

15. Geometrické aplikace

Definice. Jsou-li $p < q$ přirozená čísla, existuje-li k množině $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^p$ tak, že $G \subset \Omega \subset \overline{G}$, a je-li $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ je spojitě zobrazení, budeme říkat, že f je p -**rozměrná nadplocha v** \mathbb{R}^q (definovaná v Ω). Množinu $\langle f \rangle := f(\Omega)$ pak budeme nazývat **geometrický obraz** nadplochy f .

Je-li $M = \langle f \rangle$ pro nějakou množinu M a nějakou nadplochu f , říkáme, že f je **parametrizace** nebo **parametrický popis** množiny M ; napíšeme-li množinu M ve tvaru $\langle f \rangle$, říkáme, že jsme ji (nadplochou f) **parametrizovali**. Pro jednorozměrné nadplochy se zpravidla užívá název **křivka**, pro dvojrozměrné nadplochy název **plocha**; je-li $p > 2$, mluví se často o **zakřiveném prostoru**.¹⁾

Poznámka 15.1. Právě uvedená definice nadplochy je zobecněním dobře známé Jordanovy definice křivky jako spojitě zobrazení (nikoli obrazu!) kompaktního jednorozměrného intervalu, inspirované zřejmě dynamikou hmotného bodu. V této disciplíně není totiž primární *trajektorie* (geometrický obraz) pohybujícího se bodu, ale závislost polohy bodu na čase (křivka). Známe-li tuto závislost, známe i trajektorii, nikoli však naopak, protože touž trajektorii může hmotný bod opisovat nekonečně mnoha způsoby.

Definiční obor Ω nadplochy je množina, která vznikla z jisté otevřené množiny G přidáním části hranice; definičním oborem křivky může být proto např. jakýkoli (otevřený, polouzavřený nebo uzavřený) interval, což dovoluje parametrizovat např. všechny úsečky, polopřímky a přímky – bez ohledu na to, zdali k nim počítáme jejich krajní body – lineárními funkcemi.

Pro běžné potřeby geometrie a fyziky je definice založená pouze na spojitosti příliš obecná; italský matematik Peano již v roce 1890 totiž dokázal, že geometrickým obrazem křivky může být i dvojrozměrný útvar, např. čtverec – rozumí se i s vnitřkem. Při studiu elementárních diferenciálněgeometrických pojmů souvisejících s nadplochami se jednoznačně hodí nahoře uvedená „dynamická“ definice, doplníme-li ji dalšími předpoklady, které mj. vyloučí vícerozměrnost geometrického obrazu křivky. \square

Definice. Budeme říkat, že nadplocha $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ je **hladká**, je-li splněna jedna z těchto podmínek:

1. Ω je otevřená množina, funkce f je v Ω třídy C_1 a matice $f'(x)$ má hodnost p v každém bodě $x \in \Omega$.

2. Existuje otevřená množina $\Omega^* \supset \Omega$ a rozšíření $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^q$ funkce f , které je hladkou nadplochou podle bodu 1 této definice.

¹⁾ Poznamenejme, že křivé prostory jsou nedílnou součástí např. obecné teorie relativity a jejich vlastnosti se v této teorii intenzivně studují již bezmála sto let. Pro pobavení čtenářů dodejme, že jeden z našich překladatelů, který se – jako mnozí další – zřejmě domnívá, že k překládání odborných textů není nutná ani základní orientace v příslušné vědní disciplíně včetně její terminologie, přeložil anglická slova „curved space“ jako „zahnutý prostor“.

Definice. Je-li $\Omega_1 \subset \Omega$ maximální otevřená množina, v níž je nadplocha $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ hladká, a je-li $x \in \Omega - \Omega_1$, říkáme, že x je **singulární bod** nadplochy f .

Poznámka 15.2. Čtenáři je jistě z algebry známo, že hodnost obdélníkové matice M typu $q \times p$, kde $q > p$, lze definovat těmito dvěma ekvivalentními způsoby:

1) jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice M ,

2) jako maximální číslo n , pro něž existuje submatice M_1 typu $n \times n$ matice M tak, že $\det M_1 \neq 0$. \square

Je-li $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ třídy C_1 , má matice

$$(1) \quad f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_p f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_p f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q & \partial_2 f_q & \dots & \partial_p f_q \end{pmatrix}$$

hodnost *nejvýše rovnou* p . V definici hladkosti nadplochy f žádáme tedy *maximální hodnost* této matice, tj. *lineární nezávislost sloupců*

$$(2) \quad \begin{aligned} T^1 &:= (\partial_1 f_1, \partial_1 f_2, \dots, \partial_1 f_q)^{sl}, \\ T^2 &:= (\partial_2 f_1, \partial_2 f_2, \dots, \partial_2 f_q)^{sl}, \\ &\dots, \\ T^p &:= (\partial_p f_1, \partial_p f_2, \dots, \partial_p f_q)^{sl} \end{aligned}$$

matice f' (všude v Ω). Tyto sloupce pak nazýváme **tečné vektory** nadplochy f a pro každé $a \in \Omega$ je

$$(3) \quad \left\{ f(a) + \sum_{i=1}^p \lambda_i T^i(a); (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

tečná nadrovina nadplochy f v bodě a . Je-li $p = 1$ resp. $p = 2$ resp. $p = 3$, mluvíme o **tečně** resp. o **tečné rovině** resp. o **tečném** (trojrozměrném) **prostoru**.

Poznámka 15.3. Položíme-li $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^{sl}$, bude

$$(4) \quad f(a) + \sum_{i=1}^p \lambda_i T^i(a) = f(a) + f'(a)\lambda = f(a) + D(f; \lambda);$$

tím je objasněn *geometrický význam diferenciálu zobrazení f v případě, že jde o zobrazení z prostoru nižší dimenze do prostoru dimenze vyšší*. \square

Každý nenulový vektor ortogonální ke všem vektorům (2) se nazývá **normálový vektor** (hladké) nadplochy f . Protože dimenze ortogonálního doplňku p -rozměrného lineárního prostoru generovaného v \mathbb{R}^q lineárně nezávislými vektory T^i je $q - p$, existují $(q - p)$ -tice

$$(5) \quad \{N^1, \dots, N^{q-p}\}$$

otevřenou úsečku s krajními body a, b a obě **polouzavřené úsečky** s týmiž krajními body. *Všechny uvedené restrikce jsou (stejně jako funkce (15)) hladké.*

Přímku procházející body a, b lze ovšem parametrizovat např. i prostou funkcí

$$(15') \quad g(t) := a + (b - a)t^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

třídy C_∞ ; protože je $g'(t) = 3t^2(b - a) = 0$, právě když je $t = 0$, *není tato parametrizace hladká* a hladké nejsou ani restrikce $g|_{\mathbb{R}_+^0}$, $g|_{\langle 0, 1 \rangle}$, $g|_{\langle 0, 1 \rangle}$. Restrikce $g|_{\mathbb{R}_+}$, $g|_{(0, 1)}$, $g|_{(0, 1)}$ však hladké jsou.

Příklad 15.2. Je-li $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, je křivka

$$(16) \quad f(t) := (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

parametrickým popisem **elipsy** o středu (x_0, y_0) , délce poloos a, b a rovnicí

$$(17) \quad \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1.$$

Parametrizace (16) je hladká, protože obě složky jsou třídy C_∞ a vektor $f'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ není pro žádné $t \in \mathbb{R}$ nulový.²⁾

Parametrický popis tečny v bodě t je

$$(18) \quad (x_0 + a(\cos t - \lambda \sin t), y_0 + b(\sin t + \lambda \cos t)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vektor $N(t) := (b \cos t, a \sin t)$ je zřejmě ortogonální k vektoru $f'(t)$, takže

$$(19) \quad f(t) + \mu N(t) = (x_0 + (a + \mu b) \cos t, y_0 + (b + \mu a) \sin t), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

je parametrický popis normály.

Rovnice tečny má obecně tvar $((x, y) - f(t)) \cdot N(t) = 0$, což se v našem případě redukuje na $(x - x_0)b \cos t + (y - y_0)a \sin t = ab$; totéž dostaneme eliminací parametru λ z vektorové rovnice $(x, y) = (x_0 + a(\cos t - \lambda \sin t), y_0 + b(\sin t + \lambda \cos t))$.

Rovnice normály má tvar $((x, y) - f(t)) \cdot f'(t) = 0$, tj. $(x - x_0 - a \cos t)a \sin t = (y - y_0 - b \sin t)b \cos t$.

Parametrický popis **kružnice** o středu (x_0, y_0) a poloměru $r \in \mathbb{R}_+$ se dostane z (16), položíme-li $a = b = r$. Některé výsledky odvozené pro elipsu budou pro kružnici jednodušší; např. parametrizaci (19) normály lze napsat ve tvaru

$$(19') \quad (x_0 + \mu \cos t, y_0 + \mu \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

protože koeficient $r(1 + \mu)$ u $\cos t$ i $\sin t$ probíhá \mathbb{R} stejně jako μ .

²⁾ V souladu s literaturou se v této knize někdy (a samozřejmě jen za situace, kdy nemůže dojít k nedorozumění) užívá stejný symbol pro označení funkce f i jejího rozšíření na větší množinu. V (16) je $f(t)$ definováno jen pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a pro rozšíření na \mathbb{R} stejným předpisem se (bez upozornění přímo v textu) užívá stejný symbol.

Příklad 15.3. Pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ je funkce

$$(20) \quad f(\varphi, \vartheta) := (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta),$$

kde $(\varphi, \vartheta) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, parametrickým popisem **sféry** o středu v počátku a poloměru r , tedy množiny popsané rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Užijeme-li geografickou terminologii, znamená φ zeměpisnou délku³⁾, ϑ zeměpisnou šířku.

Rozšíříme-li funkci f tímž předpisem na množinu všech $(\varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$, je rozšíření v této množině třídy C_∞ a zbývá proto jen zjistit hodnotu matice

$$(21) \quad f'(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Znamená-li \det_j determinant matice, která vznikne z (21) vynecháním j -tého řádku, je

$$(22) \quad \det_1 = r^2 \cos \varphi \cos^2 \vartheta, \quad \det_2 = -r^2 \sin \varphi \cos^2 \vartheta, \quad \det_3 = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

takže

$$(23) \quad \det_1^2 + \det_2^2 + \det_3^2 = r^4 (\cos^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta) = r^4 \cos^2 \vartheta.$$

Poslední výraz se rovná nule, právě když je $\vartheta \equiv \frac{1}{2}\pi \pmod{\pi}$, takže pro původní, nerozšířené zobrazení f jsou singulárními body právě všechny body tvaru $(\varphi, \pm\frac{1}{2}\pi)$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. I když je singulárních bodů nekonečně mnoho, jejich obrazy jsou jen dva – jsou to oba „póly“ („severní“ a „jižní“) sféry; $f|_{\langle 0, 2\pi \rangle \times (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)}$ je hladká plocha.

Tečnými vektory v bodě $a = (\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi)$ jsou hodnoty sloupců matice (21) v bodě a , tedy vektory

$$(24) \quad T^1 = \frac{1}{2}r \cdot (-1, 1, 0), \quad T^2 = \frac{1}{2}r \cdot (1, 1, \sqrt{2}),$$

a

$$(25) \quad N := T^1 \times T^2 = (\det_1(a), -\det_2(a), \det_3(a)) = \frac{1}{4}\sqrt{2}r^2 \cdot (1, 1, -\sqrt{2})$$

je normálový vektor. Protože $A := f(a) = \frac{1}{2}r \cdot (1, 1, -\sqrt{2})$, plyne z toho, že do tečné roviny patří právě všechny body $X = (x, y, z)$, pro něž je

$$x = \frac{1}{2}r(1 - \lambda_1 + \lambda_2), \quad y = \frac{1}{2}r(1 + \lambda_1 + \lambda_2), \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{2}r(-1 + \lambda_2), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Normálou je množina všech bodů tvaru $(1, 1, -\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2}r(1 + \mu r/\sqrt{2})$, kde $\mu \in \mathbb{R}$; protože funkce proměnné μ za tečkou zobrazuje \mathbb{R} na \mathbb{R} , lze místo ní psát jen μ .

