konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k\,|$, protože stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ pak již zaručuje BC kritérium.

Stejnoměrně konvergující řadu, pro niž řada příslušných absolutních hodnot diverguje, lze sestrojit velmi snadno. Čtenář, který by nebyl spokojen s neabsolutně konvergentní řadou o členech $f_k := (-1)^k/k$ (ačkoli je to zcela právoplatný příklad, protože konvergentní řady s konstantními členy nejsou „zakázány“ a konvergují samozřejmě stejnoměrně), může vyšetřit např. řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x)\,, \quad \text{kde } \; g_k(x) := \frac{\operatorname{arctg}(1+k^2x^2)}{k}\,,$$

která podle Abelova kritéria konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$, zatímco řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ příslušných absolutních hodnot všude v $\mathbb{R}$ diverguje, protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $g_k(x) \ge g_k(0) \ge \pi/4k$.

Může se však stát, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na nějaké množině X *konverguje absolutně i stejnoměrně, nikoli však absolutně stejnoměrně*; ukazuje to tento příklad:

Buďte f_k funkce z Př. 13.9, položme

$$h_{2k-1} := f_k\,, \quad h_{2k} := -f_k \;\text{ pro každé }\; k \in \mathbb{N} \tag{46}$$

a s_n resp. σ_n nechť je n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} |\,h_k\,|$. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak

$$s_{2n-1}(x) = f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}\,, \quad s_{2n} \equiv 0\,, \tag{47}$$

a protože nerovnosti $|\,f_n(x)\,| \le f_n(1/n) \le 1/2n$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$, je $s_n \to 0$ stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sigma_{2n-1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} |\, f_k \,| + |\, f_n \,|, \quad \sigma_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} |\, f_k \,|,$$

konverguje (podle toho, co jsme dokázali v Př. 13.9) řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, h_k \,|$ všude v $\mathbb{R}$, ale konvergence není stejnoměrná v žádném $P^+(0)$ a v žádném $P^-(0)$.

Příklad 13.10. Pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$ položme

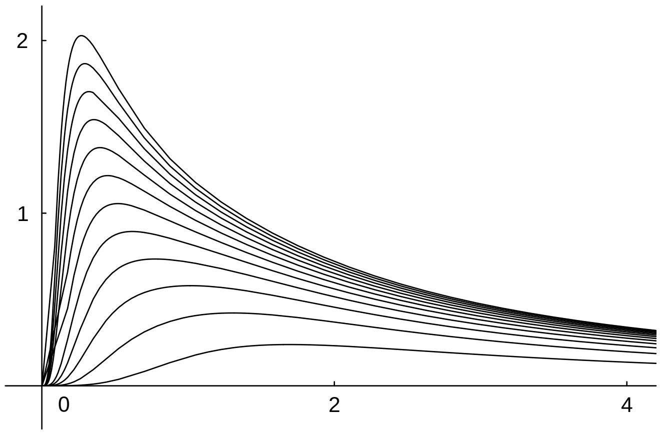
$$\lambda_k(x) := \arcsin^\alpha \frac{kx}{k^2x^2+1}, \quad \mu_k(x) := \lg^\beta\Big(1 + \frac{1}{k^2x^2}\Big), \quad f_k(x) := \frac{\lambda_k(x)}{\mu_k(x)} \tag{48}$$

a vyšetřme, jak je to se stejnoměrnou konvergencí řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ v $\mathbb{R}_+$.

Je-li $x \in \mathbb{R}_+$ (pevně zvoleno), je

$$\arcsin^\alpha \frac{kx}{k^2x^2+1} \asymp \frac{1}{k^\alpha}, \quad \lg^\beta\left(1 + \frac{1}{k^2x^2}\right) \asymp \frac{1}{k^{2\beta}}, \quad \text{tedy} \quad f_k(x) \asymp \frac{1}{k^{\alpha-2\beta}} \tag{49}$$

pro $k \to \infty$; podle 3. části V. 11.5 *řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje bodově v $\mathbb{R}_+$, právě když je $\alpha - 2\beta > 1$.*



K Př. 13.10 : $\sum_{k=1}^{n} f_k$, $\alpha = \frac{10}{3}$, $\beta = 1$, $1 \le n \le 12$

Protože $\lambda_k(1/k) = \arcsin^\alpha \frac{1}{2} = (\frac{1}{6}\pi)^\alpha$ a $\mu_k(1/k) = \lg^\beta 2$, není $f_k \to 0$ stejnoměrně v žádném $P^+(0)$, takže ani *řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ tam nekonverguje stejnoměrně.* (Sr. s V. 13.12.)

Je-li $\alpha - 2\beta \le 1$, nekonverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ani bodově; předpokládejme proto obrácenou nerovnost $\alpha - 2\beta > 1$ a dokažme, že *řada konverguje v každém intervalu $I(\delta) := \langle \delta, +\infty)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$, stejnoměrně.* Důkaz provedeme v několika krocích, v nichž budeme funkce λ_k a μ_k postupně zjednodušovat.

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ je

$$\arcsin \frac{kx}{k^2x^2+1} = \frac{\arcsin(\varphi(kx))}{\varphi(kx)}\, \psi(kx)\, \frac{1}{kx}\,, \tag{50'}$$

kde

$$\varphi(x) := \frac{x}{x^2+1}\,, \quad \psi(x) := \frac{x^2}{x^2+1}\,,$$

a snadno se ověří platnost těchto tvrzení:

1a. $\varphi(0+) = \varphi(+\infty-) = 0$, $\varphi'(x) \neq 0$, je-li $1 \neq x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}$; v důsledku toho φ roste v $(0, \frac{1}{2}\rangle$, klesá v $\langle \frac{1}{2}, +\infty)$ a $\varphi(\mathbb{R}_+) \subset (0, \frac{1}{2}\rangle$. (Sr. s V.8.2.)

1b. Funkce $\nu(y) := (\arcsin y)/y$ v intervalu $(0,1\rangle$ roste (sr. s Př. 7.6), takže pro každé y z intervalu $(0, \frac{1}{2}\rangle$ je $1 = \nu(0+) < \nu(y) \le \nu(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\pi$. Všechny hodnoty prvního zlomku na pravé straně (50′) leží tedy mezi čísly 1 a $\frac{1}{3}\pi$.

1c. Funkce ψ v $\mathbb{R}_+$ roste a v $+\infty$ má limitu 1; v důsledku toho je $\psi(\delta) \le \psi(x) < 1$ pro všechna $x \ge \delta$. Je-li $x \ge \delta$, je tím spíše $kx \ge \delta$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, takže všechny hodnoty funkce $\psi(kx)$ leží také mezi čísly $\psi(\delta) > 0$ a 1.

1d. Z tvrzení 1a–1c plyne, že pro všechna $x \in I(\delta)$ a $k \in \mathbb{N}$ leží hodnoty funkce $\nu(\varphi(kx))\,\psi(kx)$ mezi $\psi(\delta)$ a $\frac{1}{3}\pi$; protože všechny mocniny Id^α jsou monotónní, leží všechny hodnoty funkce $(\nu(\varphi(kx))\,\psi(kx))^\alpha$, která je podílem funkcí $\lambda_k(x)$ a $1/(kx)^\alpha$, mezi čísly $(\psi(\delta))^\alpha$ a $(\frac{1}{3}\pi)^\alpha$. Podle V.13.13′ konverguje řada $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ v $I(\delta)$ stejnoměrně, právě když to platí o řadě s členy $1/((kx)^\alpha \mu_k(x))$.

2. Pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$ je

$$\lg\Big(1 + \frac{1}{k^2x^2}\Big) = \omega(k^2x^2)\, \frac{1}{k^2x^2}\,, \quad \text{kde } \omega(x) := x \lg\Big(1 + \frac{1}{x}\Big), \tag{50''}$$

přičemž

$$\omega'(x) = \lg\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{1+x}\,, \quad \omega''(x) = -\frac{1}{x(1+x)^2}\,.$$

Z nerovnosti $\omega'' < 0$ v $\mathbb{R}_+$ plyne, že funkce ω' tam klesá; protože $\omega'(+\infty-) = 0$, je $\omega' > 0$ v $\mathbb{R}_+$, takže ω tam roste a totéž platí o funkci $\omega \circ \mathrm{Id}^2$. Je-li tedy $x \ge \delta$, je $\omega(x^2) \ge \omega(\delta^2)$; protože $\omega(+\infty-) = 1$, je navíc $\omega(x^2) < 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$. Je-li $x \ge \delta$, je $kx \ge \delta$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, takže $\omega(\delta^2) \le \omega(k^2x^2) \le 1$; protože každá mocnina Id^β je monotónní, leží pak všechny hodnoty funkce $(\omega(k^2x^2))^\beta$, která je podílem funkcí $\mu_k(x)$ a $1/(kx)^{2\beta}$, mezi čísly $(\omega(\delta^2))^\beta > 0$ a 1.

