16. Lokální řešení rovnic

Definice. Zobrazení metrického prostoru X do m.p. Y se nazývá **otevřené**, je-li obrazem každé otevřené množiny $G \subset X$ množina otevřená v Y.

Věta 16.1. *Prosté zobrazení $F : X \to_{\text{na}} Y$ je otevřené, právě když je jeho inverzní zobrazení $F_{-1} : Y \to X$ spojité. Prosté spojité otevřené zobrazení $F : X \to_{\text{na}} Y$ je homeomorfní.*

Definice. Nechť $q \geq p$ jsou přirozená čísla, nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je otevřená množina a nechť zobrazení $F : \Omega \to \mathbb{R}^q$ je třídy C_1 v Ω; říkáme, že F je **regulární v** Ω, je-li hodnost matice $F'(x)$ rovna p pro každé $x \in \Omega$.

Poznámka 16.1. Je-li $q > p$, je regularita F totéž co hladkost nadplochy F; je-li $q = p$, je regularita F v Ω ekvivalentní s podmínkou, že $\det F' \neq 0$ všude v Ω.

Definice. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina, říkáme, že $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ je **difeomorfní zobrazení** (nebo: **difeomorfismus**), je-li prosté a regulární v Ω.

Věta 16.2. *Každé regulární zobrazení $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je otevřená množina, je otevřené. Je-li zobrazení $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ difeomorfní, je inverzní zobrazení F_{-1} difeomorfní v $F(\Omega)$ a*

$$\det F'(x) \cdot \det (F_{-1})'(F(x)) = 1 \quad \textit{pro všechna} \quad x \in \Omega . \tag{1}$$

Věta 16.3. (O lokální existenci inverzní funkce.) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a nechť funkce $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ je funkce třídy C_n, kde je buď $n \in \mathbb{N}$, nebo $n = \infty$. Je-li $a \in \Omega$ a $\det F'(a) \neq 0$, existuje otevřená množina $X \subset \Omega$ obsahující bod a tak, že platí:*

1. *$Y := F(X)$ je otevřená množina;*
2. *restrikce $F|X$ je prostá – značme ji krátce F;*[1]
3. *inverzní zobrazení $F_{-1} : Y \to X$ je třídy C_n v Y;*
4. *pro každé $y \in Y$ platí identity*

$$DF_{-1}(y) = (DF(F_{-1}(y)))_{-1}\,, \quad (F_{-1})'(y) = (F'(F_{-1}(y)))_{-1}\,. \quad \square \tag{2}$$

První identita v (2) je rovností mezi lineárními formami, druhá mezi maticemi. Na pravé straně první identity je funkce inverzní k diferenciálu funkce F v bodě $F_{-1}(y)$, v druhé identitě je vpravo matice inverzní k matici $F'(F_{-1}(y))$.

Množina X splňující podmínky věty 16.3 (a tedy ani restrikce $F|X$ a funkce k ní inverzní) není určena jednoznačně: Splňuje-li X podmínky věty a je-li $X_1 \subset X$ otevřená množina obsahující bod a, splňuje podmínky věty zřejmě i množina X_1.

[1]) Jen do konce této věty; při označení $F|X$ by byly identity (2) značně nepřehledné.

Splňuje-li však množina X podmínky věty a je-li $\tilde{X}$ další taková množina, je funkce $F|X \cap \tilde{X}$ restrikcí obou funkcí $F|X$, $F|\tilde{X}$, takže příslušná inverzní funkce $(F|X \cap \tilde{X})_{-1}$ je restrikcí obou inverzních funkcí $(F|X)_{-1}$, $(F|\tilde{X})_{-1}$. Protože obě množiny $F(X)$, $F(\tilde{X})$ jsou otevřené, platí totéž i o jejich průniku, takže existuje okolí bodu $F(a)$, v němž je $(F|X)_{-1} \equiv (F|\tilde{X})_{-1}$.

Jsou-li tedy splněny předpoklady věty 16.3 a nazveme-li **lokální inverzní funkcí funkce** F **u bodu** a každou funkci $G := (F|X)_{-1}$, kde X splňuje podmínky této věty, bude $G \equiv \tilde{G}$ v jistém $U(F(a))$ pro každé dvě takové funkce G a $\tilde{G}$.

Dále: Budeme říkat, že zobrazení F z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^p$ je **lokálně difeomorfní u bodu** $a \in \mathbb{R}^p$, existuje-li okolí $U(a)$, v němž je (restrikce) zobrazení F difeomorfní. □

Z V. 16.3 zřejmě plyne, že *funkce* $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *třídy* C_1 *je lokálně difeomorfní u každého bodu* $a \in \Omega$*, v němž je* $\det F'(a) \neq 0$*. Funkce regulární v* Ω *je lokálně difeomorfní u každého bodu* $a \in \Omega$.

Poznámka 16.2. V. 16.3 bohužel nedává žádný návod, jak lokální inverzní funkci sestrojit. Kombinujeme-li však tuto větu s větou o diferencování superpozice, můžeme v bodě $F(a)$ vypočítat všechny parciální derivace lokální inverzní funkce; je-li F třídy C_n, kde $n \in \mathbb{N}$, mohli bychom (teoreticky) vypočítat i všechny parciální derivace až do řádu n, a u funkcí třídy C_∞ dokonce parciální derivace všech řádů. V dalším ovšem uvidíme, že výpočty jsou obecně tím komplikovanější, čím je řád derivace vyšší, takže prakticky jsme schopni zvládnout jen derivace dosti nízkých řádů. Vysvětleme, jak se při tom postupuje:

Za situace z V. 16.3 označme $G := (F|X)_{-1}$ a pišme opět krátce F místo $F|X$. Protože v X je $G \circ F = \mathrm{Id}$, je $G'(F(x))F'(x) = \mathrm{Id}' = E$, kde E jsme označili jednotkovou matici typu $p \times p$; v její hlavní diagonále jsou jedničky a mimo tuto diagonálu nuly. V X je tedy $G' \circ F = (F')_{-1}$, kde vpravo je matice inverzní k matici F'; z toho plyne, že $G' = (F')_{-1} \circ G$ v Y.

Jak je patrné, derivaci G' dovedeme vypočítat, umíme-li invertovat matici F'; v netriviálních případech to bohužel bude možné jen v bodě a. Parciální derivace vyšších řádů získáme opakovaným diferencováním identity $G \circ F = \mathrm{Id}$, nebo ještě lépe (jak ukazuje početní praxe) identity $F \circ G = \mathrm{Id}$. Ukažme to na příkladech:

Příklad 16.1. Je-li

$$F(x, y) := (e^{xy} \sin x, e^{-xy} \cos y) \text{ pro všechna } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

je funkce F třídy C_∞, přičemž

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy}(y \sin x + \cos x) & x e^{xy} \sin x \\ -y e^{-xy} \cos y & -e^{-xy}(x \cos y + \sin y) \end{pmatrix} \tag{4}$$

všude v $\mathbb{R}^2$. Je-li $(a, b) = (0, \frac{1}{2}\pi)$, je $F(a, b) = (0, 0)$ a

$$F'(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det F'(a, b) = -1 \neq 0. \tag{4'}$$

Podle V.16.3 je tedy

$$G'(0,0) = (F'(a,b))_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

takže $\partial_1 G(0,0) = (1,0)$, $\partial_2 G(0,0) = (0,-1)$.

Příklad 16.2. Je-li

$$F(x,y) := (x^3 + xy^2 + y^3, x^2 + xy + y^2) \ \text{pro všechna} \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

a je-li $(a,b) = (1,1)$, je $F(a,b) = (3,3)$. Všude v $\mathbb{R}^2$ je

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy + 3y^2 \\ 2x + y & x + 2y \end{pmatrix}, \tag{7}$$

takže

$$\det F'(1,1) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3. \tag{8}$$

Podle V.16.3 existuje u bodu $(1,1)$ lokální inverzní funkce – označme ji G; podle téže věty je

$$G'(3,3) = (F'(1,1))_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Značíme-li (ξ,η) body z Y, znamená to, že

$$\frac{\partial G_1}{\partial \xi} = -1, \ \frac{\partial G_1}{\partial \eta} = \frac{5}{3}, \ \frac{\partial G_2}{\partial \xi} = 1, \ \frac{\partial G_2}{\partial \eta} = -\frac{4}{3} \ \text{ v bodě } (3,3). \tag{10}$$

Z identity $F(G(\xi,\eta)) \equiv (\xi,\eta)$ platné v Y plyne podle V.14.5 o diferencování superpozice, že v Y je

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G_2}{\partial \xi} \equiv (1,0), \ \ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G_1}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G_2}{\partial \eta} \equiv (0,1); \tag{11}$$

derivace funkce F jsou přitom v bodě $G(\xi,\eta)$, derivace funkce G v bodě (ξ,η). Derivujeme-li první z identit (11) znovu parciálně podle ξ, dostaneme:

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial G_2}{\partial \xi}\Big)\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2} + \\ &\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial G_2}{\partial \xi}\Big)\frac{\partial G_2}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 G_2}{\partial \xi^2} \equiv (0,0). \end{aligned} \tag{12}$$

Abychom z této vektorové rovnice (ekvivalentní se dvěma skalárními rovnicemi) mohli vypočítat $\partial^2 G/\partial \xi^2$, potřebujeme především vědět, že

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (6x,2), \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = (2y,1), \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (2x+6y,2), \tag{13}$$

a dosadit do hodnot těchto derivací $(1,1)$ za (x,y); užijeme-li dále hodnoty prvních parciálních derivací funkce F v bodě $(1,1)$ a funkce G v bodě $(3,3)$, získáme z (12) (po odstranění závorek) vektorovou rovnici

$$(6,2)(-1)^2 + (2,1)(-1) + (4,3)\,\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2}(3,3) +$$
$$(2,1)(-1) + (8,2)\,1^2 + (5,3)\,\frac{\partial^2 G_2}{\partial \xi^2}(3,3) = (0,0)$$

neboli

$$4\,\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2}(3,3) + 5\,\frac{\partial^2 G_2}{\partial \xi^2}(3,3) + 10 = 0\,,\quad 3\,\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2}(3,3) + 3\,\frac{\partial^2 G_2}{\partial \xi^2}(3,3) + 2 = 0\,.$$

Tyto dvě lineární rovnice (s determinantem (8)) mají řešení

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2}(3,3) = \frac{20}{3}\,,\ \frac{\partial^2 G_2}{\partial \xi^2}(3,3) = -\frac{22}{3}\,. \tag{14}$$

Kdybychom buď první z identit (11) parciálně derivovali podle η, nebo druhou z nich podle ξ, mohli bychom vypočítat smíšenou parciální derivaci $\partial^2 G/\partial x \partial y = \partial^2 G/\partial y\,\partial x$ v bodě $(3,3)$; parciální derivování druhé z identit (11) podle η by umožnilo najít derivaci $\partial^2 G/\partial \eta^2$ v tomto bodě. Doporučuji čtenáři, který se chce přesvědčit, že správně parciálně derivuje složené funkce, aby výpočet aspoň jedné z uvedených derivací provedl; pro kontrolu uvádím výsledky:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial \eta}(3,3) = \Big(-\frac{29}{3}\,,\frac{32}{3}\Big),\quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}(3,3) = \Big(\frac{128}{9}\,,-\frac{142}{9}\Big). \tag{15}$$

Podobně by se postupovalo při výpočtu parciálních derivací třetího, čtvrtého, atd. řádu funkce G v bodě $(3,3)$; jak již bylo řečeno, výpočty jsou obecně stále složitější. K výpočtu derivací n-tého řádu funkce G potřebujeme přitom (mj.) znát všechny parciální derivace všech řádů $< n$ této funkce.

* * *

Předpokládejme situaci z kapitoly 15, kdy byla dána přirozená čísla p, q a permutace $(i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q)$ čísel $(1,\ldots,p+q)$, kde $i_1 < \ldots < i_p$ a $j_1 < \ldots < j_q$. Body

$$z = (z_1,\ldots,z_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q} \tag{16}$$

zapisujme opět ve tvaru (x,y), kde

$$x = (x_1,\ldots,x_p) = (z_{i_1},\ldots,z_{i_p})\,,\ y = (y_1,\ldots,y_q) = (z_{j_1},\ldots,z_{j_q})\,, \tag{17}$$

prostor $\mathbb{R}^{p+q}$ považujme za kartézský součin prostorů $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^q$ generovaných i_1-ní až i_p-tou a j_1-ní až j_q-tou souřadnicovou osou v $\mathbb{R}^{p+q}$.

Je-li $F = (F_1, \dots, F_q)$ zobrazení z $\mathbb{R}^{p+q}$ do $\mathbb{R}^q$ a existují-li (v nějakém bodě nebo na nějaké množině) parciální derivace $\partial F_i / \partial y_j$, kde $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, q$, nazýváme determinant

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_q}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_q} \end{vmatrix} \tag{18}$$

jakobiánem funkcí $F_1, \dots, F_q$ vzhledem k proměnným (nebo: podle proměnných) $y_1, \dots, y_q$; matice o řádcích napsaných vpravo je tzv. **Jacobiho matice**.

Věta 16.4. (O lokálním řešení rovnic.) *Užívejme právě uvedené označení a předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$. Předpokládejme dále, že zobrazení F z $\mathbb{R}^{p+q}$ do $\mathbb{R}^q$ je třídy C_n (kde $n \in \mathbb{N}$ nebo $n = \infty$) v nějakém okolí bodu (a, b); předpokládejme konečně, že $F(a, b) = 0$ ($\in \mathbb{R}^q$) a že*

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(a, b) \neq 0\,. \tag{19}$$

Pak pro každé $\Delta > 0$ existují čísla $\delta \in (0, \Delta)$, $\eta \in (0, \Delta)$ a funkce $g : U(a, \delta) \to U(b, \eta)$ třídy C_n tak, že pro $x \in U(a, \delta)$, $y \in U(b, \eta)$ je rovnost $F(x, y) = 0$ ekvivalentní s rovností $y = g(x)$.

Poznámka 16.3. Právě vyslovená věta je známa spíše pod názvem *věta o implicitních funkcích*. Za jejích předpokladů lze rovnici $F(x, y) = 0$ (kde x a y jsou omezena na jistá vhodně zvolená okolí bodů a a b) jednoznačně vyřešit vzhledem k y v tom smyslu, že množina $\{(x, y);\ F(x, y) = 0\}$ všech nulových bodů funkce F (restringované na kartézský součin zmíněných okolí) je identická s grafem jisté funkce g, takže ji lze popsat rovnicí $y = g(x)$.