³⁾ Úhel φ se přitom neměří ve stupních, ale v obloukové míře, a je nespojitý na greenwichském poledníku; volbou $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ bychom nespojitost přesunuli na její obvyklé místo do Tichomoří.

Tečná rovina má rovnici $((X - A) \cdot N) = 0$, což je po dosazení ekvivalentní s rovnicí $x + y - \sqrt{2}z = 2r$, normála je průnikem dvou rovin o rovnicích $((X - A) \cdot T^1) = 0$ a $((X - A) \cdot T^2) = 0$; po dosazení a evidentní úpravě zjistíme, že jsou to rovnice $x = y$ a $x + y + \sqrt{2}z = 0$.

Příklad 15.4. Funkce $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definovaná rovností

$$(26) \quad F(u, v) := (\cos v, \sin v, u \cos \frac{1}{2}v, u \sin \frac{1}{2}v)$$

pro všechna $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ je třídy C_∞ v \mathbb{R}^2 , přičemž

$$(27) \quad F'(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \\ \cos \frac{1}{2}v & -\frac{1}{2}u \sin \frac{1}{2}v \\ \sin \frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}v \end{pmatrix}.$$

Sloupce T^1, T^2 této matice jsou zřejmě navzájem ortogonální; protože žádný z nich není nulovým vektorem, jsou (pro všechna $(u, v) \in \mathbb{R}^2$) lineárně nezávislé. Z toho plyne, že plocha F je hladká v celém \mathbb{R}^2 .

Při hledání dvou lineárně nezávislých normálových vektorů N^1, N^2 můžeme postupovat metodou vyloženou v Po.15.5, založenou na řešení rovnic $(T^i \cdot N) = 0$ pro $i = 1, 2$. Lépe je však využít jednoduchou strukturu matice F' a postupovat méně standardně:

1) Vektor $N = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ s $n_3 = n_4 = 0$ je zřejmě ortogonální k T^1 ; položíme-li $n_1 = \cos v, n_2 = \sin v$, bude ortogonální i k T^2 . Vektor

$$(28) \quad N^1 := (\cos v, \sin v, 0, 0)$$

splňuje tedy obě rovnice $(T^i \cdot N^1) = 0$.

2) Každý vektor tvaru $N = (n_1, n_2, -\sin \frac{1}{2}v, \cos \frac{1}{2}v)$ je opět ortogonální k T^1 , přičemž součet součinů třetích a čtvrtých složek vektorů N a T^2 je roven

$$(-\sin \frac{1}{2}v)(-\frac{1}{2}u \sin \frac{1}{2}v) + (\cos \frac{1}{2}v)(\frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}u.$$

Položíme-li tedy $n_1 = \frac{1}{2}u \sin v, n_2 = -\frac{1}{2}u \cos v$, bude součet součinů prvních a druhých složek roven

$$(\frac{1}{2}u \sin v)(-\sin v) + (-\frac{1}{2}u \cos v)(\cos v) = -\frac{1}{2}u,$$

takže bude $(T^2 \cdot N) = 0$. Vektor

$$(29) \quad N^2 := (\frac{1}{2}u \sin v, -\frac{1}{2}u \cos v, -\sin \frac{1}{2}v, \cos \frac{1}{2}v)$$

je tedy také ortogonální k oběma vektorům T^i .

Vektory N^1, N^2 jsou přitom nejen lineárně nezávislé, ale dokonce ortogonální, jak ihned zjistíme výpočtem jejich skalárního součinu. V každém bodě $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tvoří tedy vektory T^1, T^2, N^1, N^2 ortogonální bázi prostoru \mathbb{R}^4 .

Jistě není nutné, abychom rozepisovali do složek parametrické popisy

$$(30) \quad F + \lambda_1 T^1 + \lambda_2 T^2 \quad \text{a} \quad F + \mu_1 N^1 + \mu_2 N^2$$

tečné a normálové roviny v obecném bodě $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Označíme-li $X := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ obecný bod prostoru \mathbb{R}^4 , lze tyto roviny popsat i dvojicemi rovnic

$$(31) \quad ((X - F) \cdot N^j) = 0, \quad \text{kde } j = 1, 2, \quad \text{a} \quad ((X - F) \cdot T^i) = 0, \quad \text{kde } i = 1, 2,$$

z nichž každá je rovnicí jisté trojrozměrné nadroviny v \mathbb{R}^4 .

Nadplocha (26) má tuto *pozoruhodnou vlastnost*: Je-li $u = 0$ a roste-li v od 0 do 2π , mění se příslušné normálové vektory

$$(32) \quad N^1(0, v) = (\cos v, \sin v, 0, 0) \quad \text{a} \quad N^2(0, v) = (0, 0, -\sin \frac{1}{2}v, \cos \frac{1}{2}v)$$

spojitě od hodnoty $N_0^1 := (1, 0, 0, 0)$ k téže hodnotě $N_{2\pi}^1 := (1, 0, 0, 0)$ ⁴⁾ a od $N_0^2 := (0, 0, 0, 1)$ k opačné hodnotě $N_{2\pi}^2 := (0, 0, 0, -1)$.⁵⁾ Ve stejném geometrickém bodě $F(0, 0) = F(0, 2\pi) = (1, 0, 0, 0)$ má tedy plocha F dvě dvojice normálových vektorů, přičemž 1) orientace bází $\{N_0^1, N_0^2\}$, $\{N_{2\pi}^1, N_{2\pi}^2\}$ příslušných normálových rovin jsou opačné, 2) první báze přešla v druhou spojitě.⁶⁾ Čtenář se může sám přesvědčit, že podobná změna probíhá i v tečné rovině.

Nadplochy, které mají podobnou vlastnost, se nazývají *neorientovatelné*; plocha F je čtyřrozměrným modelem tzv. *Möbiova listu*, jehož trojrozměrnou analogii vyšetříme v dalším příkladu.

Příklad 15.5. Rotaci bodu $(x, 0, z)$ (ležícího v rovině xz prostoru \mathbb{R}^3) kolem osy z popisuje funkce $(x \cos \varphi, x \sin \varphi, z)$, kde φ je úhel otáčení. Funkce $(1 + u, 0, 0)$, kde $|u| \leq \frac{1}{3}$, je parametrický popis úsečky U s krajními body $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ na ose x ; rotaci v rovině xz úsečky U kolem jejího středu $(1, 0, 0)$ popisuje funkce $(1 + u \cos \vartheta, 0, u \sin \vartheta)$, kde ϑ je úhel otáčení. Má-li tedy úsečka U rotovat rychlostí v kolem osy z a zároveň se poloviční rychlostí $\frac{1}{2}v$ otáčet kolem svého středu, bude funkce

$$(33) \quad f(u, v) := ((1 + u \cos \frac{1}{2}v) \cos v, (1 + u \cos \frac{1}{2}v) \sin v, u \sin \frac{1}{2}v),$$

kde $|u| \leq \frac{1}{3}, 0 \leq v \leq 2\pi$, popisovat jednotlivé fáze výslednice obou pohybů, při nichž se úsečka U kolem osy z otočí nakonec o plný úhel, ale kolem svého středu jen o úhel poloviční. Po dokončené rotaci vznikne tedy jakoby její zrcadlový obraz: bod $(1 + u, 0, 0)$ přejde v bod $(1 - u, 0, 0)$ a naopak. Geometrický obraz funkce (33) (případně s jinou úsečkou U na kladné části osy x) se nazývá **Möbiův list**.

⁴⁾ Kdybychom počáteční bod vektoru N_1 umístili do počátku prostoru \mathbb{R}^4 , opsal by jeho koncový bod jednotkovou kružnici v rovině x_1x_2 .

⁵⁾ Na rozdíl od N_1 opiše koncový bod vektoru N_2 jen půl jednotkové kružnice, a to v rovině x_3x_4 .

⁶⁾ Výsledek je tedy podobný pohledu do zrcadla, jenomže při něm je změna „okamžitá“, nespojitá, kdežto změna na $\langle F \rangle$ nastala postupně, spojitě, „cestováním“ po vhodné dráze v $\langle F \rangle$.

Rozšíření funkce f tímž předpisem na celou rovinu uv je třídy C_∞ , přičemž

$$(34) \quad f'(u, v) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}v \cos v & -(1 + u \cos \frac{1}{2}v) \sin v - \frac{1}{2}u \sin \frac{1}{2}v \cos v \\ \cos \frac{1}{2}v \sin v & (1 + u \cos \frac{1}{2}v) \cos v - \frac{1}{2}u \sin \frac{1}{2}v \sin v \\ \sin \frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}v \end{pmatrix}.$$

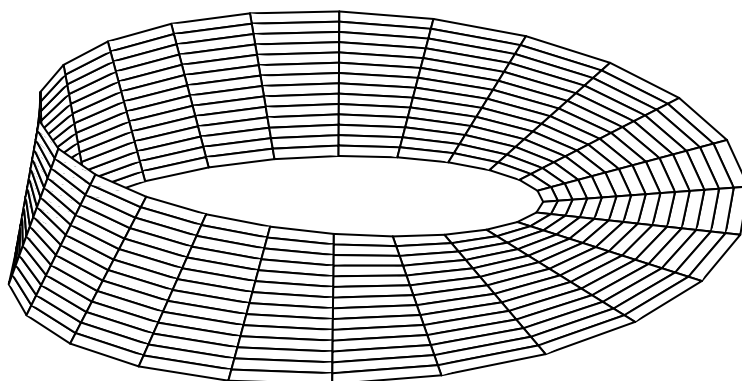
Jak snadno zjistíme, všude v \mathbb{R}^2 je

$$(35) \quad \begin{aligned} \det_1 &= \frac{1}{2}u \sin v (1 - \cos v) - \sin \frac{1}{2}v \cos v, \\ \det_2 &= \frac{1}{2}u (\cos v + \sin^2 v) + \sin \frac{1}{2}v \sin v, \\ \det_3 &= \cos \frac{1}{2}v (1 + u \cos \frac{1}{2}v), \\ \det_1^2 + \det_2^2 + \det_3^2 &= \frac{1}{4}u^2 + (u \cos \frac{1}{2}v + 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Vektor $N := \partial_1 f \times \partial_2 f = (\det_1, -\det_2, \det_3)$ je tedy všude nenulový; speciálně: norma vektoru

$$(36) \quad N(0, v) = (-\sin \frac{1}{2}v \cos v, -\sin \frac{1}{2}v \sin v, \cos \frac{1}{2}v)$$

je identicky rovna 1.



MÖBIŮV LIST

Tento příklad se podobá příkladu 15.4 v tom, že $f(0, 0) = f(0, 2\pi) = (1, 0, 0)$ a že $N(0, 0) = (0, 0, 1)$, $N(0, 2\pi) = (0, 0, -1) = -N(0, 0)$. Proběhne-li v od 0 do 2π , opíše bod $f(0, v) = (\cos v, \sin v, 0)$ jednotkovou kružnici v rovině xy ; příslušný normálový vektor (36) se spojitě mění od hodnoty $(0, 0, 1)$ (kdy směřuje „přímo nahoru“) k opačné hodnotě $(0, 0, -1)$ („přímo dolů“).

Möbiův list patří mezi tzv. *neorientovatelné plochy* právě proto, že podobný jev je na něm (na rozdíl např. od sféry nebo válcové plochy) možný.

* * *

Graf obecného zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je definován jako množina

$$(37) \quad \text{gr } f := \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}. \quad \square$$

Předpokládejme, že p a q jsou přirozená čísla a že $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q)$ je nějaká (pevně zvolená) permutace posloupnosti $(1, \dots, p, p+1, \dots, p+q)$ splňující podmínku $i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_q$. Body

$$(38) \quad z = (z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, \dots, z_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

budeme pak psát ve tvaru

$$(39) \quad (x, y), \text{ kde } x = (z_{i_1}, \dots, z_{i_p}), y = (z_{j_1}, \dots, z_{j_q}).$$

Ačkoli to není zcela korektní, budeme tedy ztotožňovat prostor \mathbb{R}^{p+q} s kartézským součinem prostorů $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ generovaných jednotkovými vektory i_1 -ní až i_p -té resp. j_1 -ní až j_q -té souřadnicové osy v \mathbb{R}^{p+q} ; v souladu s tím budeme psát $z = (x, y)$.