3. Podle 1d a V.13.13′ konverguje tedy řada $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ stejnoměrně v $I(\delta)$, právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^\infty (kx)^{2\beta}/(kx)^\alpha = \sum_{k=1}^\infty 1/(kx)^{\alpha-2\beta}$. Protože tato řada má v $I(\delta)$ konvergentní majorantu $\sum_{k=1}^\infty 1/k^{\alpha-2\beta}\delta^{\alpha-2\beta}$, konverguje tam stejnoměrně; tím je důkaz dokončen.

Résumé. *Je-li $\alpha - 2\beta > 1$, konverguje řada $\sum_{k=1}^\infty f_k$ v intervalu $J \subset \mathbb{R}_+$ stejnoměrně, právě když je $0 \notin \overline{J}$; v $\mathbb{R}_+$ je pak její konvergence lokálně stejnoměrná. Je-li $\alpha - 2\beta \le 1$, řada všude v $\mathbb{R}_+$ diverguje.* (Viz obrázek, v němž je zakresleno prvních 12 částečných součtů řady s $\alpha = \frac{10}{3}$, $\beta = 1$.)

Příklad 13.11. Předpokládejme, že $\alpha \in \mathbb{R}$, a dokažme některé vlastnosti řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}\,. \tag{51}$$

1. *Je-li $\alpha > 1$, konvergují řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k^\alpha}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos kx|}{k^\alpha} \tag{51'}$$

(a tedy i řady (51)) stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

2. *Je-li $\alpha \in (0,1\rangle$, konverguje první z řad (51) všude v $\mathbb{R}$, přičemž konvergence je neabsolutní pro každé $x \not\equiv 0 \bmod \pi$. Druhá z řad konverguje, a to neabsolutně, v $\mathbb{R} - \{2m\pi;\, m \in \mathbb{Z}\}$. Pro $x \equiv 0 \bmod \pi$ je první řada v (51) řadou nulovou; druhá řada je v bodech $x \equiv \pi \bmod 2\pi$ alternující (a má tedy konečný součet), zatímco její součet v bodech $x \equiv 0 \bmod 2\pi$ je $+\infty$.*

Obě řady konvergují stejnoměrně na každé množině tvaru

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \langle 2m\pi + \delta, 2(m+1)\pi - \delta \rangle\,, \tag{52}$$

kde $\delta \in (0,\pi)$; na množině $\mathbb{R} - \{2m\pi;\, m \in \mathbb{Z}\}$ konvergují lokálně stejnoměrně. V žádném (pravém, levém, oboustranném) okolí žádného bodu $2m\pi$, kde $m \in \mathbb{Z}$, není konvergence stejnoměrná.

3. *Je-li $\alpha \le 0$, konverguje první z řad (51), právě když je $x \equiv 0 \bmod \pi$ (kdy je řadou nulovou), zatímco druhá z řad (51) všude v $\mathbb{R}$ diverguje.*

Připomeňme, že pro každé číslo $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí identity

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin(\frac{1}{2}nx)\sin(\frac{1}{2}(n+1)x)}{\sin\frac{1}{2}x}\,, \tag{53}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(\frac{1}{2}nx)\cos(\frac{1}{2}(n+1)x)}{\sin\frac{1}{2}x} \tag{54}$$

(viz (46) v kap. 11). Z nich ihned plyne, že

(55) *pro každé $\delta \in (0,\pi)$ jsou součty (53) a (54) stejně omezené v množině* $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \langle 2m\pi + \delta, 2(m+1)\pi - \delta \rangle$,

protože v této množině platí nerovnost $|\sin\frac{1}{2}x| \ge \sin\frac{1}{2}\delta$ a absolutní hodnota čitatelů obou zlomků vpravo není větší než 1.

Ad 1. Toto tvrzení plyne ihned ze srovnávacího kritéria, protože $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^\alpha)$ je konvergentní číselná majoranta obou řad.

Ad 2. Protože první část tvrzení jsme dokázali již v prvním dílu této učebnice (viz Př. 11.5), věnujme se stejnoměrné konvergenci.

Stejnoměrnost konvergence řad (51) (na uvedených množinách) plyne z (55) a z Dirichletova kritéria, protože (číselná) posloupnost $\{1/k^\alpha\}$ je monotónní a má limitu 0.

Nestejnoměrnost konvergence dokážeme pro první z řad (51) nejdříve v intervalu $(0,\delta)$, kde $0<\delta<\frac{1}{2}\pi$, a to pomocí negace příslušného BC kritéria:

Je-li $n\in\mathbb{N}$, $x_n := \delta/3n$, $n<k\le 2n$, je $\frac{1}{3}\delta < kx_n \le \frac{2}{3}\delta < \delta$ a

$$(56_1)\qquad \Big|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx_n}{k^\alpha}\Big| = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx_n}{k^\alpha} \ge \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin\frac{1}{3}\delta}{k} \ge \frac{n\sin\frac{1}{3}\delta}{2n} = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{3}\delta\,.$$

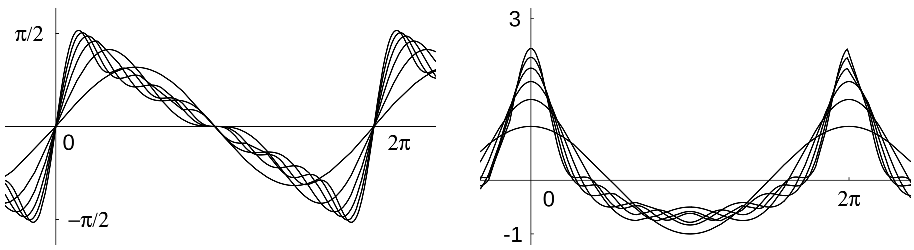
Pro levá okolí bodu 0 je důkaz analogický, protože sinus je lichá funkce; protože je 2π-periodická, je konvergence v okolích sudých násobků čísla π stejná jako v okolích nuly.

Pro součty s kosinem je situace dokonce jednodušší: Je-li $n>\pi/6\delta$, $x_n := \pi/6n$, $n<k\le 2n$, je $\frac{1}{6}\pi = nx_n < kx_n \le 2nx_n = \frac{1}{3}\pi$, takže $\cos kx_n \ge \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ a

$$(56_2)\qquad \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\cos kx_n}{k^\alpha} \ge \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k} \ge \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{4n} = \tfrac{1}{4}\,;$$

protože kosinus je sudá funkce, dostáváme pro $x_n = -\pi/6n$ stejné odhady. Druhá z řad (51) tedy nekonverguje stejnoměrně v žádném $P^+(0)$ a v žádném $P^-(0)$; obdobná tvrzení o okolích všech sudých násobků čísla π plynou z 2π-periodicity kosinu.

Ad 3. Tvrzení plynou ihned z toho, že *pro žádné* $x\not\equiv 0 \bmod \pi$ *není* $\sin kx\to 0$ *a pro žádné* $x\in\mathbb{R}$ *není* $\cos kx \to 0$. (Důkaz: Kdyby bylo $\cos kx\to 0$, měla by vybraná posloupnost o členech $\cos 2kx = 2\cos^2 kx - 1$ limitu -1, což je spor. Je-li $\sin kx \to 0$, je $\cos 2kx = 1-2\sin^2 kx \to 1$, $\cos(2k+1)x = \cos 2kx\cos x - \sin 2kx \sin x \to \cos x$ a $1\equiv \sin^2(2k+1)x + \cos^2(2k+1)x \to \cos^2 x$; z rovnosti $\cos^2 x = 1$ plyne, že $x\equiv 0 \bmod \pi$.)



K Př. 13.11: Prvních 6 částečných součtů řad (51) s $\alpha = 1$

* * *

Závěrem se vraťme k mocninným řadám; i když jsou nenahraditelným nástrojem komplexní analýzy, lze jejich jednoduché vlastnosti využít i v reálné analýze. (Viz např. Dodatek ke kap. 11 a kap. 18, kde se pomocí nich řeší diferenciální rovnice.)

Příklad 13.12. V Př. 11.8 jsme (pomocí d'Alembertova kritéria) dokázali, že *řady*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

které v komplexním oboru definují po řadě funkce $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$, *konvergují pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, *a mají tedy poloměr konvergence rovný* $+\infty$.

Na rozdíl od toho konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,z^k$ jen v bodě 0 (protože jinak nemá její k-tý člen limitu 0), a má tedy poloměr konvergence rovný 0.