Vektorová rovnice $F(x, y) = 0$ je ekvivalentní se soustavou q skalárních rovnic

$$\begin{aligned} &F_1(z_1, \dots, z_{p+q}) = 0\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ &F_q(z_1, \dots, z_{p+q}) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

o q neznámých $y_1 = z_{j_1}, \dots, y_q = z_{j_q}$, kterou lze „lokálně jednoznačně řešit“ „v blízkosti bodu“ (a, b), čímž se neznámé y_j, $j = 1, \dots, q$, stanou funkcemi zbývajících p proměnných $x_1 = z_{i_1}, \dots, x_p = z_{i_p}$:

$$\begin{aligned} &y_1 = g_1(x_1, \dots, x_p)\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ &y_q = g_q(x_1, \dots, x_p)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Za právě popsané situace a při stejném označení budeme říkat, že **rovnice** (20) **definují u bodu** (a,b) **funkce** $y_1,\dots,y_q$ **implicitně**, a rovnosti (21) budeme nazývat **lokální řešení rovnic** (20) **u bodu** (a,b); funkci g (a rovnost $y = g(x)$) budeme nazývat **lokální řešení rovnice** $F(x,y) = 0$ **splňující podmínky** $b = g(a)$. Budeme pak také stručně říkat, že **rovnici** $F(x,y) = 0$ **lze u bodu** (a,b) **jednoznačně řešit vzhledem k** y.

Poznámka 16.4. Za předpokladů a označení z V. 16.4 je množina

$$\{(x,y) \in U(a,\delta) \times U(b,\eta)\,;\ F(x,y) = 0\} \tag{22}$$

všech kořenů funkce F v kartézském součinu uvedených okolí identická s grafem funkce g; protože funkce F je aspoň třídy C_1, je množina (22) geometrickým obrazem hladké p-rozměrné nadplochy s parametrickým popisem $(x, g(x))$, kde $x \in U(a,\delta)$. $\square$

Ačkoli V. 16.4 neříká, kterých hodnot funkce g nabývá v jednotlivých bodech x příslušného okolí $U(a,\delta)$ (kromě bodu a, v němž je hodnota rovna b), dovoluje spolu s V. 14.5 (o diferencování superpozice) najít všechny parciální derivace prvního řádu funkce g v bodě a. Je-li F třídy C_n, kde $n > 1$, můžeme – aspoň teoreticky, protože délka a obtížnost výpočtů obecně s rostoucím n rychle roste – počítat i parciální derivace vyšších řádů.

Vysvětleme příslušný postup na příkladech:

Příklad 16.3°. Nechť

$$F(x,y) := y^2 e^{x-1} - x^2 e^{1-y} \ \text{ pro všechna } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{23}$$

a nechť $(a,b) = (1,1)$; F je třídy C_∞, $F(a,b) = 0$ a

$$F'(x,y) = (y^2 e^{x-1} - 2x e^{1-y},\, 2y e^{x-1} + x^2 e^{1-y}),\ \ F'(1,1) = (-1, 3). \tag{24}$$

Vzhledem k tomu, že obě parciální derivace funkce F jsou v bodě (1,1) nenulové, definuje rovnice $F(x,y) = 0$ u bodu $(1,1)$ implicitně jak x jako funkci y, tak i y jako funkci x.

Vyšetřme třeba druhý z případů: Podle V. 16.4 existují čísla $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\eta \in \mathbb{R}_+$ a funkce $g : (1-\delta, 1+\delta) \to (1-\eta, 1+\eta)$ třídy C_∞ tak, že $g(1) = 1$ a že pro $(x,y) \in (1-\delta, 1+\delta) \times (1-\eta, 1+\eta)$ je rovnost $F(x,y) = 0$ ekvivalentní s rovností $y = g(x)$.

Protože identita $F(x, g(x)) \equiv 0$ platí všude v intervalu $(1-\delta, 1+\delta)$, je podle V. 14.5 také

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} g' \equiv 0\,; \tag{24}$$

pamatujme, že derivace funkce F jsou v bodě $(x, g(x))$, derivace funkce g v bodě x. Dosazením $x = 1$ do (24) získáme rovnici $-1 + 3g'(1) = 0$, takže $g'(1) = 1/3$.

Dalším diferencováním identity (24) dostaneme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,g' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,(g')^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\,g'' \equiv 0\,. \tag{25}$$

Protože derivace

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y^2 e^{x-1} - 2e^{1-y}\,,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2ye^{x-1} + 2xe^{1-y}\,,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2e^{x-1} - x^2 e^{1-y} \tag{26}$$

nabývají v bodě $(1,1)$ po řadě hodnot $-1, 4, 1$ a protože již víme, že $g'(1) = \frac{1}{3}$, z (26) snadno vypočteme, že $g''(1) = -16/27$.

Diferencováním (25) získáme identitu

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3\,\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\,g' + 3\,\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\,(g')^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\,(g')^3 + \\ 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,g'' + 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,g'g'' + \frac{\partial F}{\partial y}\,g''' \equiv 0\,;\end{gathered} \tag{27}$$

protože

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = y^2 e^{x-1},\ \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^{x-1} + 2e^{1-y},\ \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 2e^{x-1} - 2xe^{1-y},\ \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = x^2 e^{1-y}$$

a protože příslušné hodnoty v bodě $(1,1)$ jsou po řadě $1, 4, 0, 1$, je $g'''(1) = 8/9$.

Poznamenejme k tomu, že pro výpočet $g^{(n)}(1)$ potřebujeme znát hodnoty všech parciálních derivací všech řádů $k \le n$ funkce F v bodě $(1,1)$ a všech derivací $g^{(k)}(1)$, kde $k < n$. Všimněme si, že v identitě analogické identitám (24), (25), (27), v níž je však derivací nejvyššího řádu $g^{(n)}(1)$, je u této derivace (pro každé $n \in \mathbb{N}$) koeficient $(\partial F/\partial y)(1,1) \ne 0$; tím je zaručeno, že derivaci $g^{(n)}(1)$ lze z příslušné identity opravdu vypočítat.

Příklad 16.4. Nechť

$$F(x,y,z) := \sin x \cos y \cos z - xyz \ \text{ pro všechna } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \tag{28}$$

a nechť $(a,b,c) = (0,0,0)$; pak je $F(a,b,c) = 0$, funkce F je třídy C_∞ a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}\,(x,y,z) &= \cos x \cos y \cos z - yz\,,\\ \frac{\partial F}{\partial y}\,(x,y,z) &= -\sin x \sin y \cos z - xz\,,\\ \frac{\partial F}{\partial z}\,(x,y,z) &= -\sin x \cos y \sin z - xy\,,\end{aligned} \tag{29}$$

takže $F'(0,0,0) = (1,0,0)$. U počátku lze tedy rovnici $F(x,y,z) = 0$ lokálně rozřešit vzhledem k x, nejsou však splněny předpoklady věty 16.4 pro její lokální řešení ani vzhledem k y, ani vzhledem k z.

Podle V. 16.4 existují čísla $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\eta \in \mathbb{R}_+$ a funkce $g : U((0,0),\delta) \to U(0,\eta)$ třídy C_∞ tak, že množina všech nulových bodů funkce F ležících ve válci $(-\eta,\eta) \times U((0,0),\delta)$ je identická s grafem funkce g.

Z identity $F(g(y,z),y,z) \equiv 0$ platné v kruhu $U((0,0),\delta)$ plyne, že

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0\,,\ \ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 0\,; \tag{30}$$

protože obě derivace $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ jsou v počátku rovné nule, platí totéž o derivacích funkce g:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0) = 0\,. \tag{31}$$

Derivujeme-li první z identit (30) ještě jednou podle y, dostaneme identitu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \equiv 0\,; \tag{32}$$

protože se všechny tři derivace

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin x \cos y \cos z\,,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = -\cos x \sin y \cos z - z \tag{33}$$

v bodě $(0,0,0)$ anulují, platí totéž o $\partial^2 g/\partial y^2$ v bodě $(0,0)$.

Snadno ověříme, že v bodě $(0,0,0)$ jsou *všechny* parciální derivace druhého řádu funkce F rovny nule a že totéž platí i o všech parciálních derivacích druhého řádu funkce g v bodě $(0,0)$.

Příklad 16.5. Definujme funkci $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rovností $H := (F,G)$, kde pro všechna $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ je

$$F(x,y,z) := 1 - e^{xyz} + x + y + z\,,\ G(x,y,z) := x + 2y + 3z + 3xy + 2xz + yz\,; \tag{34}$$

nechť $(a,b,c) = (0,0,0)$. Funkce H je třídy C_∞, $H(a,b,c) = (0,0)$ a

$$\begin{aligned} H'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 1 - yze^{xyz} & 1 - xze^{xyz} & 1 - xye^{xyz} \\ 1 + 3y + 2z & 2 + 3x + z & 3 + 2x + y \end{pmatrix}, \\ H'(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{35}$$

Jakobiány

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\,,\ \ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\,,\ \ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \tag{36}$$

jsou v bodě $(0,0,0)$ jsou po řadě rovny 1, 2, 1, takže rovnice $H(x,y,z) = (0,0)$ má podle V. 16.4 u počátku lokální řešení vzhledem ke každé z dvojic (x,y), (x,z), (y,z).

Vyšetřme podrobněji řešení vzhledem k (y, z); je to jistá (vektorová) funkce $g = (g_1, g_2)$ reálné proměnné třídy C_∞ splňující podmínky $g(0) = (0, 0)$ a

$$H(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv (0, 0) \tag{37}$$

v jistém intervalu $(-\delta, \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$.

Derivováním (37) dostaneme identitu

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} g_1' + \frac{\partial H}{\partial z} g_2' \equiv (0, 0)\,; \tag{38}$$

dosadíme-li sem nalezené hodnoty parciálních derivací funkce H v počátku, získáme rovnice

$$1 + g_1'(0) + g_2'(0) = 0\,,\ 1 + 2g_1'(0) + 3g_2'(0) = 0\,, \tag{39}$$

z nichž plyne, že $g'(0) = (-2, 1)$.

Derivování (38) vede k identitě

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} g_1' + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} g_2'\Big) + \Big(\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} g_1' + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} g_2'\Big) g_1' + \frac{\partial H}{\partial y} g_1'' + \\ &\qquad \Big(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y} g_1' + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} g_2'\Big) g_2' + \frac{\partial H}{\partial z} g_2'' \equiv (0, 0)\,; \end{aligned} \tag{40}$$

protože derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= (-y^2 z^2 e^{xyz}, 0)\,, & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} &= (-z(1 + xyz) e^{xyz}, 3)\,, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} &= (-y(1 + xyz) e^{xyz}, 2)\,, & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= (-x^2 z^2 e^{xyz}, 0)\,, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} &= (-x(1 + xyz) e^{xyz}, 1)\,, & \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} &= (-x^2 y^2 e^{xyz}, 0) \end{aligned} \tag{41}$$

mají v bodě $(0, 0, 0)$ po řadě hodnoty $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(0, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ a protože $g'(0) = (-2, 1)$, plyne ze (40), že

$$g_1''(0) + g_2''(0) = 0\,,\quad 2g_1''(0) + 3g_2''(0) = 12\,, \tag{42}$$

takže $g''(0) = (-12, 12)$. $\square$

Definice. Je-li $f : X \to Y$, $A \in Y$ a je-li množina

$$\{x \in X\,;\ f(x) = A\} = f_{-1}(A) \tag{43}$$

neprázdná, nazýváme ji A-**hladinou** funkce f (v X).

Definice. Předpokládejme, že jsou splněny tyto podmínky: 1) $\Omega \subset \mathbb{R}^{p+q}$ je otevřená množina, 2) funkce $F = (F_1, \ldots, F_q) : \Omega \to \mathbb{R}^q$ je třídy C_1 (v Ω), 3) $A \in \mathbb{R}^q$, 4) množina

$$V := \{z \in \Omega;\ F(z) = A\} \tag{44}$$

není prázdná, 5) pro každé $z \in V$ je hodnost matice $F'(z)$ rovna q.

Pak říkáme, že V je p-**rozměrná varieta v** Ω (nebo: **varieta dimenze** p **v** Ω). Je-li $c \in V$ a leží-li *nenulový* vektor N v lineárním obalu vektorů

$$N^j := \operatorname{grad} F_j(c)\,,\ j = 1, \ldots, q\,, \tag{45}$$

říkáme, že N je **normálový vektor variety** V **v bodě** c; každý *nenulový* vektor T ortogonální ke všem vektorům (45) nazveme jejím **tečným vektorem v bodě** c. $\square$

V každém bodě c variety (44) jsou vzhledem k podmínce 5) vektory (45) lineárně nezávislé, a jejich lineární obal je tedy lineární podprostor dimenze q prostoru $\mathbb{R}^{p+q}$; jeho ortogonální doplněk (složený z nulového vektoru a všech tečných vektorů) má dimenzi p, a existují v něm proto báze $\{T^1, \ldots, T^p\}$ složené z p vektorů. Množina

$$\{c + \lambda_1 T^1 + \ldots + \lambda_p T^p;\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\} \tag{46}$$

je na bližší volbě takové báze nezávislá a nazývá se **tečná nadrovina variety** (44) v bodě c; množina

$$\{c + \mu_1 N^1 + \ldots + \mu_q N^q;\ (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q\} \tag{47}$$

je její **normálová nadrovina** v bodě c.

(46) a (47) jsou *parametrické popisy* tečné a normálové nadroviny variety (44) v bodě c; **rovnice** těchto nadrovin jsou

$$((z - c) \cdot \operatorname{grad} F_j(c)) = 0\,,\ j = 1, \ldots, q\,, \quad \text{a} \quad ((z - c) \cdot T^i) = 0\,,\ i = 1, \ldots, p\,. \tag{48}$$

Poznámka 16.5. Normálové vektory N^j variety jsou řádky matice F'; abychom našli p-tici lineárně nezávislých vektorů T^i k nim ortogonálních, stačí rozřešit soustavu rovnic

$$(\operatorname{grad} F_j(c) \cdot T) = 0 \ \text{ pro } \ j = 1, \ldots, q\,. \tag{50}$$

Je-li $p = 1$, je tečným vektorem např. vektor

$$T := \operatorname{grad} F_1(c) \times \ldots \times \operatorname{grad} F_q(c)\,. \tag{51}$$

V konkrétních situacích lze jeden, někdy i dva (lineárně nezávislé) tečné vektory najít „zkusmo“; pokud pak chybí *jediný* tečný vektor, lze jej definovat jako vektorový součin všech normálových vektorů a všech „uhodnutých“ tečných vektorů. [2])

[2]) Ačkoli se nám tato metoda může jevit na první pohled jako „nesystémová“, vede při dobré početní představivosti často nejrychleji k cíli; uvidíme to např. v Př. 16.6.

