17. Extrémy funkcí několika proměnných

Reálná (konečná) funkce f definovaná na neprázdné množině X nabývá svého *maxima* (resp. *minima*) (v X) v bodě $a \in X$, je-li $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pro všechna $x \in X$. Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in X$ *extrém*, má-li tam buď maximum, nebo minimum.

Některé funkce svého maxima (minima) nabývají, jiné ne; v dalším proto budeme problému *najít extrémy funkce f na množině X* rozumět takto:

1. Pokud $\max f(X)$ existuje, vypočítat je a najít všechny body z X, v nichž f tohoto maxima nabývá; v opačném případě najít $\sup f(X)$.

2. Pokud $\min f(X)$ existuje, vypočítat je a najít všechny body z X, v nichž f tohoto minima nabývá; v opačném případě najít $\inf f(X)$. $\square$

Úloha najít extrémy funkce f bude mít při této obecnější formulaci problému řešení vždy; může se ovšem stát, že $\sup f(X) = +\infty$, nebo $\inf f(X) = -\infty$. Rovnost $\sup f(X) = +\infty$ (resp. $\inf f(X) = -\infty$) je, jak víme, ekvivalentní s podmínkou, že f není v X shora (resp. zdola) omezená; funkce f pak samozřejmě maximum (resp. minimum) v X nemá. (Dodejme, že z podmínky $X \neq \emptyset$ plyne, že není ani $\sup f(X) = -\infty$, ani $\inf f(X) = +\infty$.) $\square$

Při hledání extrémů funkce hraje velmi často podstatnou roli následující věta, v níž jsou vyjmenovány některé podmínky *nutné* k tomu, aby funkce f měla v určitém bodě množiny $X \subset \mathbb{R}^p$ (kde $p \in \mathbb{N}$) extrém. Zdůrazněme však, že žádná z podmínek věty *není postačující*.

Věta 17.1. *Je-li $X \subset \mathbb{R}^p$ a má-li funkce $f : X \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \operatorname{int} X$ extrém, platí tato dvě tvrzení:*

1) *Všechny směrové derivace $\partial_{(v)} f(a)$, které existují, jsou rovny nule. Speciálně: Všechny parciální derivace $\partial_i f(a)$, které existují, jsou rovny nule.*

2) *Je-li f v bodě a diferencovatelná, je $Df(a) = 0$.*

Důsledek. *Má-li f v bodě $a \in X$ extrém, jsou jen tyto tři možnosti:*

α) $a \in \operatorname{int} X$ a $Df(a) = 0$;

β) $a \in \operatorname{int} X$ *a f není v bodě a diferencovatelná*;

γ) $a \in \partial X$. $\square$

Definice. Je-li $a \in \operatorname{int} X$ a $Df(a) = 0$, říkáme, že a je **stacionární bod** funkce $f : X \to \mathbb{R}$. $\square$

Je-li tedy funkce f třídy C_1 v $\operatorname{int} X$, hledáme extrémy 1) v bodech z $\operatorname{int} X$, v nichž jsou všechny parciální derivace $\partial_i f$ rovny nule, a 2) na hranici množiny X; jinde funkce f extrémních hodnot nenabývá.

Ilustrujme hledání extrémů několika příklady. V prvních třech je množina $X \subset \mathbb{R}^p$ kompaktní, tj. uzavřená a omezená; protože f je v X navíc spojitá, je existence jejího maxima i minima v X zaručena důsledkem věty 12.7.

Příklad 17.1^o^. Vyšetřujme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^3 - 2x^2y + 3y^3 \ \text{ v } \ X := \langle -1,1\rangle^2. \tag{1}$$

Protože f je třídy C_∞ v celé rovině, najdeme nejdříve všechny její stacionární body. Snadno zjistíme, že funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2 \tag{2}$$

mají jediný společný kořen, a to bod $(0,0)$. Protože f v něm nabývá hodnoty 0 a protože f je v některých bodech z X kladná, v jiných záporná ($f(\pm 1, 0) = \pm 1$), *nemá f v bodě $(0,0)$ žádný extrém.*

Protože f v $\operatorname{int} X$ ani maxima, ani minima nenabývá, leží oba extrémy na hranici X. Vzhledem k tomu, že ∂X je sjednocením čtyř úseček, vyšetříme funkce

$$g_1(x) := f(x,-1) = x^3 + 2x^2 - 3\,, \quad g_2(x) := f(x,1) = x^3 - 2x^2 + 3\,, \tag{3}$$

$$h_1(y) := f(-1,y) = 3y^3 - 2y - 1\,, \quad h_2(y) := f(1,y) = 3y^3 - 2y + 1\,. \tag{4}$$