Příklad 13.13. *Pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$ *má mocninná řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\alpha} \tag{57}$$

poloměr konvergence rovný 1.

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ je totiž $\sqrt[k]{|z^k|/k^\alpha} = |z|/(\sqrt[k]{k})^\alpha$, což má pro $k \to \infty$ limitu rovnou $|z|$. Podle Cauchyho kritéria řada (57) konverguje, je-li $|z| < 1$, a diverguje, je-li $|z| > 1$. Tím je tvrzení dokázáno.

Zcela analogicky dokážeme, že *řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{a^k\,k^\alpha} \tag{58}$$

má pro každé $a \in \mathbb{C}$ *různé od nuly poloměr konvergence rovný* $|a|$.

Poznámka 13.9. Na řadách tvaru (57) lze ukázat, že *není náhodné, že* V. 13.9 *neobsahuje žádnou informaci o konvergenci řady pro případ, že* $|z - \zeta| = R$; *obecně totiž za této situace nelze o konvergenci nic říci*:

Je-li $\alpha = 2$, je konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ majorantou řady (57) pro všechna z, pro něž je $|z| \le 1$; řada tedy konverguje (absolutně stejnoměrně) v celém uzávěru jednotkového kruhu $\mathcal{U}$ (který je kruhem konvergence *všech* řad (57)).

Je-li $\alpha = 0$ a $|z| = 1$, nemá k-tý člen řady (57) limitu 0, takže řada diverguje v každém bodě hranice kruhu $\mathcal{U}$.

Je-li konečně $\alpha = 1$, lze body z, pro něž je $|z| = 1$, napsat ve tvaru $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, kde $t \in \mathbb{R}$, takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$$

a řada vlevo konverguje, právě když konvergují obě řady vpravo. Protože podle Př. 13.10 obě konvergují, právě když je $t \not\equiv 0 \bmod 2\pi$, řada (57) konverguje pro všechna $z \in \partial\mathcal{U}$ s výjimkou bodu 1; v něm má reálná část řady součet $+\infty$, imaginární část součet 0. □

I když obecná věta V. 13.9 nezaručuje konvergenci řady (8) v žádném hraničním bodě jejího kruhu konvergence, má konvergence v takovém bodě důležitý důsledek pro stejnoměrnou konvergenci řady (8), a tedy i pro spojitost jejího součtu:

Věta 13.16. (Abelova věta.) *Má-li řada* (8) *poloměr konvergence* $R \in \mathbb{R}_+$ *a konverguje-li v některém bodě tvaru* $\zeta + Re^{it}$*, kde* $t \in \mathbb{R}$*, konverguje stejnoměrně na uzavřené úsečce* $\{\zeta + re^{it}\,;\, 0 \le r \le R\}$ *s krajními body* ζ*,* $\zeta + Re^{it}$*; součet řady je pak na této úsečce spojitý.*

* * *

Mezi nejdůležitější mocninné řady patří tzv. *Taylorovy řady*, které úzce souvisí s *Taylorovými polynomy*; předpoklady, za nichž lze danou funkci rozvinout v Taylorovu řadu, jsou dobrou ilustrací markantních rozdílů mezi reálnou a komplexní analýzou. Definice je v obou případech *formálně* stejná:

Je-li funkce f definována v jistém okolí bodu ζ a má-li v bodě ζ derivace všech řádů, nazýváme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\,(z-\zeta)^k \tag{59}$$

Taylorovou řadou funkce f **o středu** ζ; pro každé $n \ge 0$ je

$$R_{n+1}(z) := f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\,(z-\zeta)^k \tag{60}$$

tzv. **zbytek po** n**-tém členu** této řady. **Reálnou Taylorovou řadou** budeme rozumět řadu (59) za dodatečných předpokladů, že f je reálná funkce reálné proměnné, že $\zeta \in \mathbb{R}$ a že derivace jsou „podle reálné proměnné“; o **komplexní Taylorově řadě** budeme mluvit v případě, že f je komplexní funkce komplexní proměnné, $\zeta \in \mathbb{C}$ a derivace v (59) jsou „podle komplexní proměnné“. Slovo okolí bude v prvním případě znamenat okolí v $\mathbb{R}$, ve druhém případě to bude okolí v $\mathbb{C}$.

Poznamenejme, že *v definici Taylorovy řady se nepředpokládá nic o její konvergenci* a že na pravé straně (60) se od $f(z)$ odečítá n-**tý Taylorův polynom** (funkce f o středu ζ), který je n-tým částečným součtem Taylorovy řady (za předpokladu, že tato řada existuje).

Poznámka 13.10. Nechť $\zeta \in \mathbb{R}$, nechť f je definována v jistém okolí $U(\zeta)$ (v $\mathbb{C}$) bodu ζ a nechť je reálná v okolí $U(\zeta) \cap \mathbb{R}$ bodu ζ na reálné ose. Protože z existence derivace $f^{(k)}(\zeta)$ podle komplexní proměnné plyne existence analogické derivace podle reálné proměnné (a rovnost obou derivací), je zřejmé, že *za uvedených předpokladů plyne z existence komplexní Taylorovy řady funkce* f *o středu* ζ *existence příslušné reálné Taylorovy řady, přičemž obě řady mají pak stejné koeficienty*.

Obrácené tvrzení však neplatí, protože např. funkce (sr. s Cv. 5.69)

$$f(z) := \left\{ \begin{matrix} \exp(-z^{-2}) & \text{pro } z \ne 0 \\ 0 & \text{pro } z = 0 \end{matrix} \right\} \tag{61}$$

má v bodě 0 (nulové) derivace všech řádů podle reálné proměnné, ale vzhledem k $\mathbb{C}$ není v bodě 0 spojitá (protože její limita v bodě 0 vzhledem k imaginární ose je rovna $+\infty$), takže derivace (kladných řádů) podle komplexní proměnné nemá.

Z příkladu je zároveň patrné, že *existence derivací všech řádů podle reálné proměnné všude v* $\mathbb{R}$ *<u>není</u> postačující podmínkou možnosti rozvoje dané funkce v Taylorovu řadu: Reálnou Taylorovu řadu funkce* (60) *lze sice napsat, ale protože je to řada nulová, není její součet roven* $f(z)$ v *žádném bodě* $z \neq 0$. $\square$

Přímo z definice součtu řady (jako limity jejích částečných součtů) plyne, že

(62) *Taylorova řada* (59) *má v bodě* z *součet* $f(z)$, *právě když je* $R_{n+1}(z) \to 0$ *pro* $n \to \infty$.[8])

Reálná analýza se proto musí zabývat otázkou, jak tuto podmínku v konkrétních případech dokázat (nebo vyvrátit); u řady důležitých funkcí lze podmínku (62) dokázat, přepíšeme-li zbytek jedním ze způsobů uvedených v této větě:

Věta 13.17. *Nechť* ζ *a* $\zeta' \neq \zeta$ *jsou reálná čísla, nechť* $n \geq 0$ *je celé číslo a nechť* f *je reálná funkce reálné proměnné, která má v každém bodě uzavřeného intervalu* I *s krajními body* ζ, ζ' (*konečné*) *derivace až do řádu* $n+1$ *včetně. Pak existují čísla* $\xi \in \operatorname{int} I$, $\eta \in \operatorname{int} I$ *tak, že*

$$R_{n+1}(\zeta') = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(\zeta' - \zeta)^{n+1}, \tag{63}$$

$$R_{n+1}(\zeta') = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}\,(\zeta' - \eta)^{n}\,(\zeta' - \zeta). \quad \square \tag{64}$$

(63) a (64) jsou po řadě přepisy zbytku v **Lagrangeově** a v **Cauchyho tvaru**.

Poznámka 13.11. Pomocí (63)–(64) lze mj. dokázat (viz [10] nebo [27], 1. díl), že *pro všechna* $z \in \mathbb{R}$ *je*

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{65}$$

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{66}$$

že pro všechna $x \in (-1, 1\rangle$ *resp.* $x \in \langle -1, 1)$ *je*

$$\lg(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \quad \textit{resp.} \quad \lg(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \tag{67}$$

a že pro všechna $z \in (-1, 1)$ *a všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$ *platí identita*

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k. \tag{68}$$

---

[8]) Někteří autoři čtenářům bohužel sugerují, že (62) je závažné tvrzení, a nazývají je Taylorovou *větou*. Na rozdíl od *triviálního* výroku (62) je pro reálnou analýzu *skutečně velmi důležitá* např. věta 13.17, která v řadě důležitých případů dovoluje podmínku $R_{n+1}(z) \to 0$ ověřit.