Poznámka 16.6. Často je dána funkce $F : \Omega^* \to \mathbb{R}^q$ a je třeba najít *maximální* otevřenou množinu $\Omega \subset \Omega^*$, v níž je množina (44) p-rozměrnou varietou; má-li Ω tuto vlastnost, říkáme, že body $z \in \Omega^* - \Omega$, pro něž je $F(z) = A$, jsou **singulární body** A-hladiny funkce F. Takové body buď nemají okolí, v němž je F třídy C_1, nebo je v nich hodnost matice F' menší než q.

Poznámka 16.7. Předpokládejme, že (44) je p-rozměrná varieta. Pak pro každé $c \in \Omega$, pro něž je $F(c) = A$, existuje q sloupců matice $F'(c)$ tak, že příslušný determinant není nulový. Nechť tyto sloupce odpovídají indexům $j_1 < \ldots < j_q$ a nechť $i_1 < \ldots < i_p$ jsou zbývající sloupce.

Pak při označení (16)$-$(17) nastane situace z věty 16.4, v níž je však F třeba nahradit funkcí $F - A$. Píšeme-li bod c ve tvaru (a, b), existují podle V.16.4 okolí $U(a, \delta)$, $U(b, \eta)$ a funkce $g : U(a, \delta) \to U(b, \eta)$ (třídy aspoň C_1) tak, že část množiny (44) ležící v $U(a, \delta) \times U(b, \eta)$ je identická s grafem funkce g, což je hladká p-rozměrná nadplocha. Tuto situaci charakterizujeme slovy, že *každá p-rozměrná varieta v $\mathbb{R}^{p+q}$ je u každého svého bodu lokálně grafem hladké q-rozměrné vektorové funkce p proměnných*. Obecně samozřejmě závisí jak p-tice „nezávislých“ proměnných $z_{i_1} = x_1, \ldots, z_{i_p} = x_p$, tak i q-tice „závislých“ proměnných $z_{j_1} = y_1, \ldots, z_{j_q} = y_q$ na volbě bodu c variety.

Předpokládejme pro jednoduchost, že v jistém bodě c variety (44) je

$$(i_1, \ldots, i_p) = (1, \ldots, p) \quad \text{a} \quad (j_1, \ldots, j_q) = (p + 1, \ldots, p + q)\,, \tag{52}$$

což znamená, že je nenulový jakobián

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_q)}{\partial(y_1, \ldots, y_q)}(c) = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_q)}{\partial(z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})}(c) \tag{53}$$

funkcí $F_1, \ldots, F_q$ podle *posledních* q proměnných.

Funkce $G(x) := (x, g(x))$, $x \in U(a, \delta)$, je standardní parametrický popis grafu funkce g a identita $F(G(x)) \equiv A$ platí všude v $U(a, \delta)$. Jejím diferencováním (pomocí V.15.4) získáme identitu $F'(G(x))G'(x) \equiv 0$, tj. identitu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_p} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_q}{\partial x_p} & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 1 \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_q}{\partial x_p} \end{pmatrix} \equiv 0\,, \tag{54}$$

kde derivace v první matici jsou v bodě $G(x) = (x, g(x))$, ve druhé v bodě x a nula vpravo znamená nulovou matici typu $q \times p$.

Jak víme, jsou sloupce T^i druhé matice vlevo tečné vektory grafu g; v bodě a lze tedy identitu (54) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$(\operatorname{grad} F_j(c) \cdot T^i(a)) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q\,. \tag{55}$$

To však znamená, že každý vektor $\operatorname{grad} F_j(c)$ je kolmý ke každému vektoru T^i; protože vektory $\operatorname{grad} F_j(c)$ jsou navíc lineárně nezávislé, generují zaměření normálové nadroviny grafu funkce g v bodě a. Vektory $\operatorname{grad} F_j(c)$ jsou však nezávislé na g; je-li tedy varieta u bodu c grafem jiné funkce h (třeba i jiných p proměnných), generují vektory $\operatorname{grad} F_j(c)$ i zaměření normálové nadroviny grafu funkce h. V důsledku toho jsou stejné i tečné nadroviny grafů funkcí g a h.

Tím jsme dospěli k závažnému poznatku, že *definice tečné a normálové nadroviny variety je v souladu s týmiž pojmy zavedenými pro graf; lokálně je varieta grafem nekonečně mnoha funkcí, ale tečná a normálová rovina každého z těchto grafů je totožná s tečnou a normálovou nadrovinou variety.*

Lokálně je každá varieta grafem a obráceně *grafy funkcí třídy* C_1 *jsou variety.* Pro q-rozměrnou vektorovou funkci f třídy C_1 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je totiž

$$\operatorname{gr} f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{p+q}\,;\ x \in \Omega\} \tag{56}$$

p-rozměrná varieta, protože je to nulová hladina funkce $F(x,y) := y - f(x)$.

Poznámka 16.8. V topologii se p-rozměrnou varietou rozumí neprázdný topologický prostor, v němž má každý bod okolí homeomorfní s otevřenou p-rozměrnou jednotkovou koulí

$$\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p\,;\ x_1^2 + \ldots + x_p^2 < 1\}\,. \tag{57}$$

Jak čtenář snadno nahlédne, je p-rozměrná varieta podle naší definice i topologickou p-rozměrnou varietou.

Příklad 16.6. Pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ je r^2-hladina S_r funkce

$$F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2, \tag{58}$$

tedy sféra v $\mathbb{R}^3$ o středu v počátku a poloměru r, dvojrozměrnou varietou, protože

$$F'(x,y,z) = 2\,(x,y,z) \neq (0,0,0) \ \text{ všude v } \ S_r\,. \tag{59}$$

Bod $(a,b,c) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ leží na jednotkové sféře S_1, tj. na 1-hladině funkce F. Jejím normálovým vektorem v tomto bodě je vektor

$$N := F'(a,b,c) = \operatorname{grad} F(a,b,c) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \tag{60}$$

a rovnici $(N \cdot (x-a, y-b, z-c)) = 0$ příslušné tečné roviny lze upravit na tvar $2x + 2y + z = 3$.

Tečné vektory lze snadno „uhádnout“ – hodí se např. vektory $T^1 := (1,-1,0)$ a $T^2 := (1,0,-2)$; snadno též zjistíme, že se rovnice $(T^i \cdot (x-a, y-b, z-c)) = 0$, $i = 1, 2$, redukují na $x = y$ a $x = 2z$. Tyto rovnice jsou rovnicemi normály.

Příklad 16.7°. Nulová hladina funkce

$$F(x,y) := (x^2 + y^2)^2 + (y^2 - x^2) \tag{61}$$

je tzv. **lemniskata**. Derivace

$$F'(x,y) = (2x(2x^2+2y^2-1), 2y(2x^2+2y^2+1)) \tag{62}$$

se anuluje, právě když je buď $x = y = 0$, nebo $2x^2 + 2y^2 = 1$ *a* $y = 0$, tedy $(x,y) = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,, 0)$; poslední dva body však na lemniskatě neleží. Z toho plyne, že jediným singulárním bodem lemniskaty je počátek; varieta vznikne z lemniskaty jeho vynecháním. [3])

Snadno ověříme, že bod $(a,b) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{5}\,, \frac{1}{3}\right)$ splňuje podmínku $F(a,b) = 0$ a že $N := \frac{9}{2}F'(a,b) = (\sqrt{5}\,, 7)$; rovnici $(N \cdot (x-a, y-b)) = 0$ příslušné tečny upravíme na tvar $\sqrt{5}\,x + 7y = 4$.

Připomeňme, že v rovině platí toto obecné tvrzení:

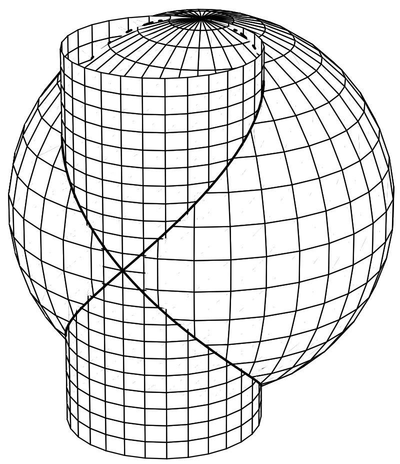
(63) *Je-li* $N = (N_1, N_2)$ *nenulový vektor, je* $T := k(N_2, -N_1)$ *pro každé* $k \in \mathbb{R}_+$ *nenulový vektor k němu ortogonální, přičemž báze* $\{T, N\}$ *je kladná*.

V našem případě položíme $T := (7\,, -\sqrt{5}\,)$ a snadno zjistíme, že $7x - \sqrt{5}\,y = 2\sqrt{5}$ je rovnice normály k lemniskatě $F(x,y) = 0$ v bodě (a,b).

Příklad 16.8. Je-li

$$F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4\,, \quad G(x,y,z) := (x-1)^2 + y^2 - 1\,, \tag{64}$$

jsou nulové hladiny funkcí F a G sféra o středu v počátku a poloměru 2 a válec o poloměru 1, jehož osa prochází bodem $(1,0,0)$ a je rovnoběžná s osou z. Průnik těchto hladin, tedy $(0,0)$-hladina funkce $H := (F,G)$, se nazývá **Vivianiho křivka**.



Vivianiho křivka

[3]) Je to velmi názorné: Lemniskata $L = F_{-1}(0)$ má tvar ležaté osmičky, a neexistuje tedy množina otevřená v L, obsahující počátek a homeomorfní s intervalem $(-1,1)$ (sr. s Po. 16.8), protože z bodu $(0,0)$ vycházejí čtyři oblouky obsažené v L, které mají společný jen tento bod.

Funkce H je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$H'(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x & y & z \\ x-1 & y & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Všechny tři jakobiány

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = 4y\,, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = 4z\,(1-x)\,, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = -4yz \tag{66}$$

jsou rovny nule, právě když je buď $y = z = 0$, nebo $x = 1, y = 0$. Bod tvaru $(x,0,0)$ leží v $(0,0)$-hladině funkce H, právě když je $x = 2$; žádný bod tvaru $(1,0,z)$ však v této hladině neleží. Bod $(2,0,0)$ je tedy jediným singulární bodem hladiny.[4])

Snadno se ověří, že bod $(a,b,c) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\,, 1)$ leží na Vivianiho křivce a že

$$N^1 := F'(a,b,c) = (3, \sqrt{3}\,, 2)\,,\ N^2 := G'(a,b,c) = (1, \sqrt{3}\,, 0) \tag{67}$$

jsou příslušné normálové vektory; tečným vektorem je proto

$$T := N^1 \times N^2 = 2(-\sqrt{3}\,, 1, \sqrt{3}\,)\,. \tag{68}$$

Rovnice $(N^1 \cdot (X - A)) = 0$, $(N^2 \cdot (X - A)) = 0$, $(T \cdot (X - A)) = 0$, kde $X := (x,y,z)$, $A := (a,b,c)$, lze upravit na tvar

$$3x + \sqrt{3}\,y + 2z = 8\,, \quad x + \sqrt{3}\,y = 3\,, \quad \sqrt{3}\,x - y - \sqrt{3}\,z = 0; \tag{69}$$

první dvě jsou rovnicemi tečny, poslední je rovnicí normálové roviny Vivianiho křivky v bodě (a,b,c).

Příklad 16.9. Dvojrozměrnou analogií Vivianiho křivky je průnik nulových hladin funkcí

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + x_4^2 - 4\,, \\ G(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= (x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{aligned} \tag{70}$$

v $\mathbb{R}^4$. Protože funkce $H := (F,G)$ je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^4$ a

$$H'(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1-1 & x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

zbývá vypočítat příslušných šest jakobiánů; čtenář se sám přesvědčí, že čtvrtiny jejich hodnot jsou rovny

$$x_2,\ x_3,\ x_4\,(1-x_1),\ 0,\ -x_2x_4,\ -x_3x_4\,. \tag{72}$$

[4]) Vivianiho křivka se v něm „kříží“ podobně jako lemniskata v počátku – nyní ovšem jde o prostorový útvar.

Všechny se anulují právě ve všech bodech tvaru $(1,0,0,x_4)$ nebo $(x_1,0,0,0)$. Pro každé $x_4 \in \mathbb{R}$ je však $G(1,0,0,x_4) = -1$, takže takové body v $(0,0)$-hladině funkce H neleží; protože $H(x_1,0,0,0) = (x_1^2 - 4, x_1(x_1 - 2))$, leží v této hladině jen bod $(2,0,0,0)$. Jen tento bod je tedy singulární.

Dosazením se přesvědčíme, že na varietě leží např. bod $c = \frac{1}{2}(3,1,\sqrt{2},2)$; normálovými vektory jsou

$$N^1 := 2F'(c) = (3,1,\sqrt{2},2) \quad \text{a} \quad N^2 := 2G'(c) = (1,1,\sqrt{2},0). \tag{73}$$

K tomu, abychom našli dva lineárně nezávislé vektory T^1, T^2 ortogonální v vektorům N^j, není nutné formálně řešit rovnice $(N^j \cdot T) = 0$, $j = 1,2$. Využijeme toho, že čtvrtá složka vektoru N^2 je nulová a po krátké úvaze položíme např.

$$T^1 = (1,-1,0,-1) \quad \text{a} \quad T^2 = (-1,-1,\sqrt{2},1); \tag{74}$$

(neortogonální) báze $\{T^1, T^2, N^1, N^2\}$ je pak kladná.

Značíme-li $X = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, budou mít dvojice rovnic $(N^j \cdot (X - c)) = 0$, $j = 1,2$, a $(T^i \cdot (X - c)) = 0$, $i = 1,2$, tečné a normálové roviny tvar

$$3x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 + 2x_4 = 8\,, \quad x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 = 3 \tag{75}$$

a

$$x_1 - x_2 - x_4 = 0\,, \quad x_1 + x_2 - \sqrt{2}\,x_3 - x_4 = 0. \tag{76}$$

* * *

Věty z této kapitoly dovolují rozřešit otázku, jak se výraz obsahující parciální derivace různých řádů změní, zavedeme-li nové „nezávisle proměnné“. Začneme však nejsnazším úkolem, kdy nezávisle proměnná je jen jedna (takže derivace jsou obyčejné); zde vystačíme s větami z Úvodu.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a že

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) \tag{77}$$

je funkce definovaná pro všechna x z jistého otevřeného intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a pro jistou funkci $y : I \to \mathbb{R}$ třídy C_n v tomto intervalu; x je „nezávisle proměnná“, podle níž se derivuje funkce $y = y(x)$. Předpokládejme dále, že g je funkce třídy C_n v jistém (otevřeném) intervalu $J \subset \mathbb{R}$, přičemž $g(J) = I$. Utvořme funkci $Y := y \circ g$, tj. položme $Y(t) := y(g(t))$ pro všechna $t \in J$.