Při tomto značení a za předpokladu, že $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$, je

$$(40) \quad \text{gr } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{p+q}; x \in \Omega\}$$

v souladu s obecnou definicí grafu. Vektorovou $(p+q)$ -rozměrnou funkci

$$(41) \quad G_f(x) := (x, f(x)), \quad x \in \Omega,$$

budeme pak nazývat **standardní parametrický popis** grafu f . **Standardní rovnici** grafu (40) budeme rozumět rovnici $y = f(x)$, $x \in \Omega$, neboli ve složkách

$$(42) \quad y_1 \equiv z_{j_1} = f_{j_1}(z_{i_1}, \dots, z_{i_p}), \dots, y_q \equiv z_{j_q} = f_{j_q}(z_{i_1}, \dots, z_{i_p}),$$

kde $(z_{i_1}, \dots, z_{i_p}) \equiv (x_1, \dots, x_p) \in \Omega$. \square

Úmluva. Abychom se vyhnuli technickým potížím při zápisu, budeme předpokládat, že

$$(43) \quad (i_1, \dots, i_p) = (1, \dots, p), (j_1, \dots, j_q) = (p+1, \dots, p+q),$$

takže bod $z = (z_1, \dots, z_{p+q})$ bude roven (x, y) , kde

$$(44) \quad x = (x_1, \dots, x_p) = (z_1, \dots, z_p), y = (y_1, \dots, y_q) = (z_{p+1}, \dots, z_{p+q}). \quad \square$$

Obecný případ lze z tohoto speciálního získat příslušnou permutací souřadnic.

Hladkost standardního parametrického popisu grafu charakterizuje tato věta:

Věta 15.1. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina, je nadplocha G_f hladká v Ω , právě když je funkce f třídy C_1 v Ω .*

Abychom to ověřili, uvažme, že

$$(45) \quad G_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_p f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_p f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q & \partial_2 f_q & \dots & \partial_p f_q \end{pmatrix}$$

a že determinant matice složené z prvních p řádků je roven 1; hodnost matice (45) je tedy rovna p . \square

V prvních p řádkách matice (45) jsou jednotkové vektory souřadnicových os v \mathbb{R}^p , v posledních q řádkách gradienty složek funkce f .

Je-li nadplocha G_f hladká, jsou sloupce

$$(46) \quad T^1 = (1, 0, \dots, 0, \partial_1 f_1, \dots, \partial_1 f_q), \dots, T^p = (0, 0, \dots, 1, \partial_p f_1, \dots, \partial_p f_q)$$

matice (45) lineárně nezávislé a generují zaměření tečné nadroviny nadplochy G_f ; tečná nadrovina v bodě $a \in \Omega$ má tedy parametrický popis

$$(47) \quad G_f(a) + \lambda_1 T^1(a) + \dots + \lambda_p T^p(a), \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,$$

neboli $G_f(a) + DG_f(a; \lambda)$ neboli $G_f^{\lambda}(a)$, kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^{sl}$.

Rozepíšeme-li rovnici $z = G_f(a) + \lambda_1 T^1(a) + \dots + \lambda_p T^p(a)$ do složek, dostaneme rovnice

$$(48') \quad x_1 = a_1 + \lambda_1, \dots, x_p = a_p + \lambda_p,$$

$$(48'') \quad y_1 = f_1(a) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \partial_i f_1(a), \dots, y_q = f_q(a) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \partial_i f_q(a).$$

Vypočítáme-li z rovnic (48') čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ a dosadíme-li je do (48''), nabudou tyto rovnice tvaru

$$(49) \quad y_j = f_j(a) + \sum_{i=1}^p \partial_i f_j(a) (x_i - a_i), \quad j = 1, \dots, q,$$

neboli

$$(50) \quad y^{sl} = f(a)^{sl} + f'(a)(x - a)^{sl} \quad (\text{neboli } y = f(a) + Df(a; x - a)).$$

Podle Po. 15.5 jsou (49) a (50) rovnice tečné nadroviny ke grafu funkce f v bodě a . Poznamenejme, že (50) se redukuje na jedinou rovnici, právě když je $q = 1$; je to pak rovnice

$$(51) \quad y = f(a) + (f'(a) \cdot (x - a)) \quad (= f(a) + (\text{grad } f(a) \cdot (x - a))).$$

Je-li $p = q = 1$, redukuje se (51) na rovnici $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, kde $a, f(a), f'(a), x, y$ jsou čísla; (50) je tedy zobecněním rovnice tečny „křivky $y = f(x)$ “, dobře známé z elementů diferenciálního počtu reálných funkcí reálné proměnné.

* * *

Příklad 15.6. Funkce

$$(52) \quad f(u, v) := (u, v, u^2 - v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

je standardní parametrický popis **hyperbolického paraboloidu** o rovnici $z = x^2 - y^2$; souřadnice x, y, z odpovídají při hořejším označení případu, že $(i_1, i_2, j_1) = (1, 2, 3)$, takže podmínky hořejší úmluvy jsou splněny.

Abychom mohli napsat rovnici tečné roviny a normály v obecném bodě (a, b) roviny \mathbb{R}^2 , potřebujeme vědět, že

$$(53) \quad \begin{aligned} T^1(u, v) &= (1, 0, 2u), \quad T^2(u, v) = (0, 1, -2v), \\ N(u, v) &:= T^1(u, v) \times T^2(u, v) = (-2u, 2v, 1); \end{aligned}$$

označíme-li tedy $X = (x, y, z)$ a $A = f(a, b)$, má tečná rovina rovnici

$$(54) \quad \begin{aligned} ((X - A) \cdot N(a, b)) &= (x - a)(-2a) + (y - b) \cdot 2b + (z - (a^2 - b^2)) \cdot 1 \\ &= -2ax + 2by + z + a^2 - b^2 = 0 \end{aligned}$$

a normálu charakterizují rovnice

$$(55) \quad \begin{aligned} ((X - A) \cdot T^1(a, b)) &= (x - a) + 2a(z - (a^2 - b^2)) = 0, \\ ((X - A) \cdot T^2(a, b)) &= (y - b) - 2b(z - (a^2 - b^2)) = 0. \end{aligned}$$

Standardní parametrické popisy hyperbolických paraboloidů charakterizovaných rovnicemi $y = x^2 - z^2$ a $x = y^2 - z^2$ se dostanou permutacemi $(i_1, i_2, j_1) = (1, 3, 2)$ a $(i_1, i_2, j_1) = (2, 3, 1)$ souřadnic; jsou to tedy funkce

$$g(u, v) := (u, u^2 - v^2, v) \quad \text{a} \quad h(u, v) := (u^2 - v^2, u, v).$$

Rovnice tečných rovin a normál získáme z rovnic (54) a (55) týmiž permutacemi.

Příklad 15.7. Pomocí vektorové funkce $f := (\cos, \sin) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (třídy C_∞) lze vytvořit tři grafy, popsané standardními rovnicemi

$$(56) \quad (y, z) = f(x), \quad (x, z) = f(y), \quad (x, y) = f(z)$$

a standardními parametrizacemi

$$(57) \quad g(x) := (x, \cos x, \sin x), \quad h(y) := (\cos y, y, \sin y), \quad k(z) := (\cos z, \sin z, z).$$

Grafy se nazývají **závitnice** nebo **šroubovice** a liší se jen svou polohou v \mathbb{R}^3 .

Je-li $a = \frac{1}{3}\pi$, je $A := g(a) = (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ a $T := g'(a) = (a, -\sin a, \cos a) = (1, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ je tečný vektor křivky g v bodě a . Vektor $N^1 := (0, 1, \sqrt{3})$ je zřejmě kolmý k vektoru T a vektorový součin $N^2 := T \times N^1 = (-2, -\sqrt{3}, 1)$ je nejen kolmý k oběma vektorům T, N^1 , ale trojice $\{T, N^1, N^2\}$ je kladná ortogonální báze v \mathbb{R}^3 .

Z toho plyne, že

$$A + \lambda T = (\frac{1}{3}\pi + \lambda, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\lambda), \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

je parametrický popis tečny,

$$A + \mu_1 N^1 + \mu_2 N^2 = (\frac{1}{3}\pi - 2\mu_2, \frac{1}{2} + \mu_1 - \sqrt{3}\mu_2, \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\mu_1 + \mu_2), \quad (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,$$

parametrický popis normálové roviny křivky g v bodě a . Píšeme-li $X = (x, y, z)$, je tečna popsána rovnicemi $((X - A) \cdot N^j) = 0, j = 1, 2$, tj. rovnicemi $y + \sqrt{3}z = 2, 2x + \sqrt{3}y - z = \frac{2}{3}\pi$, zatímco normálová rovina má rovnici $((X - A) \cdot T) = 0$, tj. $2x - \sqrt{3}y + z = \frac{2}{3}\pi$.

Příklad 15.8. Standardním parametrickým popisem uzavřené „přední“ poloviny jednotkové sféry v \mathbb{R}^3 , tedy grafu s rovnicí $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, je funkce $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde

$$(58) \quad G(u, v) := (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v) \quad \text{a} \quad \Omega := \{(u, v); u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

G je však třídy C_1 jen v otevřeném kruhu $\{(u, v); u^2 + v^2 < 1\}$, protože výraz

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{-u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)^2 + \left(\frac{-v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}$$

nemá limitu⁷⁾, blíží-li se bod (u, v) z vnitřku jednotkového kruhu k jeho hranici, takže funkci f nelze rozšířit na funkci třídy C_1 v žádné otevřené množině mající neprázdný průnik s hranicí jednotkového kruhu. Všechny body této hranice jsou singulární.

Je-li $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, snadno zjistíme, že

$$(59) \quad G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ T^1 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, 0), \quad T^2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, 1), \quad N = (1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}).$$

Příslušná tečná rovina má tedy rovnici

$$(x - \frac{1}{2}\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}((y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{2})) = x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y + \frac{1}{2}\sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0,$$

což lze jednodušeji napsat jako $\sqrt{2}x + y + z = 2$. Normálu pak popisují rovnice $x = \sqrt{2}y$ a $x = \sqrt{2}z$.

⁷⁾ Výraz by měl limitu $+\infty$, kdybychom ze svých úvah nevyloučili nekonečné limity.

Cvičení

Pro každou z dále uvedených funkcí f najděte definiční obor a maximální množinu Ω , v níž je f hladkou nadplochou. Pro každý z uvedených bodů a najděte parametrický popis a rovnici (rovnice) tečné a normálové nadroviny nadplochy f v bodě a .⁸⁾ Body z \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^4 značíme (x, y) , (x, y, z) a (x_1, x_2, x_3, x_4) .