Mocninné řady na pravých stranách identit (65) a (66) mají poloměr konvergence rovný $+\infty$, zatímco poloměr konvergence řad v (67) je roven 1. Je-li α nezáporné celé číslo, obsahuje řada v (68) jen konečný počet nenulových sčítanců a má poloměr konvergence $+\infty$; jinak je její poloměr konvergence roven 1. $\square$

Zatímco v reálném oboru je možnost rozvoje funkce v Taylorovu řadu dána podmínkou (62), jejíž ověření není vždy snadné, je v komplexním oboru situace *nesrovnatelně jednodušší*; příslušné tvrzení je založeno na tomto základním pojmu komplexní analýzy:

Definice. Říkáme, že komplexní funkce f komplexní proměnné je **holomorfní** v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, má-li v každém bodě $z \in \Omega$ derivaci podle komplexní proměnné.

Věta 13.18. *Je-li funkce f holomorfní v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, má v každém bodě $z \in \Omega$ derivace všech řádů.*[9]) *Je-li $K(\zeta, R) \subset \Omega$ (pro jisté $R > 0$), je*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}(z-\zeta)^k \quad \text{pro všechna} \quad z \in K(\zeta, R). \tag{69}$$

Dodatek. *Konverguje-li mocninná řada v kruhu $K(\zeta, R)$, je v tomto kruhu Taylorovou řadou svého součtu. Jinými slovy:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\zeta)^k \ \text{ v } K(\zeta, R) \ \Rightarrow \ a_k = \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} \quad \text{pro všechna} \ k \geq 0. \tag{70}$$

Poznámka 13.12. V komplexním oboru tedy platí tvrzení v reálném oboru zcela neslýchané: *Z existence první derivace (v otevřené množině) plyne existence derivací všech řádů.* Kromě toho je patrné, že *při rozvádění funkce v mocninnou řadu není nutné zabývat se zbytkem R_{n+1}*, protože v kruhu, v němž je funkce holomorfní, zbytek automaticky konverguje k nule.[10])

Poznámka 13.13. Víme (viz V. 11.17), že *Cauchyho součin dvou absolutně konvergentních řad se součty s a t je absolutně konvergentní řada, jejíž součet je roven st.* Protože mocninné řady konvergují ve svých kruzích konvergence absolutně, platí:

Cauchyho součin dvou mocninných řad, které mají v kruzích $K(\zeta, R_1)$, $K(\zeta, R_2)$ součty $f(z)$, $g(z)$, je Taylorovou řadou součinu $f(z)g(z)$ v kruhu $K(\zeta, \min(R_1, R_2))$. Podobné tvrzení platí i pro reálné Taylorovy řady; kruhy je však třeba nahradit jejich průniky s $\mathbb{R}$.

To umožňuje napsat Taylorovu řadu funkce, která je součinem dvou funkcí, jejichž Taylorovy řady známe, bez počítání jejích derivací:

---

[9]) Samozřejmě podle komplexní proměnné.

[10]) Zcela na místě je otázka, jak je to možné, když definice derivace podle reálné a komplexní proměnné jsou formálně zcela identické. Odpověď: I když jsou formálně identické, je ve skutečnosti existence derivace podle komplexní proměnné v (neprázdné) otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ podmínkou *nesrovnatelně* silnější, než je např. existence derivace podle reálné proměnné v intervalu. Podstatu věci čtenáři odhalí až studium komplexní analýzy, při němž se seznámí i s důkazy vyslovených tvrzení.

Příklad 13.14. Podle (65) a (67) je

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \ \text{ v } \mathbb{R}, \quad \lg(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \ \text{ v } (-1,1); \tag{71}$$

z toho plyne, že Taylorovou řadou (o středu 0) funkce $e^x \lg(1-x)$ je řada

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^j x^k}{j!\,k} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{kde } c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k}, \tag{72}$$

konvergující absolutně v intervalu $(-1,1)$.[11]) Pro úplnost dodejme, že je

$$c_1 = 1,\ c_2 = \tfrac{3}{2},\ c_3 = \tfrac{4}{3},\ c_4 = 1,\ c_5 = \tfrac{89}{120},\ c_6 = \tfrac{83}{144},\ c_7 = \tfrac{593}{1260}, \ldots . \tag{73}$$

Příklad 13.15. Z identity

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \tag{74}$$

platné v intervalu $(-1,1)$ plyne integrací (sr. s V.13.11) v témž intervalu identita

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}; \tag{75}$$

aditivní konstantu c jsme (vpravo) nenapsali, protože hodnota v bodě 0 obou stran napsané identity je 0, takže i $c = 0$. Tím jsme získali Taylorův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$, aniž bylo nutné počítat derivace této funkce v bodě 0 (což by mohlo narazit na značné potíže, pokud bychom nenašli např. nějakou rekurentní relaci).

Pro $x = \pm 1$ je na pravé straně (75) alternující řada $\pm\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)$, která podle Leibnizova kritéria konverguje. Podle Abelovy věty 13.16 konverguje tedy řada na pravé straně (75) v celém intervalu $\langle -1,1\rangle$ stejnoměrně a její součet je tam spojitý; protože levá strana identity (75) je v tomto intervalu také spojitá, identita platí v celém $\langle -1,1\rangle$.

Utvoříme-li Cauchyho součin řady ze (75) se sebou samou, dostaneme Taylorovu řadu funkce $\operatorname{arctg}^2 x$ v intervalu $(-1,1)$:

$$\operatorname{arctg}^2 x = \Big(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}, \tag{76}$$

kde

$$c_n := (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2n-2k-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1} \tag{77}$$

[11]) Dva za sebou napsané znaky součtu (tak jako na začátku řádky (72)) se často užívají místo znaku pro zobecněnou řadu, v níž by se v našem případě sčítalo přes všechny dvojice (j,k), kde $j \ge 0$ a $k \ge 1$ jsou celá čísla.

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, protože

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2n-2k-1)} = \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n-2k-1}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}\,.$$

Platnost (76) je zatím zaručena jen v intervalu $(-1,1)$, protože s Cauchyho součinem lze bezpečně pracovat jen v případě, že aspoň jedna z řad je absolutně konvergentní (viz V.11.16 a Cv.11.100). Čtenář však může sám dokázat, že posloupnost $\{|c_n|\}_{n=1}^{\infty}$ klesá a její n-tý člen není větší než $1/\sqrt{n}$; podle Leibnizova kritéria tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}$ konverguje i v bodech ± 1. Platnost (76) v celém uzavřeném intervalu $\langle -1, 1\rangle$ se tedy dokáže podobně jako platnost (75).

Pro ilustraci ještě dodejme, že šestý částečný součet řady (76) (neboli dvanáctý a třináctý Taylorův polynom funkce $\operatorname{arctg}^2 x$ o středu 0) je roven

$$x^2 - \frac{2}{3}\,x^4 + \frac{23}{45}\,x^6 - \frac{44}{105}\,x^8 + \frac{563}{1575}\,x^{10} - \frac{3254}{10395}\,x^{12}\,. \tag{78}$$

* * *

Vraťme se nyní k „obyčejným" řadám funkcí a ilustrujme užití Abelova a Dirichletova kritéria stejnoměrné konvergence tímto příkladem:

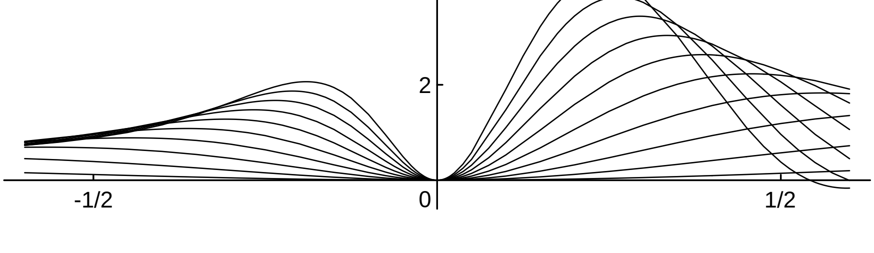
Příklad 13.16. Vyšetřme stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, kde

$$f_k(x) := \frac{e^{kx}}{e^{kx}+1}\,\operatorname{arctg} kx\,\sqrt{\operatorname{arccotg} kx}\,\sin kx\,. \tag{79}$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$ je nulová řada, budeme se v dalším zabývat jen konvergencí v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$. Všimněme si především, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$f_k\Big(\frac{1}{k}\Big) = \frac{e\sqrt{\pi^3}\,\sin 1}{8\,(e+1)}\,,\quad f_k\Big(-\frac{1}{k}\Big) = \frac{\sqrt{3\pi^3}\,\sin 1}{8\,(e+1)}\,; \tag{80}$$

protože není $f_k(\pm 1/k) \to 0$, nekonverguje posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ k nule stejnoměrně v žádném $P^+(0)$ a v žádném $P^-(0)$, a totéž proto platí i o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.