Předpokládejme, že jsme x ve výrazu (77) nahradili výrazem $g(t)$ a funkci y funkcí Y; naším úkolem je zjistit, jaký výraz $G(t, Y, Y', \ldots, Y^{(n)})$ z výrazu (77) vznikne. Bude přitom přehlednější, budeme-li derivování podle nové „nezávisle proměnné“ t značit tečkou, jak je zvykem např. ve fyzice, znamená-li t čas. [5])

---

[5]) Pro derivaci funkce f obecného řádu n však bohužel existuje jen jeden symbol, totiž $f^{(n)}$ – bez ohledu na to, jak se „nezávisle proměnná“ jmenuje.

Podle V. 5.4 o diferencování superpozice je

$$\dot{Y}(t) = y'(g(t))\,\dot{g}(t)\,,\quad \ddot{Y}(t) = y''(g(t))\,\dot{g}^2(t) + y'(g(t))\,\ddot{g}(t)\,,\ \dots\,. \tag{78}$$

Není-li derivace $\dot{g}$ nikde v J rovna nule (takže g je ryze monotónní – viz V. 7.4), lze tyto rovnice vyřešit vzhledem k $y'(g(t))$, $y''(g(t))$, …; dostaneme identity

$$y'(g(t)) = \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{g}(t)}\,,\quad y''(g(t)) = \frac{1}{\dot{g}^3(t)}\,(\ddot{Y}(t)\,\dot{g}(t) - \dot{Y}(t)\,\ddot{g}(t))\,,\ \dots\,. \tag{79}$$

Kdybychom měli takto počítat např. čtvrtou derivaci, mohlo by být řešení příslušných rovnic dost těžkopádné. Z první rovnosti v (79) je však patrné, že

(80) *derivování podle x se redukuje na derivování podle t a dělení výsledku $\dot{g}$;*

derivace y', y'' … můžeme proto počítat přímo, žádné soustavy rovnic není nutné řešit. Máme-li přitom na paměti, že *tyto derivace je třeba složit s g a že podle t derivujeme ve skutečnosti funkci $Y = y \circ g$*, nemusíme se patrně obávat účelného zkráceného zápisu

$$y' = \frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\,,\quad y'' = \frac{1}{\dot{g}}\Big(\frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\Big)^{\cdot},\quad y''' = \frac{1}{\dot{g}}\Big(\frac{1}{\dot{g}}\Big(\frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\Big)^{\cdot}\Big)^{\cdot},\ \dots \tag{81}$$

– samozřejmě stále za předpokladu, že $\dot{g} \neq 0$. Provedeme-li vyznačené derivování vpravo, získáme identity

$$y' = \frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\,, \tag{81_1}$$

$$y'' = \frac{\dot{g}\ddot{Y} - \ddot{g}\dot{Y}}{\dot{g}^3}\,, \tag{81_2}$$

$$y''' = \frac{\dot{g}^2\dddot{Y} - 3\dot{g}\ddot{g}\ddot{Y} + (3\ddot{g}^2 - \dot{g}\dddot{g}\,)\dot{Y}}{\dot{g}^5}\,. \tag{81_3}$$

Dosadíme-li tyto výsledky spolu s $x = g(t)$ do

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x))\,, \tag{77'}$$

dostaneme výraz tvaru

$$G(t, Y(t), \dot{Y}(t), \ddot{Y}(t), \dddot{Y}(t))\,; \tag{82}$$

tím je záměna proměnné x za t provedena.

Příklad 16.10. *Eulerova diferenciální rovnice* řádu 3 má tvar

$$\alpha_0 x^3 y''' + \alpha_1 x^2 y'' + \alpha_2 x y' + \alpha_3 y = 0\,, \tag{83}$$

kde $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou konstanty.

V teorii diferenciálních rovnic se dokazuje, že všechna řešení v $\mathbb{R}_+$ takové rovnice, tj. všechny funkce $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, pro něž je levá strana (83) v $\mathbb{R}_+$ identicky rovna nule, dostaneme, rozřešíme-li rovnici, která z (83) vznikne substitucí $x = g(t) := e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Taková substituce je přípustná, protože funkce exp je třídy C_∞ v $\mathbb{R}$ a její derivace exp je tam všude nenulová.

Protože je $(e^t)^{(k)} = e^t$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, budou mít rovnice $(81_1)-(81_3)$ tvar

$$y' = e^{-t}\dot{Y}\,,\ y'' = e^{-3t}\cdot e^t(\ddot{Y} - \dot{Y})\,,\ y''' = e^{-5t}\cdot e^{2t}(\dddot{Y} - 3\ddot{Y} + 2\dot{Y}) \tag{84}$$

a rovnice (83) přejde v rovnici

$$\alpha_0\dddot{Y} + (\alpha_1 - 3\alpha_0)\ddot{Y} + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2\alpha_0)\dot{Y} + \alpha_3 Y = 0\,. \tag{85}$$

Tato rovnice patří mezi obyčejné lineární diferenciální rovnice, kterým věnujeme kapitolu 18; tam také uvidíme, že když se nám podaří najít všechny kořeny algebraické rovnice

$$\alpha_0\lambda^3 + (\alpha_1 - 3\alpha_0)\lambda^2 + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2\alpha_0)\lambda + \alpha_3 = 0\,, \tag{86}$$

budeme schopni najít všechna řešení rovnice (85), a tedy i rovnice (83).

Tím je na konkrétním příkladu ilustrován význam „záměny nezávisle proměnné“ ve výrazech typu (77): *Řešení diferenciální rovnice* (83) (*s nekonstantními koeficienty*) *se vhodnou substitucí zredukuje na řešení algebraické rovnice.*

Poznámka 16.9. Není nutné zatěžovat si paměť vzorci $(81_1)-(81_{\dots})$, ale měli bychom si dobře promyslit princip (80). V každém konkrétním příkladu pracujeme s konkrétní funkcí g a transformační vzorce pro derivace (až do potřebného řádu) odvozujeme pomocí (80) právě s touto konkrétní funkcí. To může být někdy jednodušší než v případě Eulerovy rovnice, ale zpravidla to bude bohužel asi složitější.

* * *

Záměna několika nezávisle proměnných ve výrazu obsahujícím parciální derivace je o dost složitější než záměna jedné proměnné. Protože však jde o metodu, která hraje podstatnou roli např. ve vektorové analýze a v teorii parciálních diferenciálních rovnic, je vhodné, abychom ji zde vyložili.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ a že

1) y je funkce třídy C_n proměnných $(x_1, \dots, x_p)$ v otevřené množině $X \subset \mathbb{R}^p$;

2) F je funkce proměnných $(x_1, \dots, x_p)$ a parciálních derivací funkce y řádů $k \le n$;

3) g je prostá funkce třídy C_n proměnných $(t_1, \dots, t_p)$ v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, přičemž $g(\Omega) = X$ a

$$J := \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(t_1, \dots, t_p)} \neq 0 \ \text{ všude v }\ \Omega\,. \tag{87}$$

Položíme-li $Y := y \circ g$ a $t = (t_1, \dots, t_p)$, platí v Ω podle V.14.5 o diferencování superpozice soustava identit

$$\frac{\partial Y}{\partial t_i}(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial y}{\partial x_j}(g(t)) \frac{\partial g_j}{\partial t_i}(t), \tag{88}$$

kde $i = 1, \dots, p$; z této soustavy lze vypočítat derivace $\partial y/\partial x_j$, $j = 1, \dots, p$, protože její determinant J je podle předpokladu všude v Ω nenulový. Pamatujme, ve kterých bodech se derivace v (88) počítají a pišme soustavu krátce ve tvaru

$$\frac{\partial Y}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial t_i}. \tag{88'}$$

Podle Cramerova pravidla je

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial Y}{\partial t_j} A(k, j), \tag{89}$$

kde $A(k, j)$ je algebraický doplněk [6]) prvku $\partial g_k/\partial t_j$ v Jacobiho matici funkcí g_k podle proměnných t_j.

Identity (89) jsou *základní transformační vzorce* pro derivace řádu 1; transformační vzorce pro parciální derivace $\partial^2 y/\partial x_k \partial x_l$, $\partial^3 y/\partial x_k \partial x_l \partial x_m$, ... se z nich získají pomocí dobře známých vět o diferencování, mezi nimiž hraje podstatnou roli věta o diferencování superpozice.

Dosadíme-li do F podle získaných vzorců, dostaneme jistou funkci nové proměnné $t = (t_1, \dots, t_p)$ a parciálních derivací funkce $Y = y(g(t))$ řádů $k \le n$. Ilustrujme to několika užitečnými příklady:

Příklad 16.11. Je-li funkce f třídy C_1 v nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a znamenají-li x, y kartézské souřadnice, je

$$\| \operatorname{grad} f \|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2; \tag{90}$$

pokusme se tento výraz přetransformovat do **polárních souřadnic**

$$x = r\cos\varphi,\ r\sin\varphi. \tag{91}$$

Zobrazení $g(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ je třídy C_∞ v celé rovině a zobrazuje rovinu na sebe; každý bod roviny kromě počátku má přitom okolí, v němž je funkce g prostá.

---

[6]) Připomeňme, že vynecháním r-tého řádku a s-tého sloupce matice A typu $p \times p$ o prvcích a_{rs} získáme matici, jejíž determinant se nazývá *subdeterminant* determinantu matice A příslušný k prvku a_{rs}; opatříme-li tento subdeterminant znaménkem $(-1)^{r+s}$, získáme příslušný *algebraický doplněk*.

Příslušný jakobián

$$J := \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \tag{92}$$

je roven nule, právě když je $r = 0$, což odpovídá počátku souřadnic. Protože záměna proměnných je lokální operace, je z toho patrné, že

(93) *od kartézských souřadnic k polárním lze přejít všude v* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Označme $F := f \circ g$, tj. položme $F(r,\varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Identity (88′) mají za naší situace tvar

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\varphi \tag{94}$$

a jejich řešením jsou *identity*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi, \tag{95}$$

které ukazují, jak se derivování podle x *a* y *převádí na derivování podle* r *a* φ.

Snadnou úpravou získáme transformační vzorec

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial F}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big)^2 \quad \text{pro všechna } (x,y) \neq (0,0). \tag{96}$$

Příklad 16.12. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ a nechť f je třídy C_2 v Ω; transformujme do polárních souřadnic výraz [7])

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{97}$$

Derivováním první z identit (95) podle x, druhé podle y získáme identity

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\Big)\cos\varphi \\ &\quad - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\Big)\sin\varphi \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\cos^2\varphi - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\sin^2\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\sin^2\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi, \end{aligned} \tag{98}$$

[7]) Výraz (97) je (dvojrozměrný) *Laplaceův operátor* Δ aplikovaný na funkci f. Rovnice $\Delta f = 0$ se nazývá *Laplaceova* a je (spolu s obecnější *Poissonovou* rovnicí $\Delta f = u$) jednou z nejznámějších parciálních rovnic druhého řádu. Větší význam však mají analogické rovnice v prostoru; transformace trojrozměrného Laplaceova operátoru do cylindrických a sférických souřadnic jsou předmětem cvičení 16.137 a 16.138.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi\Big)\sin\varphi$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi\Big)\cos\varphi$$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\cos^2\varphi$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\cos^2\varphi - \frac{2}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi; \tag{99}$$

Sečtením (98) a (99) získáme žádaný přepis výrazu Δf z kartézských souřadnic v rovině do souřadnic polárních:

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\,. \tag{100}$$

Poznámka 16.10. V problémech, kterými se právě zabýváme, užíváme označení y, Y a f, F pro odlišení původní a složené funkce; chceme-li striktně dodržovat uznávaná pravidla, jinak ani jednat nemůžeme: Každá z funkcí y, Y (resp. f, F) má obecně jiný definiční obor a je jinou funkcí jiných proměnných.

Dokud vystačíme s jednou změnou nezávisle proměnných, můžeme užít (tak jako nahoře) např. malé a velké písmeno, což zdůrazňuje vzájemnou souvislost mezi y a Y a mezi f a F. Kdybychom však měnili proměnné vícekrát, nutně by se symbolika stala nepřehlednější. Mnohdy přitom nebezpečí z nedorozumění nehrozí a v literatuře se místo striktního rozlišení např. funkcí f a F užívá jen jedno označení f a změna proměnných se doprovodí např. slovy:

Protože f je funkce proměnných x_i a protože každé x_i je funkcí proměnných t_j, budeme f považovat za funkci proměnných t_j.

Katastrofální nedorozumění však hrozí za situace, kdy za některou z původních proměnných dosazujeme funkci jiných původních proměnných, takže některé z původních proměnných mají „stejné jméno“ jako některé nové proměnné.

P ř í k l a d : K úplnému zmatku bychom např. došli, kdybychom do funkce $f(x, y, z)$ dosadili $z = g(x, y)$ a kdybychom vzniklou superpozici nazývali stále f. Původní proměnné by byly x, y, z, nové proměnné x, y; co však potom znamená $\partial f/\partial x$? Parciální derivaci původní funkce $f(x, y, z)$ nebo složené funkce $F(x, y) := f(x, y, g(x, y))$?

Čtenář jistě vidí, že *v podobných situacích je nutné každou z těchto funkcí značit jiným symbolem*. Kdybychom obě funkce značili f, dostali bychom pomocí věty o diferencování superpozice zcela nesmyslnou identitu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x},$$

z níž by plynul např. absurdní výsledek, že druhý sčítanec vpravo je (za podobné situace vždy) nulový.

Poznámka 16.11. Jsou-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a $X \subset \mathbb{R}^p$ otevřené množiny a je-li $g : \Omega \to_{\text{na}} X$ prosté zobrazení, existuje pro každý bod $x \in X$ právě jeden bod $t \in \Omega$ tak, že $g(t) = x$. Interpretujeme-li složky x_i, $i = 1, \ldots, p$, vektoru x jako kartézské souřadnice, znázorníme je pomocí p navzájem kolmých souřadnicových os protínajících se v počátku souřadnicového systému.

Označme $\mathcal{P}_i$ množinu všech přímek rovnoběžných s i-tou souřadnicovou osou a protínajících X. Snadno nahlédneme, že průnik každé přímky $P_i \in \mathcal{P}_i$ s X je buď celá přímka P_i, nebo spočetné sjednocení jistých otevřených úseček a polopřímek; každá z těchto množin je geometrickým obrazem jisté hladké (dokonce lineární) křivky.

Je-li g difeomorfismus, platí podle věty V.16.2 totéž o inverzním zobrazení $h := g_{-1}$, takže všechny množiny $Q_i := h(P_i \cap X)$ jsou také geometrické obrazy jistých hladkých křivek; označme $\mathcal{Q}_i$ množinu všech Q_i. Pro každý bod $x \in X$ a každé $i = 1, \ldots, p$ existuje právě jedna přímka $P_i \in \mathcal{P}_i$ tak, že $\{x\} = P_1 \cap \ldots \cap P_p$; je-li $t = h(x)$, je pak $\{t\}$ průnikem příslušných množin $h(P_i \cap X)$. Poloha každého bodu $t \in \Omega$ je jednoznačně určena p množinami $Q_i \in \mathcal{Q}_i$, $i = 1, \ldots, p$, jejichž průnikem je množina $\{t\}$.