Křivky

$f(t) =$	$a =$
15.01^o . $(2 \cos t, 3 \sin t)$ (elipsa)	$\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi$
15.02^o . $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ (cykloida)	$-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$
15.03^o . $(2 \cos t + \cos 2t, 2 \sin t + \sin 2t)$ (kardioida)	$\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi$
15.04^o . $(3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t)$ (astroida)	$\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi$
15.05^o . $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ (logaritmická spirála)	$\frac{1}{2}\pi, \pi$
15.06^o . $(\lg t \sin t, \lg t \cos t)$	$1, e$
15.07^o . $\left(\frac{t}{t^3+1}, \frac{t^2}{t^3+1}\right)$ (Descartův list)	$-2, 0$
15.08^o . $(\cos t + \sin 2t, \sin t + \cos 2t)$ (trojlístek)	$0, \frac{1}{6}\pi$
15.09^o . $\left(\frac{\cos^3 t}{\sin t}, \cos^2 t\right)$ (Dioklova kissoida)	$\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi$
15.10^o . $(t, t - \sin t)$	$\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi$
15.11^o . $(\sqrt{\cos 2t} \cos t, \sqrt{\cos 2t} \sin t)$ (lemniskata)	$\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi$
15.12^o . $(\cos 2t, \cos 2t \operatorname{tg} t)$ (strofoida)	$\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{3}\pi$
15.13^o . $(\cos t + \sin 3t, \sin t + \cos 3t)$ (čtyřlístek)	$\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi$
15.14^o . $(t \cos t, t \sin t)$ (Archimedova spirála)	$0, \frac{1}{2}\pi$
15.15^o . $((2 \cos t + 1) \cos t, (2 \cos t + 1) \sin t)$ (Pascalova závitnice)	$\frac{1}{3}\pi, \pi$
15.16^o . $(2 \cos t, 3 \sin t, \frac{1}{2}t)$ (eliptická závitnice)	$\frac{1}{3}\pi, \pi$
15.17^o . $(\cos t, \sin t, \sin t \cos t)$	$\pi, \frac{5}{6}\pi$

⁸⁾ K tomu je nutné znát $f(a)$ a příslušné tečné a normálové vektory. Protože sestavit z nich parametrický popis žádaných nadrovin je triviální a protože nechci rozsah knihy neúměrně zvětšovat, najde čtenář v seznamu řešení jen koeficienty rovnic všech těchto nadrovin (které se složkami tečných a normálových vektorů známým způsobem souvisí).

15.18⁰ . $(\sin t, \sin^2 t, \sin^3 t)$	$\pi, -\frac{1}{6}\pi$
15.19⁰ . $(t^2, t^3 - 1, t^3 + 1)$	1, 3
15.20⁰ . $(\arcsin t, \arccos t, t^2)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$
15.21⁰ . $(\sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t)$	$\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{3}\pi$
15.22⁰ . $(\operatorname{arctg} t, \lg(1+t^2), \operatorname{arccotg} t)$	$0, \sqrt{3}$
15.23⁰ . $(t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t)$	$\pi, -\frac{1}{2}\pi$
15.24⁰ . $(2 \sin t + \sin 2t, 2 \cos t - \cos 2t, \sin t)$	$\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi$
15.25⁰ . $(\lg t \cos \pi t, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$	1, 2
15.26. (t, t^2, t^3, t^4)	2, -1
15.27. $(1 - \sin t, 2 - \sin 2t, 3 - \sin 3t, 4 - \sin 4t)$	$\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi$
15.28. $(\operatorname{arctg} t, \operatorname{arctg} t^{-1}, \lg(1+t^2), \lg(1+t^{-2}))$	1, -1
15.29. $(\lg t, t \lg t, t \lg^2 t, t^2 \lg^2 t)$	1, e^{-1}
15.30. $(\sin \pi t, \cos \pi t, e^t \sin \pi t, e^t \cos \pi t)$	0, -2

Plochy

$f(u, v) =$	$a =$
15.31⁰ . $(u, u + v^2, u^2 - v)$	(0, 1), (1, -1)
15.32⁰ . $(u + v, u - v, u^3 + v^3)$	(2, 1), (1, -1)
15.33⁰ . $(u^2 - uv, uv + v^2, u^2v + uv^2)$	(1, 1), (1, -1)
15.34⁰ . $(u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3)$	(1, -2), (-1, 2)
15.35⁰ . $(uv^{-1}, u^{-1}, u^2 - v^2)$	(1, -1), (1, 2)
15.36⁰ . $(u^2, uv^{-1}, u^{-1}v)$	(-1, -2), (2, 2)
15.37⁰ . $(uv^2, uv^{-1}, \lg(uv))$	(1, 1), (-2, -1)
15.38⁰ . $(\lg(u + v), \lg(u - v), \lg(u^2 - v^2))$	(2, 1), (3, -2)
15.39⁰ . $(u^2, uv, \sin(\pi uv))$	(1, 1), $(\frac{1}{2}, 2)$
15.40⁰ . $(\sin u, \sin v, u - v)$	(0, 0), $(\pi, \frac{1}{2}\pi)$
15.41⁰ . $(\sin(u - v), \cos(u - v), u + v)$	$(\frac{1}{2}\pi, \pi), (\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$

- 15.42^o. $((1 + |u|) \cos v, (1 + |u|) \sin v, |u|)$ $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi), (\pi, \pi)$
- 15.43^o. $(\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u \cos v)$ $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi), (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$
- 15.44^o. $(e^{u+v}, e^u + e^v, e^u - e^v)$ $(0, 0), (1, -1)$
- 15.45^o. $(e^{uv}, e^{u+v}, e^{u-v})$ $(1, 1), (-1, 1)$
- 15.46^o. (ue^v, uve^{u-v}, ve^u) $(1, 1), (-1, 1)$
- 15.47^o. $(\lg(1 + u + v), \lg(1 - u + v), \lg(1 + u - v))$ $(1, 1), (4, 4)$
- 15.48^o. $(\arctg u, \lg(uv), \arctg v)$ $(1, 1), (-1, -1)$
- 15.49^o. $(\arctg(uv^{-1}), \lg(1 + uv), \arctg(u^{-1}v))$ $(1, 1), (\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- 15.50^o. $(\operatorname{arccotg}(uv), \operatorname{arccotg}(uv^{-1}), \operatorname{arccotg}(u^{-1}v))$ $(1, -1), (-\sqrt{3}, 1)$
- 15.51^o. $(\cos v, \sin v, u)$ (válec $x^2 + y^2 = 1$) $(1, \frac{1}{6}\pi), (-1, -\frac{1}{4}\pi)$
- 15.52^o. $(u \cos v, u \sin v, u)$ (kužel $x^2 + y^2 = z^2$) $(1, \frac{1}{4}\pi), (-1, -\frac{1}{3}\pi)$
- 15.53^o. $(v \sin u, v \cos u, v^2)$ (paraboloid $x^2 + y^2 = z$) $(0, 1), (\frac{1}{4}\pi, -1)$
- 15.54^o. $(4 \cos u \cos v, 3 \sin u \cos v, 2 \sin v)$ $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi), (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$
(elipsoid $(\frac{1}{4}x)^2 + (\frac{1}{3}y)^2 + (\frac{1}{2}z)^2 = 1$)
- 15.55^o. $(\cosh^2 v, \sinh v, u)$ (parabolický válec $x = y^2 + 1$) $(2, 0), (1, -1)$
- 15.56^o. $(\cosh v, \sinh v, u)$ $(0, 1), (1, -1)$
(půl hyperbolického válce $x^2 - y^2 = 1$)
- 15.57^o. $(u \cosh v, u \sinh v, u^2)$ $(-1, 0), (1, -1)$
(část hyperbolického paraboloidu $x^2 - y^2 = z$)
- 15.58^o. $(\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, \sinh v)$ $(\frac{1}{2}\pi, 1), (-\frac{1}{4}\pi, -1)$
(1-dílný hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$)
- 15.59^o. $(\cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v, \sinh v)$ $(-1, 0), (0, -1)$
(půl 2-dílného hyperboloidu $x^2 - y^2 - z^2 = 1$)
- 15.60^o. $((3 + \cos u) \cos v, (3 + \cos u) \sin v, \sin u)$ (anuloid) $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi), (\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi)$
- 15.61. $(u \sin v, v \sin u, u \cos v, v \cos u)$ $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi), (\frac{1}{2}\pi, -\pi)$
- 15.62. $(u + v, u - v, uv, uv^{-1})$ $(1, 2), (-2, -2)$
- 15.63. (u^3, u^2v, uv^2, v^3) $(1, -1), (1, 2)$

- 15.64.** $(uv^{-1}, u^{-1}v, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$ $(1, 2), (1, 1)$
- 15.65.** $(\sin(u+v), \cos(u+v), \sin(u-v), \cos(u-v))$ $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi), (\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$
- 15.66.** $(\operatorname{arctg} u, \operatorname{arctg} v, \operatorname{arctg}(uv^{-1}), \operatorname{arctg}(u^{-1}v))$ $(1, -1), (\sqrt{3}, 1)$
- 15.67.** $(\lg(u+v), \lg(u-v), \lg(uv), \lg(uv^{-1}))$ $(2, 1), (3, 1)$
- 15.68.** $(\operatorname{arctg} u, \operatorname{arctg} v, \lg(1+u^2), \lg(1+v^2))$ $(1, 1), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
- 15.69.** $(\sin u \sinh v, \sin u \cosh v, \cos u \sinh v, \cos u \cosh v)$ $(\pi, 1), (-\frac{1}{2}\pi, -1)$
- 15.70.** $((1+u^2) \cos \pi v, (1+u^2) \sin \pi v,$
 $(1+v^2) \cos \pi u, (1+v^2) \sin \pi u)$ $(1, \frac{1}{2}), (-1, -1)$

Křivé prostory

$$f(u, v, w) = \quad a =$$

- 15.71.** $(uvw, uvw^{-1}, u(vw)^{-1}, (uvw)^{-1})$ $(1, 1, 1), (-2, 1, -1)$
- 15.72.** $(\operatorname{arctg}(uvw^{-1}), \lg u, \lg v, \lg w)$ $(1, 1, 1), (2, 1, 2)$
- 15.73.** $(u \cos w, u \sin w, v \cos w, v \sin w)$ $(1, -1, \frac{1}{3}\pi), (2, 1, -\frac{1}{6}\pi)$
- 15.74.** $(u \sin v \sin w, u \sin v \cos w,$
 $u \cos v \sin w, u \cos v \cos w)$ $(1, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi), (-1, \frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi)$
- 15.75.** $(\cos u \cos v \cos w, \sin u \cos v \cos w,$
 $\sin v \cos w, \sin w)$ $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi), (-\frac{1}{6}\pi, 0, \frac{1}{6}\pi)$
 (jednotková sféra v \mathbb{R}^4)

* * *

Pro každou z následujících standardních rovnic grafů najděte 1) standardní parametrický popis příslušné nadplochy (křivky, plochy, křivého trojrozměrného prostoru), 2) maximální množinu, v níž je hladká, 3) parametrický popis a rovnici (rovnice) tečné a normálové nadroviny v předepsaném bodě a .

Grafy

$$\text{rovnice:} \quad a =$$

- 15.76^o.** $y = \arcsin x$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- 15.77^o.** $y = \arccos(1 - \sin^4 x)^2$ $0, \frac{1}{2}\pi$

15.78^o . $x = \sqrt{y}$	1, 2
15.79^o . $x = \sqrt{1 - y^2}$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
15.80^o . $(y, z) = (x^{4/3}, x^{5/3})$	-1, 8
15.81^o . $(x, y) = (\arcsin z, \arccos z)$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$
15.82^o . $(x, y) = (\operatorname{arctg} z, \operatorname{arccotg} z)$	-1, $\sqrt{3}$
15.83^o . $(x, z) = (\cos^2 y, \sin^2 y)$	$\frac{1}{4}\pi, -\frac{5}{6}\pi$
15.84^o . $(y, z) = (\sinh x, \cosh x)$	0, -1
15.85^o . $(x_2, x_3, x_4) = (x_1^2, x_1^3, x_1^4)$	1, -1
15.86^o . $(x_1, x_2, x_4) = (\lg x_3, \lg^2 x_3, \lg^3 x_3)$	1, e
15.87^o . $(x_1, x_2, x_3) = (x_4 - 1 , x_4 - 2 , x_4 - 3)$	$0, \frac{3}{2}$
15.88^o . $z = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
15.89^o . $y = \frac{x^2 + z^2}{x^2 - z^2}$	(2, 0), (-1, -2)
15.90^o . $y = \sqrt{x^2 + z^2}$	(3, 4), (-1, -1)
15.91^o . $x = \sqrt{yz}$	(2, 8), (-4, -9)
15.92^o . $z = \arccos(xy)$	$(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1), (-\frac{1}{2}, 1)$
15.93^o . $y = \frac{\sin(x+z)}{\sin(x-z)}$	$(\frac{1}{2}\pi, \pi), (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi)$
15.94^o . $x = \lg(1 + y^2 + z^2) + \operatorname{arctg}(y+z)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, -1)$
15.95. $(x_1, x_3) = (\sqrt{x_2 - x_4}, \sqrt{x_2 + x_4})$	(5, 4), (10, -6)
15.96. $(x_1, x_2) = \left(\sin \frac{\pi x_3}{x_4}, \cos \frac{\pi x_4}{x_3}\right)$	(1, 2), $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$
15.97. $(x_1, x_4) = (\lg(1 + x_2^2 - x_3^2), \lg(1 - x_2^2 + x_3^2))$	(1, 1), (3, -3)
15.98. $x_4 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
15.99. $x_2 = \frac{x_1^2 - x_3^2}{x_1^2 - x_4^2}$	(0, 1, 2), (-1, -1, 3)
15.100. $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{x_2 x_3}{x_4}$	$(-1, -1, \sqrt{3}), (1, -2, 2)$

Řešení

Užíváme tyto zkratky: **T** – tečna, **TR** – tečná rovina, **TP** – tečný (trojrozměrný) prostor, **N** – normála, **NR** – normálová rovina, **NP** – normálový (trojrozměrný) prostor.