K Př. 13.16 : $\sum_{k=1}^{n} f_k$, $1 \le n \le 10$

Buď $I \subset \mathbb{R}_+$ libovolný interval s počátečním bodem $\delta \in \mathbb{R}_+$. Než začneme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ vyšetřovat v I, položme pro větší přehlednost a stručnost

$$a_k(x) := \frac{e^{kx}}{e^{kx}+1}\,, \quad b_k(x) := \operatorname{arctg} kx\,, \quad c_k(x) := \sqrt{\operatorname{arccotg} kx}\,. \tag{81}$$

Čtenář snadno zjistí, že všechny funkce $a_k(x)$ v $\mathbb{R}$ rostou, že jejich hodnoty pro $x \ge 0$ leží mezi $a_k(0) = \frac{1}{2}$ a $a_k(+\infty-) = 1$ a že pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ je i posloupnost $\{a_k(x)\}$ rostoucí. Podle symetrické verze Abelova kritéria (tj. podle V. 13.15′, v níž položíme $g_k = a_k$, $h_k \equiv 1$) lze tedy funkce $a_k(x)$ z $f_k(x)$ „vynechat“ v tom smyslu, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje v I stejnoměrně, právě když má tuto vlastnost řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)\, c_k(x) \sin kx$.

Z podobných důvodů lze vynechat i funkce $b_k(x)$: Jejich hodnoty pro $x \in I$ leží mezi $\operatorname{arctg} \delta > 0$ a $\frac{1}{2}\pi$ a posloupnost $\{g_k(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ rostoucí.

Protože funkce $\varphi(x) := x \operatorname{arccotg} x$ v $\mathbb{R}$ roste a protože má v bodě $+\infty$ limitu 1, platí implikace $x \in I \Rightarrow \varphi(\delta) \le \varphi(x) < 1$. Protože $x \in I \Rightarrow kx \in I$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je i $\varphi(\delta) \le \varphi(kx) < 1$ a $\sqrt{\varphi(\delta)} \le \sqrt{\varphi(kx)} = \sqrt{kx}\, c_k(x) < 1$; navíc je posloupnost $\{\varphi(kx)\}$ rostoucí. Podle V. 13.15′ lze tedy v I funkce $c_k(x)$ nahradit funkcemi $1/\sqrt{kx}$.

Shrneme-li dosavadní výsledky, vidíme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje v I stejnoměrně, právě když má tuto vlastnost řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{kx}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}\,. \tag{82}$$

Podle Př. 13.10 však řada vpravo konverguje v I stejnoměrně, právě když $\overline{I}$ neobsahuje žádný celý násobek čísla 2π, tj. když je $\overline{I} \subset (2(m-1)\pi, 2m\pi)$ pro vhodné $m \in \mathbb{N}$. Potom však je $1/\sqrt{x}$ funkce omezená v I dvěma kladnými konstantami, takže řada vlevo konverguje stejnoměrně v I, právě když to platí pro řadu vpravo. [12]) Konvergence je lokálně stejnoměrná v $\mathbb{R}_+ - \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{2m\pi\}$ a zřejmě neabsolutní – proto bylo třeba užít jemnější Abelovo kritérium.

Vyšetření konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ v $\mathbb{R}_-$ bude daleko snadnější, protože „dominantní vliv“ tam má funkce e^{kx}. Je-li totiž $x \le -\delta < 0$, platí relace

$$|\, f_k(x)\,| \le e^{-k\delta} \cdot \tfrac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi^3}\, e^{-k\delta}\,;$$

protože geometrická řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\delta}$ konverguje, konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ absolutně stejnoměrně v (každém) intervalu $(-\infty, -\delta\rangle$ a obecněji ovšem v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}_-$, jehož koncovým bodem není 0. Konvergence je lokálně stejnoměrná v $\mathbb{R}_-$; vzhledem k tomu, že je absolutní, mohli jsme užít hrubší srovnávací kritérium.

* * *

[12]) Tvrzení, že *ani stejnoměrná, ani nestejnoměrná konvergence řady se nezmění, vynásobíme-li všechny její členy (jednou a touž) funkcí omezenou na příslušné množině dvěma kladnými čísly*, plyne ihned z důsledku V. 13.12.

Řešení některých obyčejných diferenciálních rovnic tvaru $Ly = 0$ lze (v reálném i v komplexním oboru) hledat ve tvaru mocninné řady; postup má v případě, že koeficienty rovnice jsou jednoduchými kombinacemi celých mocnin nezávislé proměnné z a že hledáme řešení v okolí 0, zpravidla tyto kroky:

1) Předpokládáme existenci řešení ve tvaru mocninné řady tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ s kladným poloměrem konvergence R.

2) Derivováním člen po členu vypočteme všechny potřebné derivace, dosadíme je do rovnice a výsledek uspořádáme podle mocnin z; protože podle důsledku V.13.10 musí být koeficienty u všech mocnin z^k rovny nule, získáme nekonečně mnoho rovnic pro koeficienty a_k.

3) Po jejich vyřešení *ověříme, zdali mocninná řada s vypočítanými koeficienty má opravdu kladný poloměr konvergence*, protože teprve pak máme zaručeno, že jsme našli řešení, a víme též kde. Nemají-li rovnice řešení nebo nemá-li výsledná řada kladný poloměr konvergence, neuspěli jsme – pravděpodobně proto, že rovnice řešení v navrženém tvaru nemá.

Příklad 13.17. Zkusme v komplexním oboru najít řešení rovnice

$$w'' + zw' + w = 0 \tag{83}$$

ve tvaru

$$w(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{84}$$

kde $a_k \in \mathbb{C}$ jsou (zatím) neznámá čísla.[13])

Předpokládejme, že řada (84) má poloměr konvergence $R > 0$; v $K(0,R)$ pak je

$$zw'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k, \; w''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} z^k. \tag{85}$$

Dosadíme-li právě získané výsledky do (83), dostaneme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + (k+1) a_k] z^k, \tag{86}$$

která má nulový součet, právě když jsou koeficienty u všech mocnin z rovny nule, tj. právě když je

$$(k+2) a_{k+2} + a_k = 0 \; \text{ pro všechna } \; k \geq 0. \tag{87}$$

[13]) Soustavnější informace o diferenciálních rovnicích najde čtenář až v kapitole 18; abychom však objasnili důvod, proč hledáme dvě lineárně nezávislá řešení, prozraďme již nyní, že u lineární rovnice 2. řádu s nulovou pravou stranou (což je náš případ) je množina všech řešení totožná s množinou všech lineárních kombinací dvou lineárně nezávislých řešení. „Řešit“ rovnici znamená najít *všechna* její řešení.

Při volbě $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ plyne z rekurentních vztahů (87), že

$$a_0 = 1\,,\ a_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!!}\,,\ a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{1}{4!!}\,,\ \ldots\,,\ a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!}\,,\ldots \tag{88}$$

a že $a_{2k+1} = 0$ pro všechna $k \geq 0$.

Položíme-li naopak $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, bude

$$a_1 = 1\,,\ a_3 = -\frac{a_1}{3} = -\frac{1}{3!!}\,,\ \ldots\,,\ a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!}\,,\ldots \tag{89}$$

a $a_{2k} = 0$ pro všechna $k \geq 0$.

Jak snadno zjistíme d'Alembertovým kritériem, konvergují obě řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!!}\,,\quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!!} \tag{90}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, takže jejich poloměr konvergence je $+\infty$ a jejich součty $w_1(z)$, $w_2(z)$ jsou řešení rovnice (79) všude v $\mathbb{C}$. Protože první z funkcí je sudá, druhá lichá, je jejich lineární nezávislost zřejmá.

Podle toho, co jsme uvedli v poznámce [12]) pod čarou, je funkce w řešením rovnice (83) v $\mathbb{C}$, právě když je

$$w(z) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!!} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!!}\,, \tag{91}$$

kde c_1, c_2 jsou komplexní čísla.

Cvičení

A. Vyšetřte stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $f_k(x)$ v určeném oboru. [14]) Pro stručnost značíme

$$\mathbb{R}_+^0 := \langle 0, +\infty)\,,\quad J := \langle -1, 1\rangle\,,\quad J^* := (-1, 1)\,; \tag{92}$$

není-li obor uveden, rozumí se jím $\mathbb{R}$.