Za právě popsané situace a označení se čísla $t_i = h_i(x)$, $i = 1, \ldots, p$, nazývají *křivočaré souřadnice* bodu $t = h(x)$ a říká se, že v Ω je zaveden *křivočarý systém souřadnic*, který vznikl z kartézského systému souřadnic (v X) zobrazením h a který se zobrazením g obráceně na kartézský systém přemění.

Z čistě teoretického hlediska je situace zcela symetrická vzhledem ke g a h; nic tedy nebrání považovat souřadnice t_i bodů $t \in \Omega$ za kartézské souřadnice, načež křivočarými souřadnicemi jsou čísla x_i. V problémech, které řeší matematická analýza pro jiné disciplíny, např. pro geometrii nebo fyziku, bývá však a priori jasné, který ze jmenovaných systémů je kartézský. (Tak je tomu např. za situace z příkladů 16.11 a 16.12., kde křivočarým systémem je zcela jistě systém polárních souřadnic; křivočarý systém má zde dokonce i svůj název.)

Cvičení

1. Lokální difeomorfismy v $\mathbb{R}^2$

Pro danou funkci f najděte maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v jejímž každém bodě jsou splněny předpoklady věty 16.3; ověřte, že daný bod a leží v Ω, vypočtěte $A := f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny její parciální derivace 1. a 2. řádu v bodě A.

	$f(x, y) =$	$a =$
16.01.	$(x^3 - 3xy^2,\ 3x^2y - y^3)$	$(1, -1)$
16.02.	$\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2},\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$	$(0, 1)$
16.03.	$(\sin x \cosh y,\ \cos x \sinh y)$	$(0, 0)$

16.04. $\left(\lg\sqrt{x^2+y^2}\,,\ \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)$ $(1,1)$

16.05. $(e^x\cos\pi y\,,\ e^x\sin\pi y)$ $(-1,1)$

16.06. $(x+e^y\,,\ e^x-y)$ $(0,0)$

16.07. $(x+\operatorname{arccotg}y,\ y-\operatorname{arccotg}x)$ $(1,0)$

Pro danou funkci f a daný bod a ověřte předpoklady V. 16.3, vypočtěte hodnotu $A := f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny její parciální derivace 1. a 2. řádu v bodě A.

$f(x,y) =$ $a =$

16.08. $(xy(x^2-y^2),\ xy(x-y))$ $(1,-1)$

16.09. $((x^2+x+1)(y^3-1),\ (x^3-x)(y^2-y-1))$ $(0,1)$

16.10. $(\sin x+\sin y\,,\ \cos x-\cos y)$ $(\frac12\pi,-\pi)$

16.11. $(x+\lg y\,,\ y-\lg x)$ $(1,1)$

16.12. $(e^x+\lg(1+y),\ \lg(1+x)-e^y)$ $(0,0)$

16.13. $(\operatorname{arctg}x+y^2,\ x^2-\operatorname{arctg}y)$ $(0,1)$

16.14. $(\sin^2 x\cos y\,,\ \cos x\sin^2 y)$ $(\frac12\pi,-\frac12\pi)$

16.15. $(x^x+\frac12 y^2,\ y^y-\frac12 x^2)$ $(1,1)$

2. Lokální difeomorfismy v $\mathbb{R}^3$

Pro danou funkci f najděte maximální otevřenou množinu $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, v jejímž každém bodě jsou splněny předpoklady V. 16.3; ověřte, že daný bod a leží v Ω, vypočtěte $A := f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny parciální derivace 1. a 2. řádu funkce g v bodě A.

$f(x,y,z) =$ $a =$

16.16. $(e^{-x+y+z},\ e^{x-y+z},\ e^{x+y-z})$ $(0,0,0)$

16.17. $(\cos y+\cos z\,,\ \cos z+\cos x\,,\ \cos x+\cos y)$ $(\frac12\pi,\frac12\pi,\frac12\pi)$

16.18. $(x^3-y+z\,,\ y^3-z+x\,,\ z^3-x+y)$ $(1,0,-1)$

16.19. $\dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$ $(1,-1,1)$

16.20. $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z}\,,\ \operatorname{arctg}\dfrac{yz}{x}\,,\ \operatorname{arctg}\dfrac{zx}{y}\right)$ $\qquad (1,-1,-1)$

16.21. $(x-e^{y-z},\ y-e^{z-x},\ z-e^{x-y})$ $\qquad (2,2,2)$

16.22. $\left(\dfrac{x}{y^2+z^2}\,,\ \dfrac{y}{z^2+x^2}\,,\ \dfrac{z}{x^2+y^2}\right)$ $\qquad (1,-1,1)$

16.23. $(\sin x\cos y\,,\ \sin y\cos z\,,\ \sin z\cos x)$ $\qquad (-\frac12\pi,\frac12\pi,-\frac12\pi)$

Pro danou funkci f a daný bod a ověřte předpoklady V. 16.3, vypočtěte hodnotu $A := f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny její parciální derivace 1. a 2. řádu v bodě A.

$f(x,y,z) =$ $\qquad a =$

16.24. $(x^3+xy+z\,,\ y^3+yz+x\,,\ z^3+zx+y)$ $\qquad (0,0,0)$

16.25. $(x+xy+xyz\,,\ y+yz+yzx\,,\ z+zx+zxy)$ $\qquad (1,0,-1)$

16.26. $(x+y^2+e^z,\ y+z^2+e^x,\ z+x^2+e^y)$ $\qquad (0,0,0)$

16.27. $(\lg x-\operatorname{arctg}(yz-1),\ \lg y-\operatorname{arctg}(zx-1),$
$\lg z-\operatorname{arctg}(xy-1))$ $\qquad (1,1,1)$

16.28. $(xy+z+\lg(1+z^2),\ yz+x+\lg(1+x^2),$
$zx+y+\lg(1+y^2))$ $\qquad (1,1,1)$

16.29. $(\sin x-yz,\ \sin y-zx,\ \sin z-xy)$ $\qquad (0,0,0)$

16.30. $(\sin(x+y-z),\ \sin(y+z-x),\ \sin(z+x-y))$ $\qquad (\frac12\pi,0,-\frac12\pi)$

3. Implicitní funkce – křivky v $\mathbb{R}^2$

Ověřte, zdali daná funkce F dvou proměnných x, y splňuje u daného bodu $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $y=g(x)$ (resp. $x=h(y)$) rovnice $F(x,y)=0$. Pokud ano, vypočtěte derivace $g'(a)$, $g''(a)$, $g'''(a)$ (resp. $h'(b)$, $h''(b)$, $h'''(b)$). [8])

$F(x,y) =$ $\qquad (a,b) =$

16.31°. $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ $\qquad (-1,1)$

16.32°. $x^4-3x^2y^2+2y^4$ $\qquad (1,1)$

[8]) Je-li možné z rovnice $F(x,y)=0$ u bodu (a,b) vypočítat jak y jako funkci x, tak x jako funkci y, čtenář se možná omezí jen na jeden z popsaných úkolů; na konci kapitoly však najde obě řešení.

16.33$^{\mathbf{o}}$. $x(y^4 - y^2) - x^4(y^3 - y)$ $\quad$ $(2, 0)$

16.34$^{\mathbf{o}}$. $(x + y)^3 - 2x - 3y$ $\quad$ $(2, -1)$

16.35$^{\mathbf{o}}$. $(x^2 + y)^2 + 2x^2 + 2y - x$ $\quad$ $(-1, -2)$

16.36$^{\mathbf{o}}$. $x^3y + x^2 - xy - y - y^2 + y^3$ $\quad$ $(1, -1)$

16.37$^{\mathbf{o}}$. $xe^y + ye^{-x} + x + y$ $\quad$ $(-1, 1)$

16.38$^{\mathbf{o}}$. $e^{x+y} - e^{x-y} + e^{xy} - e^{x^2-y^2}$ $\quad$ $(0, 0)$

16.39$^{\mathbf{o}}$. $(y + 1)e^{1-x^2} + (x - 1)e^{y+1}$ $\quad$ $(0, 0)$

16.40$^{\mathbf{o}}$. $\operatorname{arctg}(x + 2y) + x + 2y$ $\quad$ $(2, -1)$

V následujících 5 cvičeních stačí najít první a druhé derivace funkcí určených implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ u bodu (a, b).

$F(x, y) =$ $\quad$ $(a, b) =$

16.41$^{\mathbf{o}}$. $\lg(xy) + x^2 - y^2$ $\quad$ $(1, 1)$

16.42$^{\mathbf{o}}$. $\operatorname{arctg}(x + y) + \operatorname{arctg}(x - y) + y - y^2$ $\quad$ $(0, 1)$

16.43$^{\mathbf{o}}$. $\sin x + \sin y - \sin(x - y) + \sin(x + y)$ $\quad$ $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

16.44$^{\mathbf{o}}$. $\sin(\sin(\pi(x + y))) + \sin(\pi\cos(\pi(x - y)))$ $\quad$ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

16.45$^{\mathbf{o}}$. $(y - 1)e^{\operatorname{arctg} x} - x + \lg y$ $\quad$ $(0, 1)$

4. Implicitní funkce – křivky v $\mathbb{R}^3$

Ověřte, zdali daná dvojrozměrná vektorová funkce F tří reálných proměnných x, y, z splňuje u daného bodu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ předpoklady V.16.4 o existenci jednoznačného řešení $(y, z) = g(x)$ (resp. $(x, z) = h(y)$ resp. $(x, y) = i(z)$) rovnice $F(x, y, z) = 0$. Pokud ano, vypočtěte derivace $g'(a)$, $g''(a)$ (resp. $h'(b)$, $h''(b)$ resp. $i'(c)$, $i''(c)$). [9])

$F(x, y, z) =$ $\quad$ $(a, b, c) =$

16.46. $(2x + y^2z + z^3,\ x^3 + 2xy + 3z)$ $\quad$ $(1, 1, -1)$

16.47. $(x^3 + y^3 + z^3,\ 1 + xy + xz + yz)$ $\quad$ $(1, 0, -1)$

16.48. $(ye^x + ze^y,\ xe^z - ye^{x+y})$ $\quad$ $(0, 0, 0)$

[9]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

16.49. $(z - z^3 e^x,\; y - y^3 e^x)$ $(0, 1, -1)$

16.50. $(\lg(1 + y^2 - z^2),\; y \lg(1 - x^2 + z^2))$ $(1, -1, 1)$

16.51. $(\operatorname{arctg}(x + y - z),\; \lg(1 + x - y + z))$ $(0, 1, 1)$

16.52. $(2 \operatorname{arctg}(1 + xy) - \operatorname{arccotg} z,\; 2 \operatorname{arctg}(1 + yz) - \operatorname{arccotg} x)$ $(0, 0, 0)$

16.53. $(\sinh(x + y) + (y + 2)(z - 2),\; \sinh(y + z) - (x - 2)(z - 2))$ $(2, -2, 2)$

16.54. $(e^{\sin x - z} + \cos 2y,\; e^{\cos(x-y)} - \cos z)$ $(\pi, \frac{1}{2}\pi, 0)$

16.55. $(x^y - z^x,\; y^x - z^y)$ $(1, 1, 1)$

5. Implicitní funkce – křivky v $\mathbb{R}^4$

Ověřte, zdali daná trojrozměrná vektorová funkce F čtyř reálných proměnných x, y, z, u splňuje u daného bodu $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $(y, z, u) = g(x)$ (resp. $(x, z, u) = h(y)$ resp. $(x, y, u) = i(z)$ resp. $(x, y, z) = j(u)$) rovnice $F(x, y, z, u) = (0, 0, 0)$. Pokud ano, vypočtěte derivace $g'(a)$, $g''(a)$ (resp. $h'(b)$, $h''(b)$ resp. $i'(c)$, $i''(c)$ resp. $j'(d)$, $j''(d)$). [10])

$F(x, y, z, u) =$ $(a, b, c, d) =$

16.56. $(x^2 + y^2 - z + u,\; -x + y^2 + z^2 + u,\; -x + y + z^2 + u^2)$ $(1, -1, 1, -1)$

16.57. $(x^3 + y^3 + z^3 + u,\; x^3 + y^3 + z + u,\; x^3 + y + z + u)$ $(-1, 1, -1, 1)$

16.58. $(\sin(x + y + z + u^2),\; \sin(x + y^2 + z - u),$
$\sin(x + y^2 - z - u^2))$ $(\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi, 0)$

16.59. $(z \operatorname{arctg}(x + 2y),\; x \operatorname{arctg}(z + 2u),\; \operatorname{arctg}(x + y - z - u))$ $(2, -1, 2, -1)$

16.60. $(x + y + z - e^{u-x},\; x + y + u + e^{z-y},$
$x + z + u + e^{-x-y-z-u})$ $(-1, 1, 1, -1)$

6. Implicitní funkce – plochy v $\mathbb{R}^3$

Ověřte, zdali daná reálná funkce F tří reálných proměnných x, y, z splňuje u daného bodu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $z = g(x, y)$ (resp. $y = h(x, z)$ resp. $x = i(y, z)$) rovnice $F(x, y, z) = 0$. Pokud ano, vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce g (resp. h resp. i) v bodě (a, b) (resp. (a, c) resp. (b, c)). [10])

[10]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

$F(x,y,z) =$	$(a,b,c) =$
16.61. $x + 2y - x^2y - x^3z - yz + xyz^2$	$(1,0,1)$
16.62. $xyz - xy + 2yz - 4xz$	$(1,2,1)$
16.63. $x^3 + x^2 + x + y^3 + 2y^2 + y - x^2z^2 + 2y^2z^2$	$(0,-1,0)$
16.64. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 8(x^2 + y^2 + z^2)$	$(2,0,2)$
16.65. $x + y + z - \lg(1 + x^2 + y^2 + z^2)$	$(0,0,0)$
16.66. $e^{x^2+2y^2+3z} - (x^2 + y^2 + z)$	$(1,1,-1)$
16.67. $\lg(1 + x^2 + y^2 - z^2) - \lg(1 + x + y + z)$	$(1,0,-1)$
16.68. $\sin(\pi xyz) + x\sin(\pi y)$	$(-1,2,3)$
16.69. $e^{\sin x}yz - e^{\sin yz}x$	$(\pi,\pi,1)$
16.70. $y \operatorname{arctg}(x + z) - x \operatorname{arctg}(y + z) + xyz + 1$	$(1,1,-1)$