V seznamu řešení Cv.13.01–13.15 následuje za informací o $\mathcal{D}(f)$, Ω , za středníkem a za „1) **T**:“ trojice čísel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, pro niž je $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ rovnice tečny, za „**N**:“ další trojice $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, pro niž je $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$ rovnice normály, a to v prvním z bodů a ; pak jsou uvedeny analogické dvě trojice čísel pro druhý z bodů a . Je-li $T = f'(a) = (t_1, t_2)$ tečný vektor, klademe $N := (-t_2, t_1)$, takže báze $\{T, N\}$ je vždy kladná. Vektory (α_1, β_1) , (α_2, β_2) jsou *kladnými* násobky vektorů N, T volenými tak, aby rovnice tečny a normály byly co nejjednodušší.

15.01. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T**: $-\sqrt{3}, -2, 4\sqrt{3}$; **N**: $-4, 2\sqrt{3}, -5$; 2) **T**: $-3\sqrt{3}, 2, 12$; **N**: $4, 6\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$.

15.02. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T**: $1, \sqrt{2} - 1, 2(1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}\pi$; **N**: $\sqrt{2} - 1, -1, \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)\pi$;

2) **T**: $1, 1, -2 - \frac{3}{2}\pi$; **N**: $1, -1, -\frac{3}{2}\pi$.

15.03. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{(2k - 1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T**: $1, -1, 3$; **N**: $-1, -1, 1$; 2) **T**: $-1, 1 + \sqrt{2}, 3(1 + \sqrt{2})$; **N**: $1 + \sqrt{2}, 1, -1$.

15.04. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T**: $-1, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$; **N**: $-\sqrt{3}, 1, 4$; 2) **T**: $1, -1, 2\sqrt{2}$; **N**: $-1, -1, 0$.

15.05. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T**: $-1, -1, e^{\pi/2}$; **N**: $-1, 1, -e^{\pi/2}$; 2) **T**: $1, -1, e^{\pi}$; **N**: $-1, -1, -e^{\pi}$.

15.06. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+$;

1) **T**: $-\cos 1, \sin 1, 0$; **N**: $\sin 1, \cos 1, 0$;

2) **T**: $e \sin e - \cos e, e \cos e + \sin e, -e$; **N**: $e \cos e + \sin e, \cos e - e \sin e, -1$.

15.07. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R} - \{-1\}$;

1) **T**: $20, 17, 4$; **N**: $119, -140, -114$; 2) **T**: $0, 1, 0$; **N**: $1, 0, 0$.

15.08. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T**: $-1, 2, -1$; **N**: $2, 1, -3$; 2) **T**: $\sqrt{3}, 1, -4$; **N**: $1, -\sqrt{3}, 0$.

15.09. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T**: $6\sqrt{3}, -10, 1$; **N**: $-10\sqrt{3}, -18, 7$; 2) **T**: $2, -4, 1$; **N**: $-4, -2, 3$.

15.10. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T**: $-1, 2, \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$; **N**: $4, 2, \sqrt{3} - 2\pi$;

2) **T**: $3 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$; **N**: $12, 6(2 - \sqrt{3}), 3(2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 4)\pi$.

$$15.11. \mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle (k - \frac{1}{4})\pi, (k + \frac{1}{4})\pi \rangle; \quad \Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((k - \frac{1}{4})\pi, (k + \frac{1}{4})\pi);$$

$$1) \mathbf{T}: 0, -2\sqrt{2}, 1; \mathbf{N}: -2\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}; \quad 2) \mathbf{T}: 0, 2\sqrt{2}, 1; \mathbf{N}: 2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}.$$

$$15.12. \mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}(2k - 1)\pi; k \in \mathbb{Z}\};$$

$$1) \mathbf{T}: 1, -1, 0; \mathbf{N}: -1, -1, 0; \quad 2) \mathbf{T}: 5, \sqrt{3}, 1; \mathbf{N}: \sqrt{3}, -5, 3\sqrt{3}.$$

$$15.13. \mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: -1, -6 - \sqrt{3}, 2(\sqrt{3} - 2); \mathbf{N}: -6 - \sqrt{3}, 1, 4;$$

$$2) \mathbf{T}: -6 - \sqrt{3}, 1, 2(\sqrt{3} - 2); \mathbf{N}: 1, 6 + \sqrt{3}, 4.$$

$$15.14. \mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: 0, 1, 0; \mathbf{N}: 1, 0, 0; \quad 2) \mathbf{T}: -4, -2\pi, \pi^2; \mathbf{N}: -\pi, 2, -\pi.$$

$$15.15. \mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: 1, -3\sqrt{3}, 8; \mathbf{N}: -3\sqrt{3}, -1, 4\sqrt{3}; \quad 2) \mathbf{T}: -1, 0, 1; \mathbf{N}: 0, 1, 0.$$

Báze zaměření roviny v \mathbb{R}^3 není určena jednoznačně. Čtenářovy výsledky by měly souhlasit s výsledky uvedenými zde, odvodí-li je tímto postupem: Splňuje-li tečný vektor $T = (t_1, t_2, t_3)$ podmínku $t_1^2 + t_2^2 > 0$, položí $N^1 = (-t_2, t_1, 0)$; je-li $t_1 = t_2 = 0$, položí $N^1 = (-t_3, 0, 0)$. V obou případech pak bude definovat $N^2 := T \times N^1$, takže báze $\{T, N^1, N^2\}$ bude ortogonální a kladná.

Řešení Cv. 15.16 – 15.25 jsou uspořádána podobně jako dosud, místo trojic čísel α, β, γ určujících přímku v \mathbb{R}^2 o rovnici $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ však zde jsou čtveřice $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koeficientů rovnic $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ rovin v \mathbb{R}^3 . Příмка v \mathbb{R}^3 je určena dvěma rovnicemi, protože je průnikem dvou rovin; čtveřice příslušných koeficientů jsou odděleny znakem \wedge logické konjunkce. Většina čtveřic koeficientů byla vhodným kladným faktorem upravena na jednodušší tvar.

$$15.16. \mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: -3, -2\sqrt{3}, 0, 12 \wedge 4\sqrt{3}, -6, 42, 5\sqrt{3} - 7\pi; \mathbf{NR}: -4\sqrt{3}, 6, 2, -5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi;$$

$$2) \mathbf{T}: 1, 0, 0, 2 \wedge 0, 1, 6, -3\pi; \mathbf{NR}: 0, -6, 1, -\frac{1}{2}\pi.$$

$$15.17. \mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: 1, 0, 0, 1 \wedge 0, 1, 1, 0; \mathbf{NR}: 0, -1, 1, 0;$$

$$2) \mathbf{T}: \sqrt{3}, -1, 0, 2 \wedge 1, \sqrt{3}, 4, \sqrt{3}; \mathbf{NR}: -4, -4\sqrt{3}, 4, \sqrt{3}.$$

$$15.18. \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}; \quad \Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}(2k - 1)\pi; k \in \mathbb{Z}\};$$

$$1) \mathbf{T}: 0, -1, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, 0; \mathbf{NR}: -1, 0, 0, 0;$$

$$2) \mathbf{T}: 4, 4, 0, 1 \wedge -12, 12, 32, -5; \mathbf{NR}: 32, -32, 24, 27.$$

$$15.19. \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}; \quad \Omega = \mathbb{R} - \{0\};$$

$$1) \mathbf{T}: -3, 2, 0, 3 \wedge -6, -9, 13, -20; \mathbf{NR}: 2, 3, 3, -8;$$

$$2) \mathbf{T}: -9, 2, 0, 29 \wedge -18, -81, 85, -112; \mathbf{NR}: 2, 9, 9, -504.$$

$$15.20. \mathcal{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle; \quad \Omega = (-1, 1);$$

- 1) **T**: $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -3, 3, 4\sqrt{3}, -\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$; **NR**: $8, -8, 4\sqrt{3}, \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$;
 2) **T**: $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 1, 2, -1$; **NR**: $2, -2, 2, -1$.

15.21. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

- 1) **T**: $-1, -1, 0, 1 \wedge 1, -1, 2\sqrt{3}, 2$; **NR**: $-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 4, -\sqrt{3}$;
 2) **T**: $-1, -1, 0, 1 \wedge -1, 1, 2\sqrt{3}, 2$; **NR**: $-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, -4, \sqrt{3}$.

15.22. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

- 1) **T**: $0, 1, 0, 0 \wedge 1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$; **NR**: $1, 0, -1, \frac{1}{2}\pi$;
 2) **T**: $-6, \sqrt{3}, 0, 2\pi - \sqrt{3} \lg 4 \wedge 2, 4\sqrt{3}, 26, -5\pi - 4\sqrt{3} \lg 4$;

NR: $3, 6\sqrt{3}, -3, -6\sqrt{3} \lg 4 - \frac{1}{2}\pi$.

15.23. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

- 1) **T**: $0, 1, 0, -2 \wedge 1, 0, 2, -\pi$; **NR**: $2, 0, -1, -2\pi$;
 2) **T**: $2, 2, 0, \pi - 4 \wedge 0, 0, 1, 1$; **NR**: $2, -2, 0, \pi$.

15.24. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

- 1) **T**: $1, -1, 0, -1 \wedge 0, 0, 1, -1$; **NR**: $-1, -1, 0, 3$;
 2) **T**: $-2, 0, 0, -3\sqrt{3} \wedge 0, -2, 0, 3$; **NR**: $0, 0, 2, \sqrt{3}$.

15.25. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+$;

- 1) **T**: $0, -1, 0, 1 \wedge 2\pi, 0, 1, 0$; **NR**: $-1, 0, 2\pi, 0$;
 2) **T**: $0, 1, 0, -1 \wedge -4\pi, 0, 1, 4\pi \lg 2$; **NR**: $1, 0, 4\pi, -\lg 2$.

Tečné vektory $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ všech pěti uvedených křivek v \mathbb{R}^4 splňují nerovnosti $t_1^2 + t_2^2 > 0$, $t_3^2 + t_4^2 > 0$; bylo proto možné položit $N^1 = (-t_2, t_1, 0, 0)$, $N^2 = (0, 0, -t_4, t_3)$, $N^3 = -T \times N^1 \times N^2$, což zaručilo, že ortogonální báze $\{T, N^1, N^2, N^3\}$ je kladná. Koeficientů určujících trojrozměrnou nadrovinu je pět, tečna je průnikem tří nadrovin, a je proto určena třemi pěticemi koeficientů.

15.26. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

- 1) **T**: $-4, 1, 0, 0, 4 \wedge 0, 0, -8, 3, 16 \wedge 292, 1168, -51, -136, -2672$;
NP: $1, 4, 12, 32, -626$;
 2) **T**: $2, 1, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 4, 3, 1 \wedge 5, 5, -10, 4, 8$; **NP**: $1, -2, 3, -4, 10$.

15.27. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

- 1) **T**: $-1, 0, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, 0, -4 \wedge 0, 2, 0, 1, -8$; **NP**: $0, 1, 0, -2, 6$;
 2) **T**: $-4, -2, 0, 0, 8 + 3\sqrt{3} \wedge 0, 0, -4, 6, 3\sqrt{3} - 12 \wedge -26, -26, 52, -10, 7 - 18\sqrt{3}$;

NP: $-2, 4, 12, 8, 3\sqrt{3} - 74$.