13.01$^\mathbf{o}$. $(x^2-1)^k$

13.02$^\mathbf{o}$. $x^k(1-x^2)$ v J

13.03$^\mathbf{o}$. $x^k - x^{3k}$ v J

13.04$^\mathbf{o}$. $k^2x^k(1-x^2)^k$ v J

13.05$^\mathbf{o}$. $\dfrac{2kx}{x^2+k^2}$

13.06$^\mathbf{o}$. $\dfrac{x^2+1}{kx+1}$ v $\mathbb{R}_+^0$

[14]) Daná posloupnost se má v tomto oboru *vyšetřovat*; netvrdíme, že v něm všude *konverguje*.

13.07°. $\dfrac{x^2+k}{x+k^2}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.08°. $\dfrac{k^2-x^2}{k^2+x^2}$

13.09°. $\dfrac{x+k}{x^2+k^2}$

13.10°. $\dfrac{k^2x^2}{1+k^2x^2}$

13.11°. $\dfrac{x^{k+1}+1}{x^k+1}$ v $(-1,+\infty)$

13.12°. $\dfrac{x^k}{1+x^{2k}}$

13.13°. $\dfrac{1-x^{2k}}{1+x^{2k}}$

13.14°. $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^k$

13.15°. $\sqrt[k]{x+k}$ v $\langle -1,+\infty)$

13.16°. $\sqrt[k]{x^{2k}+1}$

13.17°. $\sqrt[k]{x^k-1}$ v $(1,+\infty)$

13.18°. $\sqrt[2k-1]{x^{2k+1}+1}$

13.19°. $\sqrt[4k]{\dfrac{x^{2k}}{x^{2k}+1}}$

13.20°. $\sqrt[k]{k^2+k\cosh x}$

13.21°. $\sqrt{x^2+\operatorname{arccotg} k}$

13.22°. $\sqrt[k]{1-\sin^k x}$

13.23°. $\sqrt[k]{kx+\sin kx}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.24°. $e^{-(x-k)^2}$

13.25°. $x^{2k}e^{-k(x^2-1)}$

13.26°. $x^k e^{-x^2/k}$

13.27°. $\dfrac{e^{kx}-1}{e^{kx}+1}$

13.28°. $\dfrac{e^{k^2x^2}-e^{kx}}{e^{k^2x^2}+e^{kx}}$

13.29°. $\dfrac{\lg(kx)}{k}$ v $\mathbb{R}_+$

13.30°. $\lg\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$ v $(-1,+\infty)$

13.31°. $\dfrac{k}{x}\lg\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.32°. $kx\lg\left(1+\dfrac{1}{kx}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.33°. $\lg\dfrac{(x+k)^2}{x^2+k^2}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.34°. $\dfrac{x}{k}\lg\dfrac{x}{k}$ v $\mathbb{R}_+$

13.35°. $\sin\dfrac{x}{k}$

13.36°. $k\sin\dfrac{x}{k}$

13.37°. $\sin\dfrac{\lg(kx)}{k}$ v $\mathbb{R}_+$

13.38°. $k\left(\sin\dfrac{x}{k}-\sin\dfrac{x}{2k}\right)$

13.39°. $\sin(\pi x^k)$ v J

13.40°. $\left(\sin x+\cos x\right)^k$ v $\langle -\pi,\pi\rangle$

13.41°. $\sin^k x\cos x$

13.42°. $k|\sin x|^k(1-|\sin x|)^k$

13.43°. $\dfrac{\sinh(x-k)}{\cosh(x+k)}$

13.44°. $\cosh\dfrac{|x|-k}{|x|+k}$

13.45°. $\arcsin\dfrac{2kx}{1+k^2x^2}$

13.46°. $\arccos\dfrac{2kx}{x^2+k^2}$

13.47°. $\operatorname{arccotg} kx$

13.48°. $kx\operatorname{arccotg} kx$

13.49°. $\operatorname{arccotg}\dfrac{kx}{kx+1}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.50°. $\operatorname{arccotg}\dfrac{x^2-k^2}{x^2+k^2}$

13.51°. $\operatorname{arctg} kx \operatorname{arccotg} kx$

13.52°. $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{k} \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{k}$

13.53°. $\operatorname{arctg} \dfrac{2x^k}{1+x^{2k}}$

13.54°. $\arcsin \dfrac{e^{kx}-1}{e^{kx}+1}$

13.55°. $\operatorname{arctg}(e^{kx})$

13.56°. $\operatorname{arccotg}\left(\sin \dfrac{x}{k}\right)$

13.57°. $\arccos(\sin^k \pi x)$

13.58°. $\arcsin x^{2k} \arccos x^{2k}$ v J

13.59°. $\arcsin(x^2(1-x^2)^k)$ v J

13.60°. $\operatorname{arccotg}((1-x^2)(2-x^2))^k$

B. V daných oborech vyšetřte stejnoměrnou konvergenci řad o uvedených členech; závisí-li členy na parametru α, vyšetřujte závislost stejnoměrné konvergence příslušné řady i na tomto reálném parametru.

13.61°. $x^{2k}e^{-kx^2}$ v $\mathbb{R}^0_+$

13.62°. xe^{-kx} v $\mathbb{R}^0_+$

13.63°. x^2e^{-kx} v $\mathbb{R}^0_+$

13.64°. $xe^{-k^2x^2}$

13.65°. $x^2e^{-k^2x^2}$

13.66°. $\exp(-(k+x)^2)$

13.67°. $\exp\left(-\left(kx+\dfrac{1}{kx}\right)\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.68°. $\exp\left(-\dfrac{k^2x+x^{-1}}{\sqrt{k}}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.69°. $\dfrac{kx}{k^3+|x|^3}$

13.70°. $(x(2-x))^k$

13.71°. $(\sin^3 x-\cos^3 x)^k$

13.72°. $(\operatorname{tgh} x)^k$

13.73°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2}{k^2}\right)$

13.74°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2\sin^2 x}{k^2}\right)$

13.75°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2\operatorname{arccotg} x^2}{k^2}\right)$

13.76°. $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{k^2}\operatorname{arccotg}\dfrac{x^2}{k^2}$

13.77°. $(\sin^2(\frac{1}{4}\pi x)\operatorname{arccotg} x^2)^k$

13.78°. $x^{2k}\operatorname{arccotg} x^{4k}$

13.79°. $\operatorname{arctg} k^2x^2 \operatorname{arccotg} k^2x^2$

13.80°. $\dfrac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k}\operatorname{arccotg} kx$

13.81°. $\arccos\dfrac{k^2x^2}{1+k^2x^2}$

13.82°. $\arccos\dfrac{k^4x^4}{1+k^4x^4}$

13.83°. $\arccos\dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}$

13.84°. $\arcsin\dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}$

13.85°. $\dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}\dfrac{1}{x^2+k^2}\operatorname{arctg}\dfrac{k^2x^2+1}{k^2x^2+2}$

13.86°. $\dfrac{(x^k+1)^2}{x^{2k}+1}\dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}^0_+$

13.87°. $\dfrac{1-e^{-k(x+1)}}{1+e^{-k(x+1)}}\operatorname{arctg}\dfrac{kx+2}{kx+1}\dfrac{\cos kx}{k^\alpha}$

13.88°. $\dfrac{k^2x^2+kx+1}{k^2x^2-kx+1}\dfrac{\sin kx}{\sqrt{k}}$

13.89°. $\dfrac{e^{2kx}-e^{kx}+1}{e^{2kx}+e^{kx}+1}\,\dfrac{\sin kx}{\sqrt[4]{k}}$

13.90°. $\lg\Bigl(1+\dfrac{x^2}{k}\Bigr)\sin kx$

13.91°. $\lg\Bigl(1+\dfrac{x^2}{k^2}\Bigr)\sin(k\pi x)$

13.92°. $\dfrac{k}{k^2+1}\,\sin^2 kx$

13.93°. $\sin\dfrac{x}{k}\,\sin kx$

13.94°. $\dfrac{\operatorname{arctg} kx}{\operatorname{arctg} 2kx}\,\dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}_+$

13.95°. $\operatorname{arctg} kx\,\operatorname{arccotg} kx\,\cos kx$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.96°. $\dfrac{\operatorname{arccotg} kx}{\operatorname{arccotg} 2kx}\,\dfrac{\cos(k\pi x)}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}_+^0$

C. Najděte poloměry konvergence těchto řad:

13.97. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!\,z^k}{k^k}$

13.98. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k z^k}{(k!)^2}$

13.99. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,z^k}{(2k)!!}$

13.100. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!\,z^k}{k!}$

13.101. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^\alpha z^{2k}}{(2k)!!}$

13.102. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{arccotg} e^k)\,z^k$

13.103. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{j}^{k}\frac{1}{j}\Bigr)z^k$

13.104. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\sin k)\,z^k$

13.105. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{1}{k}\Bigr)^{k^2}z^k$

D. Pro každou z následujících funkcí (proměnné x nebo z) najděte (reálnou nebo komplexní) Taylorovu řadu o středu uvedeném za středníkem. Pro každou z nalezených řad vypočtěte poloměr konvergence.