7. Implicitní funkce – plochy v $\mathbb{R}^4$

Ověřte, zdali daná dvojrozměrná vektorová funkce F čtyř reálných proměnných x, y, z, u splňuje u daného bodu $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $(z,u) = g(x,y)$ (kde $g = (g_1, g_2)$) resp. $(y,u) = h(x,z)$ resp. $(y,z) = i(x,u)$ resp. $(x,u) = j(y,z)$ resp. $(x,z) = k(y,u)$ resp. $(x,y) = l(z,u)$ rovnice $F(x,y,z,u) = (0,0)$. Pokud ano, vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu příslušné implicitní funkce v příslušném bodě. [11])

$F(x,y,z,u) =$	$(a,b,c,d) =$
16.71. $\big(x - y^2 + z^3 - u^4,\ x^4 + y^3 + z^2 + u\big)$	$(1,-1,1,-1)$
16.72. $\big(x\lg(1 + y^2 - u^2),\ y\lg(1 + x^2 - z^2)\big)$	$(2,-1,2,-1)$
16.73. $\big(e^{xy-zu} + x + y - z - 2u,\ e^{xu-yz} - xz - yu\big)$	$(0,1,0,1)$
16.74. $\Big(xyz + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{u},\ (x+y)u + \operatorname{arctg}\dfrac{y+u}{x}\Big)$	$(-1,1,0,-1)$
16.75. $\Big(\dfrac{x + y^2 - 2z}{z + u^2},\ \dfrac{z + u^2 - 2x}{x + y^2}\Big)$	$(1,-1,1,-1)$

[11]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

8. Implicitní funkce – křivé prostory v $\mathbb{R}^4$

Ověřte, zdali daná reálná funkce F čtyř reálných proměnných x, y, z, u splňuje u daného bodu $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $u = g(x, y, z)$ (resp. $z = h(x, y, u)$ resp. $y = i(x, z, u)$ resp. $x = j(y, z, u)$) rovnice $F(x, y, z, u) = 0$. Pokud ano, vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu příslušné implicitní funkce v příslušném bodě. [12])

	$F(x,y,z,u) =$	$(a,b,c,d) =$
16.76.	$x^2 - 3xy^2 - 4yz - yu - 2z^2u$	$(1, -1, 1, 2)$
16.77.	$x + u + xy + zu - \lg(1 + xz + yu)$	$(-1, 0, 0, 1)$
16.78.	$e^{x+z} - e^{y-u} + e^{x+u} - e^{y+z}$	$(0, 0, 0, 0)$
16.79.	$x + y + z - u + \cos(\pi x) - 2\cos(\pi z)$	$(-1, 0, 2, -2)$
16.80.	$\lg(2 - xy + zu) - \operatorname{arctg}\dfrac{xz}{yu}$	$(-1, -1, 0, 2)$

9. Variety dimenze 1 v $\mathbb{R}^2$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v níž je nulová hladina funkce F jednorozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^2$ leží v Ω, a najděte rovnice tečny a normály variety v bodě c.

	$F(x,y) =$	$c =$
16.81°.	$(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2)$	$(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$
16.82°.	$(x + 1)y^2 + (x - 1)x^2$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$
16.83°.	$e^x \sin y - e^y \sin x$	$\left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi\right)$
16.84°.	$e^{x-y} + 2\sin(x + y) - 1$	(π, π)
16.85°.	$e^{x+2y} + x^2 + 3xy + y^2$	$(2, -1)$

10. Variety dimenze 1 v $\mathbb{R}^3$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, v níž je $(0, 0)$-hladina vektorové funkce F jednorozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^3$ leží v Ω, a najděte rovnice tečny a normálové roviny variety v bodě c.

[12]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

$F(x,y,z) =$ $c =$

16.86. $(3x^2 - 4xy + 2xz - z^2 - 1\,,\; x - 2y - z)$ $(1, \frac{1}{2}, 0)$

16.87. $(e^{x-1} - 2y - z\,,\; e^{y-1} - 2x - z)$ $(1, 1, -1)$

16.88. $(\lg(xy - z)\,,\; x(y - z))$ $(2, 1, 1)$

16.89. $\Big(\arcsin(xyz - \frac{1}{2})\,,\; \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{x}{z} - 1\Big)\Big)$ $(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2})$

16.90. $\dfrac{(x + 2y + 3z\,,\; 3x + 2y + z)}{x^2 + y^2 + z^2}$ $(-1, 2, -1)$

11. Variety dimenze 1 v $\mathbb{R}^4$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^4$, v níž je $(0,0,0)$-hladina vektorové funkce F jednorozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^4$ leží v Ω, a najděte rovnice tečny a (trojrozměrné) normálové nadroviny variety v bodě c.

$F(x,y,z,u) =$ $c =$

16.91. $(y(x + u)\,,\; x^2 - z^2,\; yz - xu)$ $(-1, 1, -1, 1)$

16.92. $(x^3 - y - z\,,\; y^3 - z - u\,,\; z^3 - u - x)$ $(0, 0, 0, 0)$

16.93. $(e^{x-y} - z - u\,,\; e^{y-z} - u - x\,,\; e^{z-x} - y - u)$ $(1, 1, 1, 0)$

16.94. $(\lg(y - x) + 2z - u\,,\; \lg(u - z) + 2x - y\,,\; x + y - z - u)$ $(1, 2, 1, 2)$

16.95. $(\operatorname{arctg}(xy - z)\,,\; \operatorname{arctg}(xz - y)\,,\; \operatorname{arctg}(xu - z))$ $(1, 1, 1, 1)$

12. Variety dimenze 2 v $\mathbb{R}^3$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, v níž je nulová hladina funkce F dvojrozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^3$ leží v Ω, a najděte rovnice tečné roviny a normály variety v bodě c.

$F(x,y) =$ $c =$

16.96$^{\mathbf{o}}$. $\Big(\dfrac{x}{4}\Big)^2 + \Big(\dfrac{y}{3}\Big)^2 + \Big(\dfrac{z}{2}\Big)^2 - 1$ $\big(\sqrt{6}, \frac{3}{4}\sqrt{2}\,, \sqrt{2}\big)$

16.97. $x^2 - 6xy + 4xz + y^2 - 4yz + 2z^2 - 4x + 4z - 3$ $(0, 1, 1)$

16.98. $x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ $(1, -1, 0)$

16.99. $e^{x-y} + e^{x-z} - 2\,e^{y-z}$ $\qquad (1,1,1)$

16.100. $\operatorname{arctg}(x+y+z) - \lg(1+(x+y+z)^2)$ $\qquad (0,2,-2)$

13. Variety dimenze 2 v $\mathbb{R}^4$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^4$, v níž je $(0,0)$-hladina funkce F dvojrozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^4$ leží v Ω, a najděte rovnice tečné a normálové roviny variety v bodě c.

	$F(x,y,z,u) =$	$c =$
16.101.	$(xy - zu\,,\ xz - yu)$	$(1,2,2,1)$
16.102.	$(xyzu - 1\,,\ x+y+z+u)$	$(1,-1,-1,1)$
16.103.	$(x^2+y+z^2+u\,,\ x-y^2+z-u^2)$	$(1,-1,1,-1)$
16.104.	$(e^{x-y} - y + z + u\,,\ e^{z-u} - u + x + y)$	$(-1,-1,-1,-1)$
16.105.	$(\lg(x+y) - \lg(z+u), \lg(x+z) - \lg(y-u))$	(e,e,e,e)

14. Variety dimenze 3 v $\mathbb{R}^4$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^4$, v níž je nulová hladina funkce F trojrozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^4$ leží v Ω, a najděte rovnice tečné nadroviny a normály variety v bodě c.

	$F(x,y,z,u) =$	$c =$
16.106.	$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{u}{4}\right)^2 - 1$	$(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2)$
16.107.	$x^2 + 3xy + y^2 - z^2 - zu - 3u^2$	$(1,2,-1,2)$
16.108.	$x^3 + x + xy + y - 4xyz - 2yz + 3zu$	$(1,-1,2,-2)$
16.109.	$e^{x+y-z} + e^{z+u-x} + x + y - z + 2u$	$(1,1,2,-1)$
16.110.	$\lg(x^2+y^2) - \lg(z^2+u^2) + x + y + z + u$	$(3,4,-3,-4)$

15. Záměna jedné proměnné

Najděte všechny maximální otevřené intervaly $J \subset \mathbb{R}$, pro něž platí: Všechny koeficienty rovnice $L(y) = 0$ jsou v J spojité a existuje interval $I \subset \mathbb{R}$ tak, že $g(I) = J$ a že $\dot{g} \neq 0$ všude v I. Pak proveďte substituci $x = g(t)$ $(t \in I,\ x \in J)$ a ověřte, že rovnice $L(y) = 0$ přejde v rovnici $M(y) = 0$ s konstantními koeficienty.[13])

	$L(y)$	$g(t)$	$M(y)$
16.111.	$x^2y'' + 4xy' - 4y$	$\pm\, e^t$	$\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y$
16.112.	$x^2y'' - 6y$	$\pm\, e^t$	$\ddot{y} - \dot{y} - 6y$
16.113.	$x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + y$	$\pm\, e^t$	$\dddot{y} + y$
16.114.	$x^3y''' - 3x^2y'' + xy' - y$	$\pm\, e^t$	$\dddot{y} - 6\ddot{y} + 6\dot{y} - y$
16.115.	$x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 7x^2y'' + xy' - y$	$\pm\, e^t$	$\ddddot{y} - y$
16.116.	$x^4y^{(4)} - 11x^2y'' + xy' - y$	$\pm\, e^t$	$\ddddot{y} - 6\dddot{y} + 6\dot{y} - y$
16.117.	$xy'' - y' - 6x^3y$	$\pm\sqrt{t}$	$2\ddot{y} - 3y$
16.118.	$xy'' + (2x^2 - 1)\,y' - 4x^3y$	$\pm\sqrt{t}$	$\ddot{y} + \dot{y} - y$
16.119.	$xy'' - (3x^3 + 2)\,y' - 18x^5y$	$\sqrt[3]{t}$	$\ddot{y} - \dot{y} - 2y$
16.120.	$2xy'' + y' + 2y$	t^2	$\ddot{y} + 4y$
16.121.	$2xy''' + 3y'' - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,y$	t^2	$\dddot{y} - 8y$
16.122.	$x^6y''' + 6x^5y'' + x^2\,(6x^2 - 1)\,y'$	t^{-1}	$\dddot{y} - \dot{y}$
16.123.	$x^6y'' + 3x^5y' + 4y$	$\pm\, t^{-1/2}$	$\ddot{y} + y$
16.124.	$(1 - x^2)\,y'' - xy' - 9y$	$\sin t$	$\ddot{y} - 9y$
16.125.	$(1 - x^2)\,y''' - 3xy''$	$\cos t$	$\dddot{y} + \dot{y}$
16.126.	$y'' + (\cos x + \operatorname{tg} x)\,y' + (\cos^2 x)\,y$	$\arcsin t$	$\ddot{y} + \dot{y} + y$
16.127.	$y'' - y' + e^{2x}y$	$\lg t$	$\ddot{y} + y$
16.128.	$y'' + \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}\,y' - \dfrac{2y}{(x^2 + 1)^2}$	$\operatorname{tg} t$	$\ddot{y} - \dot{y} - 2y$

[13]) V kapitole 18 uvidíme, že se řešení rovnice s konstantními koeficienty (tj. rovnice tvaru $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny$, kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou *čísla*) redukuje na řešení algebraické rovnice $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Proto má transformace rovnic s nekonstantními koeficienty na rovnice s konstantními koeficienty značný význam.

16.129. $y'' - (2\operatorname{tg} x)y' - \dfrac{y}{\cos^4 x}$ $\qquad$ $\operatorname{arctg} t$ $\qquad$ $\ddot{y} - y$

16.130. $(x^2+1)y'' + xy' - y$ $\qquad$ $\sinh t$ $\qquad$ $\ddot{y} - y$

16. Záměna dvou a tří proměnných

16.131. Za situace z Př. 16.12 ověřte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\Big) + \frac{\cos 2\varphi}{r}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big).$$

16.132. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2, nechť čísla $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2, j = 1,2)$ splňují podmínku $J := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ a nechť funkce g je definována v $\mathbb{R}^2$ rovností

$$g(u,v) := a_{11}u + a_{12}v\,,\ \ h(u,v) := a_{21}u + a_{22}v\,.$$

Dosazením $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ do $f(x,y)$ definujte funkci $F := f \circ (g,h)$ a ověřte tyto transformační vzorce:

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \frac{1}{J^2}\Big(\Big(a_{12}\frac{\partial F}{\partial u} - a_{11}\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2 + \Big(a_{22}\frac{\partial F}{\partial u} - a_{21}\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2\Big),$$

$$\Delta f = \frac{1}{J^2}\Big((a_{12}^2 + a_{22}^2)\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\,(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (a_{11}^2 + a_{21}^2)\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\Big).$$

16.133. Předpokládejte, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (proměnných x, y) je třídy C_2 a že $F := f \circ (g,h)$, kde $g(u,v) := u^2 + v^2$, $h(u,v) := u^2 - v^2$. Ověřte, že jakobián $\partial(g,h)/\partial(u,v)$ je roven $8uv$, a dokažte, že v množině $\Omega := \{(u,v);\ uv \neq 0\}$ je

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \frac{1}{8u^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + \frac{1}{8v^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2,$$

$$\Delta f = \frac{1}{8u^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{8v^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{8u^3}\,\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{8v^3}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,.$$

16.134. Nechť $g(u,v) := uv$, $h(u,v) := u/v$; ověřte, že v $\Omega := \{(u,v);\ uv \neq 0\}$ je $\partial(g,h)/\partial(u,v) = -2u/v \neq 0$, a odvoďte transformační vzorce

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \frac{1+v^4}{4v^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + \frac{1-v^4}{2uv}\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1+v^4}{4u^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2,$$

$$\Delta f = \frac{1+v^4}{4v^2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{u}\,\frac{\partial F}{\partial u}\Big) + \frac{1-v^4}{2uv}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1+v^4}{4u^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1-3v^4}{4u^2 v}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,.$$

16.135. Položte $g(u,v) := u\cosh v$, $h(u,v) := u\sinh v$ a dokažte, že pak je $\partial(g,h)/\partial(u,v) = u$, takže funkce (g,h) je difeomorfní v jistém okolí každého bodu množiny $\Omega := \{(u,v);\ u \neq 0\}$.

Předpokládejte, že $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2, položte $F := f \circ (g,h)$ a dokažte, že v Ω platí tyto identity:

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \cosh 2v\Big(\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + \frac{1}{u^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2\Big) - \frac{2\sinh 2v}{u}\,\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\,,$$

$$\Delta f = \cosh 2v\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{u}\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\Big) - \frac{2\sinh 2v}{u}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u}\,\frac{\partial F}{\partial v}\Big).$$

16.136. Dokažte, že funkce $g(r,\varphi) := (r\cos^2\varphi, r\sin^2\varphi)$ třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ zobrazuje množinu $\Omega := \mathbb{R}_+ \times (0, \frac{1}{2}\pi)$ prostě na otevřený první kvadrant $\mathbb{R}^2_+$, přičemž $\partial(g_1,g_2)/\partial(r,\varphi) = r\sin 2\varphi \neq 0$ v Ω.