15.28. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R} - \{0\}$;

- 1) **T**: $1, 1, 0, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, 1, 1, -\lg 4 \wedge 2, -2, -1, 1, 0$; **NP**: $1, -1, 2, -2, 0$;
 2) **T**: $1, 1, 0, 0, \frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, -1, -1, \lg 4 \wedge 2, 2, -2, -1, 0$; **NP**: $1, -1, -2, 2, 0$.

15.29. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+$;

1) **TR:** $-1, 1, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, -1, 0, 0 \wedge 1, 1, 0, -1, 0$; **NP:** $1, 1, 0, 2, 0$;

2) **T:** $0, e, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 2e, -e^2, -4 \wedge 4 + e^2, 4 + e^2, 0, 2e^2, 8$;

NP: $e^4, 0, -e^3, -2e^2, e^4 + e^2 - 4$.

15.30. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $0, 1, 0, 0, -1 \wedge 1, 0, -1, \pi, -\pi \wedge 1 + \pi^2, 0, -\pi^2, -\pi, \pi$; **NP:** $\pi, 0, \pi, 1, -1$;

2) **T:** $0, 1, 0, 0, -1 \wedge 0, 0, -e^2, e^2\pi, -\pi \wedge 1 + \pi^2, 1 + \pi^2, 0, -e^2\pi, \pi$;

NP: $e^4\pi, 0, e^2\pi, e^2, -1$.

V řešení Cv. 15.31–15.60 je rovina $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ určena čtyřmi koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, přičemž normálový vektor $N = (\alpha, \beta, \gamma)$ je vždy kladným násobkem vektorového součinu $T^1 \times T^2$; normála k ploše je průnikem dvou rovin, příslušné čtveřice koeficientů jsou odděleny znakem \wedge .

15.31. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-1, 1, 2, 1$; **N:** $1, 1, 0, -1 \wedge 0, 2, -1, -3$;

2) **TR:** $3, 1, -2, -1$; **N:** $1, 1, 2, -7 \wedge 0, -2, -1, 6$.

15.32. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $15, 9, -2, -36$; **N:** $1, 1, 12, -112 \wedge 1, -1, 3, -29$;

2) **TR:** $3, 0, -1, 0$; **N:** $1, 1, 3, -2 \wedge 1, -1, 3, 2$.

15.33. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

1) **TR:** $-3, -3, 2, 2$; **N:** $1, 1, 3, -8 \wedge -1, 3, 3, -12$;

2) **TR:** $0, 1, -1, 0$; **N:** $3, -1, -1, -6 \wedge -1, -1, -1, 2$.

15.34. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v); u \neq v\}$;

1) **TR:** $12, -3, -2, 13$; **N:** $1, 2, 3, 12 \wedge 1, -4, 12, 105$;

2) **TR:** $-12, -3, 2, 13$; **N:** $1, -2, 3, -12 \wedge 1, 4, 12, -105$.

15.35. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $-2, 0, -1, -2$; **N:** $-1, -1, 2, 0 \wedge -1, 0, 2, -1$;

2) **TR:** $16, 6, -1, -17$; **N:** $2, -4, 8, 27 \wedge -2, 0, -32, -95$.

15.36. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $0, -4, -1, 4$; **N:** $-8, -2, 8, -7 \wedge 0, 2, -8, 15$;

2) **TR:** $0, -1, -1, 2$; **N:** $8, 1, -1, -32 \wedge 0, -1, 1, 0$.

15.37. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); uv > 0\}$;

1) **TR:** $2, 1, -3, -3$; **N:** $1, 1, 1, -2 \wedge 2, -1, 1, -1$;

2) **TR:** $2, -1, 6, 6(1 - \lg 2)$; **N:** $2, -2, -1, 8 + \lg 2 \wedge 4, 2, -1, 4 + \lg 2$.

15.38. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); |v| < u\}$;

1) **TR:** $1, 1, -1, 0$; **N:** $1, 3, 4, -5 \lg 3 \wedge 1, -3, -2, \lg 3$;

- 2) **TR:** $1, 1, -1, 0$; **N:** $5, 1, 6, -7 \lg 5 \wedge 5, -1, 4, -3 \lg 5$.
- 15.39.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v); u \neq 0\}$;
- 1) **TR:** $0, \pi, 1, -\pi$; **N:** $2, 1, -\pi, -3 \wedge 0, 1, -\pi, -1$;
- 2) **TR:** $0, \pi, 1, -\pi$; **N:** $4, 8, -8\pi, -9 \wedge 0, 1, -\pi, -1$.
- 15.40.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(\frac{1}{2}(2m+1)\pi, \frac{1}{2}(2n+1)\pi); m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$;
- 1) **TR:** $-1, 1, 1, 0$; **N:** $1, 0, 1, 0 \wedge 0, 1, -1, 0$;
- 2) **TR:** $0, -1, 0, 1$; **N:** $-1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, -1, \frac{1}{2}\pi$.
- 15.41.** $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $1, 0, 0, 1$; **N:** $0, 1, 1, -\frac{3}{2}\pi \wedge 0, -1, 1, -\frac{3}{2}\pi$;
- 2) **TR:** $0, -1, 0, 1$; **N:** $1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$.
- 15.42.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v); u \neq 0\}$;
- 1) **TR:** $0, -1, 1, 1$; **N:** $0, 1, 1, -1 - \pi \wedge -1, 0, 0, 0$;
- 2) **TR:** $1, 0, 1, 1$; **N:** $-1, 0, 1, -1 - 2\pi \wedge 0, -1, 0, 0$.
- 15.43.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(\frac{1}{2}m\pi, \frac{1}{2}m\pi + n\pi); m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$;
- 1) **TR:** $-1, -1, 0, \sqrt{2}$; **N:** $0, 0, -1, 0 \wedge 1, -1, 0, 0$;
- 2) **TR:** $-\sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}, 3$; **N:** $4, 4\sqrt{3}, -12, -\sqrt{3} \wedge 12, -4\sqrt{3}, -4, \sqrt{3}$.
- 15.44.** $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $-1, 1, 0, -1$; **N:** $1, 1, 1, -3 \wedge 1, 1, -1, -3$;
- 2) **TR:** $-1, \cosh 1, -\sinh 1, -1$; **N:** $1, e, e, -1 - 2e^2 \wedge e^2, e, -e, -2 - e^2$.
- 15.45.** $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $-e, 1, 0, 0$; **N:** $e, e^2, 1, -1 - e^2 - e^4 \wedge e, e^2, -1, 1 - e^2 - e^4$;
- 2) **TR:** $-1, 0, e, 0$; **N:** $e^3, e^4, e^2, -1 - e^2 - e^4 \wedge -e^3, e^4, -e^2, 1 + e^2 - e^4$.
- 15.46.** $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $1, 0, -1, 0$; **N:** $e, 2, e, -2 - 2e^2 \wedge 1, 0, 1, -2e$;
- 2) **TR:** $0, -e^2, 0, -1$; **N:** $e^3, 0, e, e^4 - 1 \wedge -e^3, 0, e, -e^4 - 1$.
- 15.47.** $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); u + v + 1 > 0, u - 1 < v < u + 1\}$;
- 1) **TR:** $0, 1, 1, 0$; **N:** $1, -3, 3, -\lg 3 \wedge 1, 3, -3, -\lg 3$;
- 2) **TR:** $0, 1, 1, 0$; **N:** $1, -9, 9, -\lg 9 \wedge 1, 9, -9, -\lg 9$.
- 15.48.** $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); uv > 0\}$;
- 1) **TR:** $2, -1, 2, -\pi$; **N:** $1, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge 0, 2, 1, -\frac{1}{4}\pi$;
- 2) **TR:** $-2, -1, -2, -\pi$; **N:** $1, -2, 0, \frac{1}{4}\pi \wedge 0, -2, 1, \frac{1}{4}\pi$.
- 15.49.** $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); 1 + uv > 0, u \neq 0 \neq v\}$;
- 1) **TR:** $1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$; **N:** $1, 1, -1, -\lg 2 \wedge -1, 1, 1, -\lg 2$;

- 2) **TR:** $1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$; **N:** $2, 3, -2, -3 \lg 4 \wedge -2, 3, 2, -3 \lg 4$.
15.50. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); u \neq 0 \neq v\}$;
- 1) **TR:** $0, 1, 1, -\frac{3}{2}\pi$; **N:** $1, 1, -1, -\frac{3}{4}\pi \wedge -1, 1, -1, \frac{3}{4}\pi$;
2) **TR:** $0, 1, 1, -\frac{3}{2}\pi$; **N:** $-1, -1, 1, \pi \wedge 1, -1, 1, -\frac{2}{3}\pi$.
15.51. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $-\sqrt{3}, -1, 0, 2$; **N:** $0, 0, 1, -1 \wedge -1, \sqrt{3}, 0, 0$;
2) **TR:** $-1, 1, 0, \sqrt{2}$; **N:** $0, 0, 1, 1 \wedge 1, 1, 0, 0$.
15.52. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v); u \neq 0\}$;
- 1) **TR:** $-1, -1, \sqrt{2}, 0$; **N:** $1, 1, \sqrt{2}, -2\sqrt{2} \wedge -1, 1, 0, 0$;
2) **TR:** $1, -\sqrt{3}, -2, 0$; **N:** $1, -\sqrt{3}, 2, 4 \wedge -\sqrt{3}, -1, 0, 0$.
15.53. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v); v \neq 0\}$
- 1) **TR:** $0, -2, 1, 1$; **N:** $1, 0, 0, 0 \wedge 0, 1, 2, -3$;
2) **TR:** $-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1, -1$; **N:** $-1, 1, 0, 0 \wedge 1, 1, -2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$.
15.54. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v); v \not\equiv \frac{1}{2}\pi \pmod{\pi}\}$;
- 1) **TR:** $0, 2, \sqrt{3}, -4\sqrt{3}$; **N:** $-1, 0, 0, 0 \wedge 0, -2\sqrt{3}, 4, 5$;
2) **TR:** $\sqrt{3}, -4, 12, -16\sqrt{3}$; **N:** $16, 4\sqrt{3}, 0, -7 \wedge -16\sqrt{3}, 36, 16, 27\sqrt{3}$.
15.55. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $-1, 0, 0, 1$; **N:** $0, 0, 1, -2 \wedge 0, 1, 0, 0$;
2) **TR:** $-\cosh 1, -\sinh 2, 0, (1 - \sinh^2 1) \cosh 1$;
N: $0, 0, 1, -1 \wedge -2 \sinh 1, 1, 0, (1 + 2 \cosh^2 1) \sinh 1$.
15.56. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $-\cosh 1, \sinh 1, 0, 1$; **N:** $0, 0, 1, 0 \wedge \sinh 1, \cosh 1, 0, -\sinh 2$;
2) **TR:** $-\cosh 1, -\sinh 1, 0, 1$; **N:** $0, 0, 1, -1 \wedge -\sinh 1, \cosh 1, 0, \sinh 2$.
15.57. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v); u \neq 0\}$;
- 1) **TR:** $-2, 0, -1, -1$; **N:** $1, 0, -2, 3 \wedge 0, -1, 0, 0$;
2) **TR:** $-2 \cosh 1, -2 \sinh 1, 1, 1$;
N: $\cosh 1, -\sinh 1, 2, -1 - 2 \cosh^2 1 \wedge -\sinh 1, \cosh 1, 0, \sinh 2$.
15.58. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $0, \cosh 1, -\sinh 1, -1$; **N:** $-1, 0, 0, 0 \wedge 0, \sinh 1, \cosh 1, -\sinh 2$;
2) **TR:** $\cosh 1, -\cosh 1, \sqrt{2} \sinh 1, -\sqrt{2}$;
N: $1, 1, 0, 0 \wedge -\sinh 1, \sinh 1, \sqrt{2} \cosh 1, \sqrt{2} \sinh 2$.
15.59. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $\cosh 1, \sinh 1, 0, -1$; **N:** $-\sinh 1, \cosh 1, 0, \sinh 2 \wedge 0, 0, 1, 0$;

2) **TR:** $\cosh 1, 0, \sinh 1, -1$; **N:** $0, 1, 0, 0 \wedge -\sinh 1, 0, \cosh 1, \sinh 2$.