13.106°. $e^{z^2}\sin z;\ 0$

13.107°. $\cosh z\cos z;\ 0$

13.108°. $\lg(1+x)\lg(1+x^3);\ 0$

13.109°. $\operatorname{arccotg}^2 x;\ 0$

13.110°. $e^{-z}\sinh z;\ 0$

13.111°. $\sin x\arcsin x;\ 0$

13.112°. $\dfrac{e^{iz}}{1+z^2};\ 0$

13.113°. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};\ 0$

13.114°. $\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{1+x^2};\ 0$

13.115°. $\sin z;\ \frac{1}{2}\pi$

13.116°. $e^z;\ 1$

13.117°. $e^z;\ i\pi$

13.118°. $\cosh z;\ i$

13.119°. $\lg x\,\sin\pi x;\ 1$

13.120°. $\lg^3(1-x);\ 0$

E. Najděte předepsaný počet komplexních mocninných řad o středu 0, jejichž součty jsou lineárně nezávislá řešení dané diferenciální rovnice. Počet řešení je uveden za středníkem; nula v příkladu 13.128 znamená, že žádné řešení popsaného tvaru neexistuje (dokažte!). [15]) U každé z nalezených mocninných řad je třeba vypočítat poloměr R konvergence; při $R > 0$ je kruh $K(0, R)$ oborem příslušného řešení příslušné rovnice.

13.121. $w'' + w = 0;\ 2$

13.122. $w'' - w = 0;\ 2$

13.123. $zw'' + w' + zw = 0;\ 1$

13.124. $w''' + w = 0;\ 3$

13.125. $w'' + zw = 0;\ 2$

13.126. $w'' - zw' - w = 0;\ 2$

13.127. $zw'' - w = 0;\ 1$

13.128. $z^2w'' - w = 0;\ 0$

13.129. $zw'' + (1 - z)w' + 5w = 0;\ 1$

13.130. $w'' - zw' + 5w = 0;\ 2$

Řešení

A. Abychom výsledky cvičení 13.01–13.60 mohli zapsat pokud možno stručně a přehledně, užíváme tyto úmluvy a označení: za číslem cvičení následuje vždy čtveřice dat. V části začínající **BL** uvádíme bodovou limitu dané posloupnosti, za značkou **STK** je umístěna nutná a postačující podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti v intervalu I ležícím v oboru, v němž posloupnost konverguje, po **LSK** následuje maximální množina, v níž je konvergence lokálně stejnoměrná, a z údajů za značkou **NSK** lze vyčíst, ve kterých prstencových okolích kterých bodů je konvergence nestejnoměrná. Značka $\emptyset$ znamená, že takové body neexistují; ostatní data v této části zapisujeme pro úsporu místa takto: Konverguje-li posloupnost v jistém $P^+(a)$ (resp. $P^-(a)$) bodově, ale není-li konvergence stejnoměrná v žádném $P^+(a)$ (resp. $P^-(a)$), napíšeme krátce $a+$ (resp. $a-$). Konverguje-li posloupnost v jistém $P(a)$ bodově, ale konvergence není stejnoměrná v žádném $P^+(a)$ a v žádném $P^-(a)$, napíšeme $a\pm$. Symbol $\pm a \mp$ píšeme místo dvojice symbolů „$+a-$“ a „$-a+$“; konverguje-li posloupnost bodově v jistém okolí bodů $\pm a$, ale nekonverguje-li v žádném jejich pravém ani levém okolí, napíšeme $(\pm a)\pm$.

13.01. BL: 0, je-li $0 < |x| < \sqrt{2}$; 1 v $\pm\sqrt{2}$; div., je-li $x = 0 \vee |x| > \sqrt{2}$; **STK:** $\overline{I} \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$; **LSK:** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$; **NSK:** $\pm\sqrt{2}\mp$, $0\pm$

13.02. BL: 0 v J; **STK:** $I \subset J$; **LSK:** J; **NSK:** $\emptyset$

13.03. BL: 0 v J; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1 \mp$

[15]) Protože rovnice 13.121–13.130 mají pravou stranu rovnou nule, je nulová řada zřejmě řešením každé z nich; protože úkolem je najít *lineárně nezávislá* řešení, nulové řešení nesplňuje zadané podmínky.

13.04. BL: 0 v J; **STK:** $I \subset J$; **LSK:** J; **NSK:** $\emptyset$

13.05. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.06. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$, 1 v 0; **STK:** I omez., $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.07. BL: 0 v $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+^0$; **NSK:** $+\infty-$

13.08. BL: 1 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.09. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.10. BL: 0 v 0, 1 jinde; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.11. BL: 1 v J^*, x v $\langle 1, +\infty)$; **STK:** $-1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $(-1, +\infty)$; **NSK:** $-1+$

13.12. BL: 0 pro $x \neq \pm 1$, $\frac{1}{2}$ v 1, div. v -1; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.13. BL: 1 v J^*, 0 v ± 1, -1 jinde; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.14. BL: 0 v $\mathbb{R} - \{0\}$, v 0 div.; **STK:** I omez., $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$, $\pm\infty\mp$

13.15. BL: 1 v $\langle -1, +\infty)$; **STK:** I sh. omez.; **LSK:** $\langle -1, +\infty)$; **NSK:** $+\infty-$

13.16. BL: 1 v J, x^2 jinde; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.17. BL: x v $(1, +\infty)$, ale $f_k(1+) = 0$; **STK:** $1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $(1, +\infty)$; **NSK:** $1+$

13.18. BL: 1 pro $x \in J^*$, 0 pro $x = -1$, x jinak; **STK:** $-1 \notin \overline{I}$, I omez.; **LSK:** $\mathbb{R} - \{-1\}$; **NSK:** $-1\pm$, $\pm\infty\mp$

13.19. BL: $\sqrt{|x|}$ v J, 1 jinde; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.20. BL: 1 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.21. BL: $|x|$ v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.22. BL: div. v bodech $(2n - \frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, 0 v bodech $(2n + \frac{1}{2})\pi$, 1 jinde; **STK:** $\overline{I} \cap \{(2n \pm \frac{1}{2})\pi;\, n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{(2n \pm \frac{1}{2})\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; **NSK:** $((2n \pm \frac{1}{2})\pi)\pm$, kde $n \in \mathbb{Z}$, $\pm\infty\mp$

13.23. BL: 0 v 0, 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** I omez., $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.24. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I sh. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $+\infty-$

13.25. BL: 1 v ± 1, 0 jinde; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.26. BL: 1 v 1, 0 pro $x \in J^*$, div. jinak; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1\mp$

13.27. BL: $\operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.28. BL: 0 v 0, 1 jinde; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.29. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$, I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.30. BL: 0 v $(-1, +\infty)$; **STK:** I omez.; **LSK:** $(-1, +\infty)$; **NSK:** $+\infty-$

13.31. BL: 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $+\infty-$

13.32. BL: 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.33. BL: 0 v $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $+\infty-$

13.34. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $+\infty-$

13.35. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.36. BL: x v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.37. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$, I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.38. BL: $\frac{1}{2}x$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.39. BL: 0 v J; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1\mp$

13.40. BL: div. v $\langle -\pi, -\frac{1}{2}\pi\rangle \cup (0, \frac{1}{2}\pi) \cup \{\pi\}$, 1 v 0 a v $\frac{1}{2}\pi$, 0 jinde; **STK:** $\overline{I} \subset (-\frac{1}{2}\pi, 0) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi)$; **LSK:** $(-\frac{1}{2}\pi, 0) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi)$; **NSK:** $-\frac{1}{2}\pi+$, $0-$, $\frac{1}{2}\pi+$, $\pi-$

13.41. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.42. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.43. BL: $-e^{-2x}$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I zd. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $-\infty+$