Za předpokladu, že f je třídy C_1 v $\mathbb{R}^2_+$ a že $F := f \circ g$, dokažte, že v Ω platí identita

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = 2\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\Big)^2 + \frac{2\operatorname{cotg} 2\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{4r^2}\,(\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{cotg}^2\varphi)\Big(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big)^2.$$

16.137. Cylindrické souřadnice (r,φ,z) bodu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ jsou definovány rovností

$$(x,y,z) = g(r,\varphi,z) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,. \tag{102}$$

Dokažte, že funkce g je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$ a že všude v $\mathbb{R}^3$ je

$$\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,z)} = r\,, \tag{103}$$

takže g je difeomorfní v jistém okolí každého bodu z $\mathbb{R}^3$ neležícího na ose z. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f \circ g$; dokažte, že pro $r \neq 0$ je

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \Big(\frac{\partial F}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F}{\partial z}\Big)^2,$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r}\,.$$

16.138. Sférické souřadnice (r,φ,ϑ) bodu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ jsou definovány rovností

$$(x,y,z) = g(r,\varphi,\vartheta) := (r\cos\varphi\cos\vartheta\,, r\sin\varphi\cos\vartheta\,, r\sin\vartheta)\,. \tag{104}$$

Dokažte, že g je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$ a že všude v $\mathbb{R}^3$ je

$$\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = r^2\cos\vartheta\,, \tag{105}$$

takže g je difeomorfní v jistém okolí každého bodu množiny

$$\Omega := \{(r,\varphi,\vartheta);\, r \in \mathbb{R}_+,\ \varphi \in \mathbb{R},\ \vartheta \not\equiv \tfrac{1}{2}\pi \mod \pi\}, \tag{106}$$

jejímž obrazem při zobrazení g je prostor $\mathbb{R}^3$, z něhož je vynechána osa z.

Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f \circ g$; dokažte, že všude v Ω platí identity

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \Big(\frac{\partial F}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\Big(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\Big)^2,$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial F}{\partial \vartheta}.$$

16.139. Nechť

$$(x,y,z) = g(u,v,w) := (u-w, u-v, v-2w)$$

pro všechna $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$; dokažte, že g je pak prosté zobrazení $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$ třídy C_∞, pro něž je $\partial(g_1,g_2,g_3)/\partial(u,v,w) \equiv 1$ v $\mathbb{R}^3$.

Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f \circ g$; ověřte, že pak v $\mathbb{R}^3$ platí identity

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = 6\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + 9\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2 + 3\Big(\frac{\partial F}{\partial w}\Big)^2 + 14\,\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + 8\,\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial w} + 10\,\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial w},$$

$$\Delta f = 6\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 9\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} + 14\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 8\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} + 10\,\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}.$$

16.140. Dokažte, že jakobián transformace

$$(x,y,z) = g(u,v,w) := (u, uv, uvw)$$

třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$ je roven $u^2 v$, takže g je difeomorfní v jistém okolí každého bodu množiny $\Omega := \{(u,v,w);\, uv \ne 0\}$.

Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f \circ g$; ověřte, že pak v Ω platí identity

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + \frac{1+v^2}{u^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2 + \frac{1+w^2}{u^2v^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial w}\Big)^2 -$$
$$\frac{2v}{u}\,\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2w}{u^2 v}\,\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial w},$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1+v^2}{u^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1+w^2}{u^2v^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} - \frac{2v}{u}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2w}{u^2 v}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w} +$$
$$\frac{2v}{u^2}\,\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{2w}{u^2v^2}\,\frac{\partial F}{\partial w}.$$

Řešení

Parciální derivace prvního i druhého řádu funkce g v bodě A jsou uvedeny vždy v lexikografickém pořadí, pro funkci dvou proměnných tedy v pořadí $\partial_1 g$, $\partial_2 g$ a $\partial_{11} g$, $\partial_{12} g$, $\partial_{22} g$, pro funkci tří proměnných v pořadí $\partial_1 g$, $\partial_2 g$, $\partial_3 g$ a $\partial_{11} g$, $\partial_{12} g$, $\partial_{13} g$, $\partial_{22} g$, $\partial_{23} g$, $\partial_{33} g$.

Abychom se vyhnuli zlomkům, uvádíme často místo těchto derivací jejich (většinou kladné) násobky: Je-li g např. zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, zápis $\gamma g' : (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ znamená, že $\partial_1 g(A) = (\alpha/\gamma,\, \beta/\gamma)$, $\partial_2 g(A) = (\alpha'/\gamma, \beta'/\gamma)$; podobně pro derivace řádu 2. Jsou-li všechny parciální derivace řádu 1 resp. 2 v bodě A rovny 0, píšeme za „g' :“ resp. za „g'' :“ jen „0“.

Difeomorfismy

16.01. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; $A = (-2,-2)$; $6g' : (0,1), (-1,0)$; $36g'' : (1,1), (-1,1), (-1,-1)$.

16.02. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; $A = (0,-1)$; $g' : (1,0), (0,1)$; $g'' : (0,-2), (2,0), (0,2)$.

16.03. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(\frac{1}{2}(2k+1)\pi, 0);\, k \in \mathbb{Z}\}$; $A = (0,0)$; $g' : (1,0), (0,1)$; $g'' : 0$.

16.04. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,y);\, y = 0\}$; $A = (\frac{1}{2}\lg 2, \frac{1}{4}\pi)$; $g' : (1,1), (1,-1)$; $g'' : (1,1), (1,-1), (-1,-1)$.

16.05. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $A = (e^{-1}, 0)$; $\pi g : (-\pi e, 0), (0, -e)$; $\pi g'' : (-\pi e^2, 0), (0, -e^2), (\pi e^2, 0)$.

16.06. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $A = (1,1)$; $2g' : (1,1), (1,-1)$; $4g'' : (-1,0), (0,1), (-1,0)$.

16.07. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $A = (1 + \frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi)$; $3g' : (2,-1), (2,2)$; $27g'' : (4,4), (4,4), (4,4)$.

16.08. $A = (0,-2)$; $12g' : (-3,-3), (-2,2)$; $72g'' : (3,-3), (-9,-9), (-4,4)$.

16.09. $A = (0,0)$; $3g' : (0,1), (3,0)$; $9g'' : (0,-2), (3,-3), (0,0)$.

16.10. $A = (1,1)$; $g' : (0,-1), (-1,0)$; $g'' : (-1,0), (0,0), (0,-1)$.

16.11. $A = (1,1)$; $2g' : (1,1), (-1,1)$; $4g'' : (1,0), (0,1), (1,0)$.

16.12. $A = (1,-1)$; $2g' : (1,1), (1,-1)$; $4g'' : (1,-1), (-1,-1), (1,-1)$.

16.13. $A = (1, -\frac{1}{4}\pi)$; $g' : (1,0), (4,-2)$; $\frac{1}{4}g'' : (-2,1), (-8,4), (-36,17)$.

16.14. $A = (0,0)$; $g' : (0,1), (-1,0)$; $g'' : 0$.

16.15. $A = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$; $2g' : (1,1), (-1,1)$; $4g'' : (-1,-2), (2,-1), (-1,-2)$.

16.16. $\Omega = \mathbb{R}^3$; $A = (1,1,1)$; $2g' : (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$; $2g'' : (0,-1,-1), (0,0,0), (0,0,0), (-1,0,-1), (0,0,0), (-1,-1,0)$.

16.17. $\Omega = \{(x,y,z);\, x \not\equiv 0 \bmod \pi, y \not\equiv 0 \bmod \pi, z \not\equiv 0 \bmod \pi\}$; $A = (0,0,0)$; $2g' : (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$; $g'' : 0$.

16.18. $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$; $A = (0,2,-2)$; $6g' : (1,-2,1), (4,10,-2), (1,4,1)$; $6g'' : (0,1,0), (-1,0,-1), (0,1,0), (-2,8,-2), (-1,0,-1), (0,1,0)$.

16.19. $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$; $A = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; $g' : (1,2,-2), (2,1,2), (-2,2,1)$; $\frac{1}{2}g'' : (-5,-1,1), (-1,1,-4), (1,-4,1), (1,5,1), (-4,1,-1), (1,-1,-5)$.

16.20. $\Omega = \{(x,y,z);\, xyz \neq 0\}$; $A = (\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$;
$g' : (1,-1,0), (0,-1,-1), (1,0,-1)$;
$g'' : (1,-1,0), (0,-1,0), (1,0,0), (0,-1,-1), (0,0,-1), (1,0,-1)$.

16.21. $\Omega = \mathbb{R}^3$; $A = (1,1,1)$; $2g' : (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)$;
$8g'' : (1,1,2), (-1,0,-1), (0,-1,-1), (2,1,1), (-1,-1,0), (1,2,1)$.

16.22. $\Omega = \{(x,y,z);\, x^2+y^2 > 0, y^2+z^2 > 0, z^2+x^2 > 0\}$; $A = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
$g' : (0,1,-1), (1,0,1), (-1,1,0)$;
$2g'' : (-2,-5,5), (-1,1,-2), (1,-2,1), (5,2,5), (-2,1,-1), (5,-5,-2)$.

16.23. $\Omega = \{x,y,z);\, \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \neq \pm 1\}$; $A = (0,0,0)$;
$g' : (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0)$; $g'' : 0$.

16.24. $A = (0,0,0)$; $g' : (0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)$;
$g'' : (0,0,0), (0,-1,0), (-1,0,0), (0,0,0), (0,0,-1), (0,0,0)$.

16.25. $A = (1,0,-2)$; $2g : (2,0,1), (0,-2,-1), (0,0,1)$;
$4g'' : (0,0,-2), (2,0,1), (0,0,-1), (-4,8,0), (2,-4,0), (0,0,0)$.

16.26. $A = (1,1,1)$; $2g' : (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,1,1)$;
$8g'' : (-3,-3,-3), (5,-3,1), (-3,1,5), (-3,-3,-3), (1,5,-3), (-3,-3,-3)$.

16.27. $A = (0,0,0)$; $2g' : (0,-1,-1), (-1,0,-1), (-1,-1,0)$;
$-8g'' : (2,3,3), (3,3,2), (3,2,3), (3,2,3), (2,3,3), (3,3,2)$.

16.28. $A = (2+\lg 2, 2+\lg 2, 2+\lg 2)$; $4g' : (-1,-1,3), (3,-1,-1), (-1,3,-1)$;
$32g'' : (7,7,-9), (7,-17,7), (-17,7,7), (-9,7,7), (7,7,-17), (7,-9,7)$.

16.29. $A = (0,0,0)$; $g' : (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$;
$g'' : (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,0,0), (1,0,0), (0,0,0)$.

16.30. $A = (0,0,0)$; $2g' : (-1,-1,0), (0,-1,-1), (1,0,1)$; $g'' : 0$.

Implicitní funkce

Za jmény funkcí g, h, ... (a dvojtečkou) jsou napsány derivace řádů 1, 2, ... funkcí $g, h, \ldots$ v bodech $a, b, \ldots$; chybí-li u některého čísla cvičení některá z funkcí, znamená to, že neexistuje. Parciální derivace řádu 2 jsou uspořádány lexikograficky vzhledem k proměnným, podle nichž se derivuje. Hodnoty některých derivací jsou vektory; jejich složky jsou pak v okrouhlých závorkách.

16.31. $g: -1, 0, 0$; $h: -1, 0, 0$

16.32. $g: 1, 0, 0$; $h: 1, 0, 0$

16.33. $g: 0, 0, 0$

16.34. $h: 0, -6, 102$

16.35. $h: 0, 2, -24$

16.36. $g: 0, 1, 0$

16.37. $g: -1, 0, 0$; $h: -1, 0, 0$

16.38. $g: 0, 1, -\frac{9}{2}$

16.39. $h: 0, 1, -2$

16.40. $g: -\frac{1}{2}, 0, 0$; $h: -2, 0, 0$

16.41. $g: 3, -26$; $h: \frac{1}{3}, \frac{26}{27}$

16.42. $g: 1, -4$; $h: 1, 4$

16.43. $h: 0, \frac{1}{2}$

16.44. $g: -1, 4\pi^2$; $h: -1, 4\pi^2$

16.45. $g: \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}$; $h: 2, 3$

16.46. $g: (-1,-1), (-\frac{10}{7}, \frac{2}{7})$; $h: (-1, 1), (-\frac{10}{7}, \frac{12}{7})$; $i: (-1, 1), (\frac{2}{7}, -\frac{12}{7})$

16.47. $h: (0, 0), (0, 0)$

16.48. $g: (1, -1), (-6, 6)$; $h: (1, -1), (6, 0)$; $i: (-1, -1), (6, 0)$

16.49. $g: (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$; $h: (-2, -1), (2, 0)$; $i: (2, -1), (2, 0)$

16.50. $g: (-1, 1), (0, 0)$; $h: (-1, -1), (0, 0)$; $i: (1, -1), (0, 0)$

16.51. $h: (0, 1), (0, 0)$; $i: (0, 1), (0, 0)$

16.52. $h: (0, 0), (0, 0)$

16.53. $g: (-1, 1), (2, 0)$; $h: (-1, -1), (2, 2)$; $i: (1, -1), (0, 2)$

16.54. $g: (1, -1), (-1, 4)$; $h: (1, -1), (1, 3)$; $i: (-1, -1), (4, 3)$

16.55. $g: (1, 1), (0, 0)$; $h: (1, 1), (0, 0)$; $i: (1, 1), (0, 0)$

16.56. $g: (1, 1, 1), (4, 0, 4)$; $h: (1, 1, 1), (-4, -4, 0)$; $i: (1, 1, 1), (0, 4, 4)$; $j: (1, 1, 1), (-4, 0, -4)$

16.57. $g: (0, 0, -3), (0, 0, 6)$; $j: (-\frac{1}{3}, 0, 0), (\frac{2}{9}, 0, 0)$

16.58. $g: (-2, 1, 2), (-8, 0, 8)$; $h: (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1), (-1, -1, 0)$; $i: (1, -2, 2), (0, -8, 8)$; $j: (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}), (-1, 0, -1)$

16.59. $g: (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}), (0, 0, 0)$; $h: (-2, -2, 1), (0, 0, 0)$; $i: (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (0, 0, 0)$; $j: (-2, 1, -2), (0, 0, 0)$

16.60. $g: (0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (0, -1, -\frac{5}{4})$; $i: (-\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}), (-\frac{8}{27}, 0, -\frac{19}{27})$; $j: (2, 0, 3), (10, 0, -19)$

16.61. $g: (-2, 1), (6, -6, 2)$; $h: (2, 1), (10, 2, -2)$; $i: (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

16.62. $g:(2,-1),(43,-4,3)$; $h:(2,-1),(0,-2,3)$; $i:(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

16.63. $i:(0,0),(2,0,-4)$

16.64. $g:(-1,0),(-1,0,-\frac{1}{2})$; $i:(0,-1),(-\frac{1}{2},0,-1)$

16.65. $g:(-1,-1),(4,2,4)$; $h:(-1,-1),(4,2,4)$; $i:(-1,-1),(4,2,4)$

16.66. $g:(0,-1),(-2,-1,-\frac{3}{2})$; $h:(0,-1),(-2,1,-\frac{3}{2})$

16.67. $g:(-1,1),(0,-2,0)$; $h:(1,1),(4,2,0)$; $i:(1,-1),(-4,2,0)$

16.68. $g:(3,-2),(6,-\frac{3}{2},2)$; $h:(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}),(3,-\frac{3}{8},\frac{1}{4})$; $i:(\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(-\frac{8}{9},-\frac{5}{18},-\frac{2}{9})$

16.69. $g:(\pi^{-1},-\pi^{-1}),(0,-\pi^{-2},2\pi^{-2})$; $h:(1,-\pi),(0,-1,2\pi)$;
$i:(1,\pi),(0,1,0)$

16.70. $g:(0,2),(0,1,-8)$; $h:(0,\frac{1}{2}),(0,-\frac{1}{4},1)$

Ve výsledcích cvičení 16.71–16.80 užíváme pro lepší přehlednost podobné značení jako v 16.01–16.30, tj. např. za znaky g' a g'' píšeme parciální derivace prvního a druhého řádu funkce g podle příslušných proměnných v lexikografickém pořadí.