15.60. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $0, 0, -1, 1$; **N:** $0, -1, 0, 3 \wedge -1, 0, 0, 0$;

2) **TR:** $0, 1, -1, 3 + \sqrt{2}$; **N:** $0, 1, 1, 3 \wedge 1, 0, 0, 0$.

Trojrozměrné nadroviny $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 = 0$ jsou ve cvičeních 15.61–15.70 určeny pěti koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, tečné i normálové roviny jsou průniky dvou takových nadrovin. První čtveřice koeficientů rovnic normálových rovin jsou v dalším vždy kladnými násobky vektorů T^1, T^2 . Chceme-li tečné roviny popisovat co nejjednodušeji, je nutný individuální přístup k hledání vektorů N^1, N^2 . Někdy je aspoň jeden z těchto vektorů patrný na první pohled, jindy nezbývá než řešit rovnice $(T^1 \cdot N) = 0, (T^2 \cdot N) = 0$; máme-li již N^1 , lze definovat N^2 jako *záporný* násobek vektorového součinu $T^1 \times T^2 \times N^1$, jehož výpočet může ovšem chvilku trvat. Bez ohledu na metodu hledání vektorů N^1, N^2 je báze $\{T^1, T^2, N^1, N^2\}$ dále uvedených vektorů vždy kladná.

15.61. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $\sqrt{2}, -\pi, -\sqrt{2}, 0, \frac{1}{4}\pi^2 \wedge -\sqrt{2}\pi, 0, -\sqrt{2}\pi, -8, \pi^2$;

NR: $\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}\pi, -\pi \wedge \sqrt{2}\pi, 4, -\sqrt{2}\pi, 0, -\pi$;

2) **TR:** $0, 0, 2\pi, 2, \pi^2 \wedge -2, -\pi, 0, 0, -\pi^2$; **NR:** $0, 0, -2, 2\pi, -\pi \wedge -\pi, 2, 0, 0, 2\pi$.

15.62. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); v \neq 0\}$;

1) **TR:** $2, 2, -1, -4, 0 \wedge 11, 1, -8, 8, -20$; **NR:** $4, 4, 8, 2, -25 \wedge 8, -8, 8, -2, -47$;

2) **TR:** $2, 1, 1, 2, 2 \wedge 2, -1, 1, -2, 6$; **NR:** $2, 2, -4, -1, 25 \wedge 2, -2, -4, 1, 23$.

15.63. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

1) **TR:** $1, 2, 1, 0, 0 \wedge -2, -1, 4, 3, 0$ **NR:** $3, -2, 1, 0, -6 \wedge 0, 1, -2, 3, 6$;

2) **TR:** $4, 0, -3, 1, 0 \wedge -4, 8, -5, 1, 0$; **NR:** $3, 4, 4, 0, -27 \wedge 0, 1, 4, 12, -114$.

15.64. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $4, 1, 0, 0, -4 \wedge -32, 128, 85, 51, -240$;

NR: $2, -8, 8, 8, -1 \wedge -2, 8, -32, 32, -271$;

2) **TR:** $1, 1, 0, 0, -2 \wedge -1, 1, 1, 0, 0$; **NR:** $-1, 1, 2, 2, -4 \wedge -1, 1, -2, 2, -4$.

15.65. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $1, -1, 0, 0, -\sqrt{2} \wedge 0, 0, -1, 1, -\sqrt{2}$;

NR: $-1, -1, 1, 1, 0 \wedge -1, -1, -1, -1, 0$;

2) **TR:** $1, \sqrt{3}, 0, 0, -2 \wedge 0, 0, 1, 0, -1$; **NR:** $\sqrt{3}, -1, 0, -2, 0 \wedge \sqrt{3}, -1, 0, 2, 0$.

15.66. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $0, 0, 1, 1, \frac{1}{2}\pi \wedge -2, -2, -1, 1, 0$; **NR:** $1, 0, -1, 1, -\frac{1}{4}\pi \wedge 0, 1, -1, 1, \frac{1}{4}\pi$;

2) **TR:** $0, 0, 2, 2, -\pi \wedge 8, -4\sqrt{3}, -4, 4, (\sqrt{3} - 2)\pi$;

NR: $1, 0, 1, -1, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 4\sqrt{3}, -6, 6, (1 - \sqrt{3})\pi.$

15.67. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v); u > 0, 0 < v < u\};$

1) **TR:** $-3, -1, -1, 1, -3 \lg 3 \wedge -3, -5, 4, 8, 3(\lg 3 - 4 \lg 2);$

NR: $2, 6, 3, 3, -2(\lg 3 + 3 \lg 2) \wedge 1, -3, 3, -3, -\lg 3;$

2) **TR:** $0, -2, 1, 2, 2 \lg 2 - 3 \lg 3 \wedge -36, 8, 14, 1, 64 \lg 2 - 15 \lg 3;$

NR: $3, 6, 4, 4, -12 \lg 2 - 8 \lg 3 \wedge 1, -2, 4, -4, 0.$

15.68. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2;$

1) **TR:** $2, 0, -1, 0, \lg 2 - \frac{1}{2}\pi \wedge 0, 2, 0, -1, \lg 2 - \frac{1}{2}\pi;$

NR: $1, 0, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi - \lg 4 \wedge 0, 1, 0, 2, -\frac{1}{4}\pi - \lg 4;$

2) **TR:** $6, 0, \sqrt{3}, 0, 2\pi - \sqrt{3} \lg 4 \wedge 0, 6, 0, \sqrt{3}, 2\pi - \sqrt{3} \lg 4;$

NR: $1, 0, -2\sqrt{3}, 0, \frac{1}{3}\pi + 2\sqrt{3} \lg 4 \wedge 0, 1, 0, -2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi + 2\sqrt{3} \lg 4.$

15.69. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2;$

1) **TR:** $0, 0, \sinh 1, -\cosh 1, -1 \wedge 1 + e^2 + e^4 + e^6, 1 - e^2 + e^4 - e^6, 0, 0, 0;$

NR: $-\sinh 1, -\cosh 1, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, -\cosh 1, -\sinh 1, -\sinh 2;$

2) **TR:** $\sinh 1, \cosh 1, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 1 + e^2 + e^4 + e^6, -1 + e^2 - e^4 + e^6, 0;$

NR: $0, 0, -\sinh 1, \cosh 1, 0 \wedge -\cosh 1, \sinh 1, 0, 0, \sinh 2.$

15.70. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2;$

1) **TR:** $-1, 0, 2\pi, 0, \frac{5}{2}\pi \wedge 0, 5\pi, 0, 8, -10\pi;$

NR: $0, 2, 0, -\frac{5}{4}\pi, -4 \wedge -2\pi, 0, -1, 0, -\frac{5}{4};$

2) **TR:** $\pi, 0, 0, 1, 2\pi \wedge 0, 1, \pi, 0, 2\pi;$ **NR:** $1, 0, 0, -\pi, 2 \wedge 0, -\pi, 1, 0, 2.$

V následujících pěti příkladech má křivý prostor v bodě a trojrozměrnou tečnou nadrovinu a jeho normála je průnikem tří trojrozměrných nadrovin. Normálový vektor je vždy záporným násobkem vektoru $T^1 \times T^2 \times T^3$.

15.71. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v, w); uvw \neq 0\};$

1) **TP:** $-1, 0, 0, -1, 2;$ **N:** $1, 1, 1, -1, -2 \wedge 1, 1, -1, -1, 0 \wedge 1, -1, -1, -1, 2;$

2) **TP:** $-1, 0, 0, -4, 4;$ **N:** $-8, -8, -8, 2, 47 \wedge 8, 8, -8, -2, -15 \wedge -8, 8, 8, 2, -17.$

15.72. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+^3;$

1) **TP:** $-2, 1, 1, -1, \frac{1}{2}\pi;$ **N:** $1, 2, 0, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge 1, 0, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge -1, 0, 0, 2, \frac{1}{4}\pi;$

2) **TP:** $-2, 1, 1, -1, \frac{1}{2}\pi;$

N: $1, 2, 0, 0, -\frac{1}{4}\pi - 2 \lg 2 \wedge 1, 0, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge -1, 0, 0, 2, \frac{1}{4}\pi - 2 \lg 2.$

15.73. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3; \Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, w); w \in \mathbb{R}\};$

1) **TP:** $\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, -1, 0;$ **N:** $1, \sqrt{3}, 0, 0, -2 \wedge 0, 0, 1, \sqrt{3}, 2 \wedge -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, -1, 0;$

2) **TP:** $1, \sqrt{3}, -2, -2\sqrt{3}, 0;$

$$\mathbf{N}: \sqrt{3}, -1, 0, 0, -4 \wedge 0, 0, \sqrt{3}, -1, -2 \wedge 2, 2\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, 0.$$

$$\mathbf{15.74.} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3; \Omega = \{(u, v, w); u \neq 0\};$$

$$1) \mathbf{TP}: -\sqrt{3}, 3, -1, \sqrt{3}, 0;$$

$$\mathbf{N}: -\sqrt{3}, -1, 3, \sqrt{3}, -4 \wedge 3, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, 0 \wedge -1, \sqrt{3}, \sqrt{3}, -3, 0;$$

$$2) \mathbf{TP}: 0, 0, 1, \sqrt{3}, 0; \mathbf{N}: -\sqrt{3}, 1, 0, 0, 2 \wedge 0, 0, -\sqrt{3}, 1, 0 \wedge -1, -\sqrt{3}, 0, 0, 0.$$

$$\mathbf{15.75.} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3; \Omega = \{(u, v, w); v \not\equiv \frac{1}{2}\pi \pmod{\pi}, w \not\equiv \frac{1}{2}\pi \pmod{\pi}\};$$

$$1) \mathbf{TP}: -\sqrt{3}, -1, -2, -2\sqrt{6}, 4\sqrt{2};$$

$$\mathbf{N}: -1, \sqrt{3}, 0, 0, 0 \wedge -\sqrt{3}, -1, 2, 0, 0 \wedge -3, -\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, 0;$$

$$2) \mathbf{TP}: -3, \sqrt{3}, 0, -2, 4; \mathbf{N}: 1, \sqrt{3}, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, 0, 0 \wedge -\sqrt{3}, 1, 0, 2\sqrt{3}, 0.$$

V řešení cvičení 15.76–15.100 je pro každou standardní rovnici grafu f uveden příslušný standardní parametrický popis G_f , jeho definiční obor a maximální množinu Ω , v němž je popis hladký; pak následují posloupnosti koeficientů rovnic tečny a normálové nadroviny pro obě volby bodu a . V případech, kdy normálová nadrovina nadplochy má dimenzi 2 nebo 3, bylo vhodné najít co nejjednodušší normálové vektory; omlouvám se proto čtenářům, že jsem při jejich hledání neužíval vždy též algoritmus, a to ani když šlo o příklady téhož typu.