13.44. BL: $\cosh 1 \doteq 1.54308$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.45. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.46. BL: $\frac{1}{2}\pi$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.47. BL: π v $\mathbb{R}_-$, $\frac{1}{2}\pi$ v 0, 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.48. BL: div. v $\mathbb{R}_-$, 0 v 0, 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $\overline{I} \subset \mathbb{R}_+$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.49. BL: $\frac{1}{2}\pi$ v 0, $\frac{1}{4}\pi$ v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $\overline{I} \subset \mathbb{R}_+$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.50. BL: $\frac{3}{4}\pi$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.51. BL: $-\frac{1}{2}\pi^2$ v $\mathbb{R}_-$, 0 v $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.52. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.53. BL: v -1 div., $\frac{1}{4}\pi$ v 1, 0 jinak; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.54. BL: $\frac{1}{4}\operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.55. BL: 0 v $\mathbb{R}_-$, $\frac{1}{4}\pi$ v 0, $\frac{1}{2}\pi$ v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.56. BL: $\frac{1}{2}\pi$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.57. BL: div. v bodech $2n - \frac{1}{2}$, kde $n \in \mathbb{Z}$, 0 v bodech $2n + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\pi$ jinak; **STK:** $\overline{I} \cap \{2n \pm \frac{1}{2};\, n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{2n \pm \frac{1}{2};\, n \in \mathbb{Z}\}$; **NSK:** $(2n \pm \frac{1}{2})\pm$, kde $n \in \mathbb{Z}$

13.58. BL: 0 v J; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1\mp$

13.59. BL: 0 v J; **STK:** J; **LSK:** J; **NSK:** $\emptyset$

13.60. BL: označíme-li $A := \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $B := \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, je $f_k \to \frac{1}{2}\pi$, je-li $A < |x| < B$, $f_k \to \frac{1}{4}\pi$ v bodech $\pm A, \pm B$, $f_k \to 0$, je-li $|x| < A$, nebo $|x| > B$; **STK:** $\overline{I} \cap \{\pm A, \pm B\} = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm A, \pm B\}$; **NSK:** $(\pm A)\pm$, $(\pm B)\pm$

B. Výsledky cvičení 13.61–13.96 jsou uspořádány podobně jako výsledky sub A. Za „**BK**“ je uvedena maximální podmnožina zadaného oboru, v níž řada bodově konverguje; součet řady není uveden, protože je ve většině případů neznámý.

13.61. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.62. BK: $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.63. BK: $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** $\mathbb{R}_+^0$; **LSK:** $\mathbb{R}_+^0$; **NSK:** $\emptyset$

13.64. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.65. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.66. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I zd. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $-\infty+$

13.67. BK: $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.68. BK: $\mathbb{R}_+$; **STK:** $\mathbb{R}_+$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $\emptyset$

13.69. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.70. BK: $1 \neq x \in K$, kde $K := (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$; **STK:** $1 \notin \overline{I} \subset K$; **LSK:** $K - \{1\}$; **NSK:** $(1-\sqrt{2})+$, $1\pm$, $(1+\sqrt{2})-$

13.71. BK: $x \notin N_1$, kde $N_1 := \{\frac{1}{2}n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_1 = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_1$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_1$, $\pm\infty\mp$

13.72. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.73. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.74. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.75. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.76. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.77. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.78. BK: $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.79. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.80. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I zd. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $-\infty+$

13.81. řada diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$

13.82. BK: $\mathbb{R} - \{0\}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.83. BK: $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.84. BK: $\mathbb{R}_-$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_-$; **NSK:** $0-$

13.85. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.86. řada konverguje (bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně), právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^{\infty}(\sin kx)/k^{\alpha}$ (viz Př. 13.11)

13.87. řada konverguje (bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně), právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^{\infty}(\cos kx)/k^{\alpha}$ (viz Př. 13.11)

13.88. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_2 = \emptyset$, kde $N_2 := \{2n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_2$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_2$, $\pm\infty\mp$

13.89. jako ve cvičení **13.88**

13.90. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_3 = \emptyset$, kde $N_3 := \{\pm 2n\pi;\, n \in \mathbb{N}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_3$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_3$, $\pm\infty\mp$

13.91. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_4 = \emptyset$, kde $N_4 := \{\pm 2n;\, n \in \mathbb{N}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_4$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_4$, $\pm\infty\mp$

13.92. řada konverguje jen v bodech $x \equiv 0 \bmod \pi$

13.93. jako ve cvičení **13.90**

13.94. jako ve cvičení **13.86**

13.95. BK: $\mathbb{R}_+^0 - N_5$, kde $N_5 := \{2n\pi;\, n \in \mathbb{N}\}$; **STK:** $\overline{I} \cap (\{0\} \cup N_5) = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R}_+ - N_5$; **NSK:** $0+$, $x\pm$ pro všechna $x \in N_5$, $\pm\infty\mp$

13.96. v $\mathbb{R}_+^0$ řada konverguje (bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně), právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos k\pi x)/k^\alpha$ (sr. s Př. 13.11, kde místo x píšeme πx)

C. Za číslem každého z cvičení 13.97–13.105 je uveden poloměr konvergence příslušné mocninné řady.

13.97. e	**13.98.** $+\infty$	**13.99.** 1	**13.100.** $\frac{1}{2}$	**13.101.** $+\infty$
13.102. e	**13.103.** 1	**13.104.** 1	**13.105.** e^{-1}	

D. U komplexních Taylorových řad uvádíme kruh konvergence, u reálných řad otevřený interval, který je průnikem kruhu konvergence s reálnou osou. Symbol [...] v horní mezi několika součtů znamená celou část výrazu uvnitř závorek.

13.106. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n+1}$ v $\mathbb{C}$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(2n-2k+1)!}$

13.107. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{4n}$ v $\mathbb{C}$, kde $\displaystyle c_n := 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!\,(4n-2k)!} + \frac{(-1)^n}{((2n)!)^2}$

13.108. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^n \sum_{k=1}^{[(n-1)/3]} \frac{1}{k\,(n-3k)}$

13.109. $\frac{1}{4}\pi^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$c_{2n-1} := \frac{(-1)^n \pi}{2n-1}, \quad c_{2n} := \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

13.110. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ v $\mathbb{C}$, kde $c_n := (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \frac{1}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!}$

13.111. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}$ v $(-1,1)$, kde $c_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2n-2k-1)!\,(2k+1)}$

13.112. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ v $U(0,1)$, kde pro $n \geq 0$ je

$$c_{2n} := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}, \quad c_{2n+1} := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{i}{(2k+1)!}$$

13.113. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$ v $(-1,1)$, kde $c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!\,(2n-2k-1)!!}{(2k)!!\,(2n-2k)!!\,(2k+1)}$

13.114. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$ v $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, kde $c_n := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k+1}}{2k+1}$

13.115. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-\frac{1}{2}\pi)^{2n}}{(2n)!}$ v $\mathbb{C}$

13.116. $e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ v $\mathbb{C}$

13.117. $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^n}{n!}$ v $\mathbb{C}$

13.118. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-i)^n}{n!}$ v $\mathbb{C}$, kde pro $n \geq 0$ je $c_{2n} := \cos 1$, $c_{2n+1} := i \sin 1$

13.119. $\sum_{n=2}^{\infty} c_n (x-1)^n$ v $(0,2)$, kde $c_n := \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k}\pi^{2k-1}}{(2k-1)!\,(n-2k+1)}$

13.120. $\sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde $c_n := -\sum_{m=2}^{n-1} \Big(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k\,(m-k)\,(n-m)} \Big)$

E. Protože lineární kombinace řešení diferenciální rovnice s nulovou pravou stranou je řešením této rovnice, nemusí uvedené výsledky souhlasit s tím, co vypočetl čtenář. Všechny mocninné řady mají poloměr konvergence $+\infty$, takže jsou řešeními příslušné rovnice v celém $\mathbb{C}$; ve dvou případech se mocninná řada redukuje na polynom.

13.121. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ $(= \cos z)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $(= \sin z)$

13.122. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ $(= \cosh z)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $(= \sinh z)$

13.123. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!!}$

13.124. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k}}{(3k)!}\,,\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k+1}}{(3k+1)!}\,,\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k+2}}{(3k+2)!}$

13.125. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{3j\,(3j-1)}\Big) z^{3k},\ \sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{3j\,(3j+1)}\Big) z^{3k+1}$

13.126. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!!}\,,\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!!}$

13.127. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k-1)!\,k!}$

13.128. Po dosazení $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ do rovnice dostáváme rovnosti $a_0 = a_1 = 0$

a ze vztahů $a_k(k\,(k-1)-1) = 0$ plyne, že $a_k = 0$ i pro $k \geq 2$

13.129. $1 - 5z + 5z^2 - \dfrac{5z^3}{3} + \dfrac{5z^4}{24} - \dfrac{z^5}{120}$

13.130. $15z - 10z^3 + z^5\,,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^k}{(2k)!} \prod_{j=1}^{k} (7-2j)\Big) z^{2k}$