16.71. $g':(-3,2),(-2,1)$; $5g'':(-114,78),(-36,12),(2,-14)$
$2h':(-3,1),(-1,-1)$; $20h'':(-3,39),(39,-27),(1,-13)$
$i':(-2,1),(1,-2)$; $5i'':(26,-14),(-40,40),(14,-26)$
$3j':(-2,-1),(-1,-2)$; $45j'':(-2,38),(-40,40),(-38,2)$
$2k':(-1,-1),(1,-3)$; $20k'':(13,-1),(27,-39),(-39,3)$
$l':(1,-2),(2,-3)$; $5l'':(14,-2),(-12,36),(-78,114)$

16.72. $g':(1,0),(0,1)$; $g'':0$
$i':(0,1),(1,0)$; $i'':0$
$j':(0,1),(1,0)$; $j'':0$
$l':(1,0,(0,1)$; $l'':0$

16.73. $h':(0,1),(0,-1)$; $3h'':(5,4),(-4,-5),(-1,4)$
$i':(0,1),(0,-1)$; $3i'':(-4,-2),(5,1),(-1,4)$
$l':(1,0),(1,0)$; $3l'':(2,-4),(1,1),(-4,5)$

16.74. $g':(-1,-1),(-1,-2)$; $g'':(0,0),(3,-2),(6,-4)$
$h':(-1,1),(-1,2)$; $h'':(0,0),(3,-8),(6,-16)$
$2i':(-1,-1),(-1,1)$; $2i'':(1,-4),(0,0),(-1,4)$
$j':(-1,-1),(-1,1)$; $j'':(0,0),(-3,5),(0,0)$
$k':(-2,1),(-1,1)$; $k'':(4,-10),(2,-5),(0,0)$
$l':(-2,1),(1,-1)$; $l'':(-16,10),(8,-5),(0,0)$

16.75. $4g' : (2,-3), (-4,-2)$; $16g'' : (0,9), (0,6), (16,12)$

$2h' : (1,-2), (-2,1)$; $4h'' : (1,4), (-2,-2), (4,1)$

$2i' : (-3,4), (-4,4)$; $4i'' : (9,0), (12,0), (24,-8)$

$2j' : (4,-4), (4,-3)$; $4j'' : (-8,24), (0,12), (0,9)$

$3k' : (2,-4), (-4,-2)$; $3k'' : (2,4), (0,0), (4,2)$

$4l' : (2,-3), (-4,-2)$; $16l'' : (0,9), (0,6), (16,12)$

16.76. $g' : 1,0,-4$; $g'' : 2,7,4,-6,0,24$

$4h' : -1,0,-1$; $8h'' : 3,14,1,-12,0,3$

$j' : 0,-4,-1$; $j'' : -6,-28,-7,24,4,2$

16.77. $g' : -1,2,-2$; $g'' : 0,-2,2,3,-3,3$

$2h' : -1,2,-1$; $8h'' : -5,0,-1,0,0,3$

$2i' : 1,2,1$; $8i'' : 5,0,1,0,0,-3$

$j' : 2,-2,-1$; $j'' : -5,5,2,-5,-2,0$

16.78. $g' : -1,1,0$; $2g'' : 0,0,-1,0,1,0$

$i' : 1,0,1$; $2i'' : 0,0,0,0,-1,0$

$j' : 1,0,-1$; $2j'' : 0,0,0,0,1,0$

16.79. $g' : 1,1,1$; $g'' : \pi^2,0,0,0,0,2\pi^2$

$h' : -1,-1,1$; $\pi^{-2}h'' : -3,-2,2,-2,2,-2$

$i' : -1,-1,1$; $i'' : -\pi^2,0,0,-2\pi^2,0,0$

$j' : -1,-1,1$; $\pi^{-2}j'' : -1,-1,1,-3,1,-1$

16.80. $3h' : -2,-2,0$; $27h'' : 14,20,15,-10,15,0$

$2i' : -2,-3,0$; $4i'' : -8,-10,0,-5,-5,0$

$2j' : -2,-3,0$; $4j'' : -8,-2,0,7,-5,0$

Variety

Pro množinu všech singulárních bodů užíváme symbol SB; stejně jako v kapitole 15 znamenají symboly **T**, **TR**, **TP**, **N**, **NR** a **NP** po řadě tečnu, tečnou rovinu, tečný prostor, normálu, normálovou rovinu a normálový prostor. Rovnice tvaru $a_1x + a_2y + a_3 = 0$, $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$, $a_1x + a_2y + a_3z + a_4u + a_5 = 0$ nahrazujeme opět sledy příslušných koeficientů a_i; je-li nějaká množina určena několika rovnicemi, píšeme mezi příslušné sledy koeficientů znak $\wedge$.

16.81. $\mathrm{SB} = \{(0,0)\}$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \mathrm{SB}$; **T:** $1-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-3, 7\sqrt{2}-10$; **N:** $3-2\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}-4$

16.82. $\mathrm{SB} = \{(0,0)\}$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \mathrm{SB}$; **T:** $1, 3\sqrt{3}, 1$; **N:** $9, -\sqrt{3}, -5$

16.83. $\mathrm{SB} = \{(x, x);\ x \equiv \frac{1}{4}\pi \mod \pi\};\ \Omega = \mathbb{R}^2 - \mathrm{SB};$ **T:** $1, -1, 0;$ **N:** $3, 3, -\pi$

16.84. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^2;$ **T:** $3, 1, -4\pi;$ **N:** $1, -3, 2\pi$

16.85. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^2;$ **T:** $1, 3, 1;$ **N:** $3, -1, -7$

16.86. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **T:** $2, -2, 1, -1 \wedge 1, -2, -1, 0;$ **N:** $8, 6, -4, -11$

16.87. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **T:** $1, -2, -1, 0 \wedge 2, -1, 1, 0;$ **N:** $1, 1, -1, -3$

16.88. $\mathrm{SB} = \{(0, -1, -1)\};\ \Omega = \{(x, y, z);\ xy > z\} - \mathrm{SB};$
T: $1, 2, -1, -3 \wedge 0, 1, -1, 0;$ **N:** $1, -1, -1, 0$

16.89. $\mathrm{SB} = \{(x, y, z);\ |xyz - \frac{1}{2}| = 1\};\ \Omega = \{(x, y, z);\ |xyz - \frac{1}{2}| < 1,\ z \neq 0\};$
T: $4, 1, 4, -6 \wedge 1, 0, -1, 0;$ **N:** $1, -8, 1, 15$

16.90. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\};$ **T:** $1, 2, 3, 0 \wedge 3, 2, 1, 0;$ **N:** $1, -2, 1, 6$

16.91. $\mathrm{SB} = \{(0, 0, 0, u);\ u \in \mathbb{R}\};\ \Omega = \mathbb{R}^4 - \mathrm{SB};$
T: $1, 0, 0, 1, 0 \wedge 1, 0, -1, 0, 0 \wedge 1, 1, -1, -1, 0;$ **N:** $1, -1, 1, -1, 4$

16.92. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **T:** $0, 1, 1, 0, 0, \wedge 0, 0, 1, 1, 0 \wedge 1, 0, 0, 1, 0;$
N: $1, -1, 1, -1, 0$

16.93. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **T:** $1, -1, -1, -1, 1 \wedge 1, -1, 1, 1, -1 \wedge 1, 1, -1, 1, -1;$
N: $1, 1, 1, -1, -3$

16.94. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \{(x, y, z, u);\ y > x,\ u > z\};$
T: $1, -1, -2, 1, 1 \wedge 2, -1, -1, 1, -1 \wedge 1, 1, -1, -1, 0;$ **N:** $0, 1, 0, 1, -4$

16.95. $\mathrm{SB} = \{(0, 0, 0, 0), (\pm 1, 0, 0, 0)\};\ \Omega = \mathbb{R}^4 - \mathrm{SB};$
T: $1, 1, -1, 0, -1 \wedge 1, -1, 1, 0, -1 \wedge 1, 0, -1, 1, -1;$ **N:** $0, -1, -1, -1, 3$

16.96. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $3\sqrt{3}, 4, 12, -24\sqrt{2};$
N: $8\sqrt{2}, -6\sqrt{6}, 0, -7\sqrt{3} \wedge 0, 6\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -5$

16.97. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $3, 1, -2, 1;$ **N:** $1, -3, 0, 3 \wedge 0, 2, 1, -3$

16.98. $\mathrm{SB} = \{(0, 0, 0)\};\ \Omega = \mathbb{R}^3 - \mathrm{SB};$ **TR:** $1, 1, 3, 0;$
N: $1, -1, 0, -2 \wedge 0, 3, -1, 3$

16.99. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $2, -3, 1, 0;$ **N:** $3, 2, 0, -5 \wedge 0, 1, 3, -4$

16.100. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $1, 1, 1, 0;$ **N:** $1, -1, 0, 2 \wedge 0, 1, -1, -4$

16.101. $\mathrm{SB} = \{(x, y, z, u);\ (x = u = 0 \wedge |y| = |z|) \vee (y = z = 0 \wedge |x| = |u|)\};$
$\Omega = \mathbb{R}^4 - \mathrm{SB};$ **TR:** $2, 1, -1, -2, 0 \wedge 2, -1, 1, -2, 0;$ **NR:** $1, 0, 0, 1, -2 \wedge 0, 1, 1, 0, -4$

16.102. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **TR:** $1, -1, -1, 1, -4 \wedge 1, 1, 1, 1, 0;$
NR: $1, 0, 0, -1, 0 \wedge 0, 1, -1, 0, 0$

16.103. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **TR:** $2, 1, 2, 1, -2 \wedge 1, 2, 1, 2, 2;$
NR: $1, 0, -1, 0, 0 \wedge 0, 1, 0, -1, 0$

16.104. $\mathrm{SB}=\emptyset$; $\Omega=\mathbb{R}^4$; **TR:** $1,-2,1,1,1\wedge 1,1,1,-2,1$;
NR: $1,0,-1,0,0\wedge 0,1,1,1,3$

16.105. $\mathrm{SB}=\emptyset$; $\Omega=\{(x,y,z,u);\, x+y>0, z+u>0, x+z>0, y+u>0\}$;
TR: $1,1,-1,-1,0\wedge 1,-1,1,-1,0$; **NR:** $1,1,1,1,-4e\wedge 1,0,0,1,-2e$

16.106. $\mathrm{SB}=\emptyset$; $\Omega=\mathbb{R}^4$; **TP:** $12,6,4,3,-24$;
N: $2,-4,0,0,3\wedge 1,0,-3,0,4\wedge 2,0,0,-8,15$

16.107. $\mathrm{SB}=\{(0,0,0,0)\}$; $\Omega=\mathbb{R}^4-\mathrm{SB}$; **TP:** $8,7,0,-11,0$;
N: $0,0,1,0,1\wedge 7,-8,0,0,9\wedge 11,0,0,8,-27$

16.108. $\mathrm{SB}=\emptyset$; $\Omega=\mathbb{R}^4$; **TP:** $11,-10,0,6,-9$;
N: $0,0,1,0,-2\wedge 6,0,0,-11,-28\wedge 0,3,0,5,13$

16.109. $\mathrm{SB}=\emptyset$; $\Omega=\mathbb{R}^4$; **TP:** $1,2,-1,3,2$;
N: $2,-1,0,0,-1\wedge 1,0,1,0,-3\wedge 0,3,0,-2,-5$

16.110. $\mathrm{SB}=\{(-1,-1,1,1)\}$; $\Omega=\{(x,y,z,u);\, x^2+y^2>0, z^2+u^2>0\}-\mathrm{SB}$; **TP:** $31,33,31,33,0$; **N:** $1,0,-1,0,-6\wedge 0,1,0,-1,-8\wedge 33,-31,0,0,25$

Záměna jedné proměnné

U čísel příkladů uvádíme dvojice intervalů I, J, které bylo při řešení třeba nalézt; ($t\in I$, $x\in J$, $g(I)=J$). Index $\pm$ u $\mathbb{R}$ odpovídá témuž symbolu v zadání příkladu.

16.111 – 16.116. $\mathbb{R}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{\pm}$

16.117 – 16.118. $\mathbb{R}_{+}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{\pm}$

16.119. $\mathbb{R}_{-}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{-}$, $\mathbb{R}_{+}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{+}$

16.120 – 16.121. $\mathbb{R}_{\pm}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{+}$

16.122. $\mathbb{R}_{-}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{-}$, $\mathbb{R}_{+}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{+}$

16.123. $\mathbb{R}_{+}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}_{\pm}$

16.124. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)\to_{\mathrm{na}}(-1,1)$, $k\in\mathbb{Z}$

16.125. $(k\pi,(k+1)\pi)\to_{\mathrm{na}}(-1,1)$, $k\in\mathbb{Z}$

16.126. $(-1,1)\to_{\mathrm{na}}(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$

16.127. $\mathbb{R}_{+}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}$

16.128. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$

16.129. $\mathbb{R}\to_{\mathrm{na}}(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$

16.130. $\mathbb{R}\to_{\mathrm{na}}\mathbb{R}$