$$\mathbf{15.76.} (x, \arcsin x); \mathcal{D}(G_f) = \langle -1, 1 \rangle; \Omega = (-1, 1);$$

$$1) \mathbf{T}: -6, 3, 3\sqrt{3} - \pi; \mathbf{N}: 6, 12, -3\sqrt{3} - 4\pi;$$

$$2) \mathbf{T}: -4\sqrt{2}, 4, \pi - 4; \mathbf{N}: 2\sqrt{2}, 4, \pi + 2.$$

$$\mathbf{15.77.} (x, \arccos(1 - \sin^4 x^2)); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: 0, 1, 0; \mathbf{N}: 1, 0, 0; 2) \mathbf{T}: 0, 2, -\pi; \mathbf{N}: 2, 0, -\pi.$$

$$\mathbf{15.78.} (\sqrt{y}, y); \mathcal{D}(G_f) = \langle 0, +\infty \rangle; \Omega = \mathbb{R}_+;$$

$$1) \mathbf{T}: -2, 1, 1; \mathbf{N}: 1, 2, -3; 2) \mathbf{T}: -2\sqrt{2}, 1, 2; \mathbf{N}: 1, 2\sqrt{2}, -5\sqrt{2}.$$

$$\mathbf{15.79.} (\sqrt{1 - y^2}, y); \mathcal{D}(G_f) = \langle -1, 1 \rangle; \Omega = (-1, 1);$$

$$1) \mathbf{T}: -2\sqrt{2}, -1, 3; \mathbf{N}: -1, 2\sqrt{2}, 0; 2) \mathbf{T}: -\sqrt{3}, -1, 2; \mathbf{N}: -1, \sqrt{3}, 0.$$

$$\mathbf{15.80.} (x, x^{4/3}, x^{5/3}); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: 4, 3, 0, 1 \wedge -3, 4, 5, -2; \mathbf{NR}: 3, -4, 5, 12;$$

$$2) \mathbf{T}: -8, 3, 0, 16 \wedge -60, -160, 73, 704; \mathbf{NR}: 3, 8, 20, -792.$$

$$\mathbf{15.81.} (\arcsin z, \arccos z, z); \mathcal{D}(G_f) = \langle -1, 1 \rangle; \Omega = (-1, 1);$$

$$1) \mathbf{T}: 1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -3, 3, 4\sqrt{3}, 2\sqrt{3} - \frac{5}{2}\pi; \mathbf{NR}: 4, -4, 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + \frac{10}{3}\pi;$$

$$2) \mathbf{T}: 1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 1, 2\sqrt{2}, -2; \mathbf{NR}: 2, -2, \sqrt{2}, -1.$$

$$\mathbf{15.82.} (\arctg z, \operatorname{arccotg} z, z); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R};$$

$$1) \mathbf{T}: 1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 1, 1, 1 - \pi; \mathbf{NR}: 1, -1, 2, 2 + \pi;$$

- 2) **T**: $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -2, 2, 1, \frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}$; **NR**: $1, -1, 4, -4\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi$.
15.83. $(\cos^2 y, y, \sin^2 y)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}$;
- 1) **T**: $-2, -2, 0, 1 + \frac{1}{2}\pi \wedge 2, -2, 4, \frac{1}{2}\pi - 3$; **NR**: $-1, 1, 1, -\frac{1}{4}\pi$;
2) **T**: $1, 0, 1, -1 \wedge 2\sqrt{3}, 6, -2\sqrt{3}, 5\pi - \sqrt{3}$; **NR**: $-2\sqrt{3}, 4, 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + \frac{10}{3}\pi$.
15.84. $(x, \sinh x, \cosh x)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}$;
- 1) **T**: $-1, 1, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, -1$; **NR**: $1, 1, 0, 0$;
2) **T**: $0, \sinh 1, \cosh 1, -1 \wedge 1, -\cosh 1, -\sinh 1, 1$;
NR: $1, \cosh 1, -\sinh 1, 1 + \sinh 2$.
15.85. $(x_1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}$;
- 1) **T**: $-2, 1, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, -4, 3, 1 \wedge 5, 10, -3, -4, -8$; **NP**: $1, 2, 3, 4, -10$;
2) **T**: $2, 1, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 4, 3, 1 \wedge -5, 10, 3, -4, -8$; **NP**: $1, -2, 3, -4, 10$.
15.86. $(\lg x_3, \lg^2 x_3, x_3, \lg^3 x_3)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}_+$;
- 1) **T**: $0, 1, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, 0 \wedge 1, 0, -1, 0, 11$; **NP**: $1, 0, 1, 0, -1$;
2) **T**: $e, 0, -1, 0, 0 \wedge 0, 3, 0, -2, -1 \wedge -2, 1, -3, e, 1 + 2e$; **NP**: $1, 2, e, 3, -6 - e^2$.
15.87. $(|x_4 - 1|, |x_4 - 2|, |x_4 - 3|, x_4)$; $\mathcal{D}(G_f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$;
- 1) **T**: $1, -1, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 1, 1, -3 \wedge 1, 1, -1, 1, 0$; **NP**: $-1, -1, -1, 1, 6$;
2) **T**: $1, 1, 0, 0, -1 \wedge 0, 0, 1, 1, -3 \wedge -1, 1, -1, 1, 0$; **NP**: $1, -1, -1, 1, 0$.
15.88. $(x, y, \sqrt{1+x^2-y^2})$; $\mathcal{D}(G_f) = \{(x, y) \mid |y| \leq \sqrt{1+x^2}\}$;
 $\Omega = \{(x, y) \mid |y| < \sqrt{1+x^2}\}$;
- 1) **TR**: $-1, 3, 2\sqrt{2}, -4$; **N**: $2\sqrt{2}, 0, 1, -\sqrt{2} \wedge 0, 2\sqrt{2}, -3, 0$;
2) **TR**: $1, -1, 2, -2$; **N**: $2, 0, -1, 2 \wedge 0, 2, 1, 0$.
15.89. $(x, \frac{x^2+z^2}{x^2-z^2}, z)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x, z) \mid z \neq \pm x\}$;
- 1) **TR**: $0, -1, 0, 1$; **N**: $1, 0, 0, -2 \wedge 0, 0, 1, 0$;
2) **TR**: $16, -9, -8, -15$; **N**: $27, 48, 0, 107 \wedge 0, -24, 27, 14$.
15.90. $(x, \sqrt{x^2+z^2}, z)$; $\mathcal{D}(G_f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;
- 1) **TR**: $3, -5, 4, 0$; **N**: $5, 3, 0, -30 \wedge 0, 4, 5, -40$;
2) **TR**: $-1, -\sqrt{2}, -1, 0$; **N**: $\sqrt{2}, -1, 0, 2\sqrt{2} \wedge 0, -1, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.
15.91. (\sqrt{yz}, y, z) ; $\mathcal{D}(G_f) = \{(y, z) \mid yz \geq 0\}$; $\Omega = \{(y, z) \mid yz > 0\}$;
- 1) **TR**: $4, -4, -1, 0$; **N**: $1, 1, 0, -6 \wedge 1, 0, 4, -36$;
2) **TR**: $12, 9, 4, 0$; **N**: $-3, 4, 0, 34 \wedge -1, 0, 3, 33$.
15.92. $(x, y, \arccos(xy))$; $\mathcal{D}(G_f) = \{(x, y) \mid |xy| \leq 1\}$; $\Omega = \{(x, y) \mid |xy| < 1\}$;
- 1) **TR**: $-2, \sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi$; **N**: $1, 0, 2, -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{3}\pi \wedge 0, \sqrt{3}, -3, \sqrt{3} + \frac{5}{2}\pi$;
2) **TR**: $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 3, 2(\sqrt{3} - \pi)$; **N**: $2\sqrt{3}, 0, -4, \sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi \wedge 0, \sqrt{3}, 1, -\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$.

- 15.93.** $\left(x, \frac{\sin(x+z)}{\sin(x-z)}, z\right); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x, z); x \not\equiv z \pmod{\pi}\};$
- 1) **TR:** $0, -1, 0, 1$; **N:** $1, 0, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, 1, -\pi$;
2) **TR:** $-2, -1, 0, 1 - \pi$; **N:** $1, -2, 0, 2 + \frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, 1, -\frac{1}{4}\pi$.
- 15.94.** $(\lg(1+y^2+z^2) + \operatorname{arctg}(y+z), y, z); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;
- 1) **TR:** $6, -7, -7, 7 - \frac{3}{2}\pi - 6 \lg \frac{3}{2}$;
N: $7, 6, 0, -3 - \frac{7}{4}\pi - 7 \lg \frac{3}{2} \wedge 7, 0, 6, -3 - \frac{7}{4}\pi - 7 \lg \frac{3}{2}$;
2) **TR:** $3, -5, -1, 4 - 3 \lg 3$; **N:** $5, 3, 0, -3 - 5 \lg 3 \wedge 1, 0, 3, 3 - \lg 3$.
- 15.95.** $(\sqrt{x_2 - x_4}, x_2, \sqrt{x_2 + x_4}, x_4); \mathcal{D}(G_f) = \{(x_2, x_4); |x_4| \leq x_2\},$
 $\Omega = \{(x_2, x_4); |x_4| < x_2\}$;
- 1) **TR:** $0, 1, -6, 1, 9 \wedge -2, 1, 0, -1, 1$; **NR:** $3, 6, 1, 0, -36 \wedge -3, 0, 1, 6, -24$;
2) **TR:** $0, 1, -4, 1, 4 \wedge -8, 1, 0, -1, 16$; **NR:** $1, 8, 2, 0, -88 \wedge -1, 0, 2, 8, 48$.
- 15.96.** $\left(\sin \frac{\pi x_3}{x_4}, \cos \frac{\pi x_4}{x_3}, x_3, x_4\right); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_3, x_4); x_3 \neq 0 \neq x_4\};$
- 1) **TR:** $1, 0, 0, 0, -1 \wedge 0, 1, 0, 0, -1$; **NR:** $0, 0, 1, 0, -1 \wedge 0, 0, 0, 1, -2$;
2) **TR:** $1, 0, 0, 0, -1 \wedge 0, 2\sqrt{3}, -4\pi, -6\pi, \sqrt{3}$;
NR: $0, 4\pi, 2\sqrt{3}, 0, 2\pi - \sqrt{3} \wedge 0, 9\pi, 0, 3\sqrt{3}, \sqrt{3} + \frac{9}{2}\pi$.
- 15.97.** $(\lg(1+x_2^2-x_3^2), x_2, x_3, \lg(1-x_2^2+x_3^2));$
 $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_2, x_3); x_3^2 - x_2^2 < 1, x_2^2 - x_3^2 < 1\}$;
- 1) **TR:** $1, 0, 0, 1, 0 \wedge -1, 2, -2, 0, 0$; **NR:** $2, 1, 0, -2, -1 \wedge -2, 0, 1, 2, -1$;
2) **TR:** $1, 0, 0, 1, 0 \wedge -1, 6, 6, 0, 0$; **NR:** $6, 1, 0, -6, -3 \wedge 6, 0, 1, -6, 3$.
- 15.98.** $(x_1, x_2, x_3, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2});$
 $\mathcal{D}(G_f) = \{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}; \Omega = \{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$;
- 1) **TP:** $1, 1, 1, 1, -2$; **N:** $1, 0, 0, -1, 0 \wedge 0, 1, 0, -1, 0 \wedge 0, 0, 1, -1, 0$;
2) **TP:** $-1, 1, -1, 1, -2$; **N:** $1, 0, 0, 1, 0 \wedge 0, 1, 0, -1, 0 \wedge 0, 0, 1, 1, 0$.
- 15.99.** $\left(x_1, \frac{x_1^2 - x_3^2}{x_1^2 - x_4^2}, x_3, x_4\right); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_1, x_3, x_4); x_4 \neq \pm x_1\};$
- 1) **TP:** $0, 4, -2, 1, -1$; **N:** $1, 0, 0, 0, 0 \wedge 0, 4, 8, 0, -9 \wedge 0, -4, 0, 16, -31$;
2) **TP:** $-1, 4, 1, 0, 0$; **N:** $4, 1, 0, 0, 4 \wedge 0, -1, 4, 0, 4 \wedge 0, 0, 0, 1, -3$.
- 15.100.** $\left(\operatorname{arctg} \frac{x_2 x_3}{x_4}, x_2, x_3, x_4\right); \mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_2, x_3, x_4); x_4 \neq 0\};$
- 1) **TP:** $-4, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1, \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$;
N: $-3, 4\sqrt{3}, 0, 0, 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi \wedge -3, 0, 4\sqrt{3}, 0, 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi \wedge -1, 0, 0, 4, \frac{1}{6}\pi - 4\sqrt{3}$;
2) **TP:** $-4, -2, 1, 1, 2 - \pi$;
N: $-1, 2, 0, 0, -2 - \frac{1}{4}\pi \wedge 1, 0, 4, 0, \frac{1}{4}\pi + 8 \wedge 1, 0, 0, 4, \frac{1}{4}\pi - 8$.