Derivace $3x^2 + 4x$ a $3x^2 - 4x$ funkcí (3) [1]) jsou rovny nule po řadě v bodech 0, $-\frac{4}{3}$ a v bodech 0, $\frac{4}{3}$. Protože body $\pm(\frac{4}{3}, 1)$ neleží v X, počítáme pouze hodnoty

$$f(-1,-1) = -2\,, \quad f(0,-1) = -3\,, \quad f(1,-1) = 0\,, \tag{5'}$$
$$f(-1,1) = 0\,, \qquad f(0,1) = 3\,, \qquad f(1,1) = 2\,. \tag{5''}$$

Derivace $h_1'(y) = h_2'(y) = 9y^2 - 2$ funkcí (4) mají kořeny $\pm c$, kde $c := \frac{1}{3}\sqrt{2}$; protože hodnoty funkce f ve vrcholech čtverce X jsou již uvedeny v $(5')$ a v $(5'')$, počítáme jen

$$f(-1,-c) = \tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -0.37\,, \quad f(-1,c) = -\tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -1.63\,, \tag{6'}$$
$$f(1,-c) = 1 + \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 1.63\,, \qquad f(1,c) = 1 - \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 0.37\,. \tag{6''}$$

Porovnáme-li hodnoty z $(5')$ – $(6'')$, vidíme, že

$$M := \max f(X) = f(0,1) = 3\,, \quad m := \min f(X) = f(0,-1) = -3\,. \tag{7}$$

Pro všechny body $(x,y) \in X$, pro něž je $(0,1) \neq (x,y) \neq (0,-1)$, platí přitom ostré nerovnosti $m < f(x,y) < M$.

Příklad 17.2^o^. Najděme extrémy funkce

$$f(x,y) := 4x^3 - 3x - 4y^3 + 9y \ \text{ v } \ X := \{(x,y);\, x^2 + y^2 \le 1\}; \tag{8}$$

f je opět třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 3 = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12y^2 + 9 = 0 \tag{9}$$

[1]) Funkce (3) buď skutečně derivujeme, nebo (což je zejména ve složitějších případech asi jednodušší) dosadíme do první rovnosti v (2) po řadě $y = -1$ a $y = 1$.

mají 4 řešení $\pm\frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$ a $\pm\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$. Protože všechny čtyři body leží v ∂X, nemá f v $\operatorname{int} X$ žádné stacionární body, a tedy ani extrémy.

Abychom našli extrémy funkce f na jednotkové kružnici ∂X, parametrizujme ji křivkou $(\cos t, \sin t)$, $t \in \langle -\pi, \pi\rangle$ a v souvislosti s tím přejděme od funkce $f(x, y)$ k funkci

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = 4\cos^3 t - 3\cos t - 4\sin^3 t + 9\sin t, \tag{10}$$

jejíž derivace je

$$\begin{aligned} g'(t) &= -12\cos^2 t \sin t + 3\sin t - 12\sin^2 t\cos t + 9\cos t \\ &= 3\cos^3 t\,(-4\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} t(1 + \operatorname{tg}^2 t) - 4\operatorname{tg}^2 t + 3(1 + \operatorname{tg}^2 t)). \end{aligned} \tag{11}$$

Uvedená úprava, při níž jsme vytkli $3\cos^3 t$ a užili identitu $\cos^{-2} t = 1 + \operatorname{tg}^2 t$, je korektní, protože $\cos t = 0 \Rightarrow \sin t = \pm 1 \Rightarrow g'(t) \neq 0$.

Položíme-li $\operatorname{tg} t = u$, dostaneme z výrazu v závorkách za $\cos^3 t$ po úpravě polynom $u^3 - u^2 - 3u + 3$, který má kořeny 1 a $\pm\sqrt{3}$. Je-li $t \in \langle -\pi, \pi\rangle$, je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t = 1 \quad &\Leftrightarrow (t = -\tfrac{3}{4}\pi) \vee (t = \tfrac{1}{4}\pi), \\ \operatorname{tg} t = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow (t = -\tfrac{1}{3}\pi) \vee (t = \tfrac{2}{3}\pi), \\ \operatorname{tg} t = \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow (t = -\tfrac{2}{3}\pi) \vee (t = \tfrac{1}{3}\pi); \end{aligned} \tag{12}$$

tato čísla t, krajní body $\pm\pi$ a příslušné hodnoty funkce g srovnejme do tabulky:

$t =$	$\pm\,\pi$,	$-\frac{3}{4}\pi$,	$-\frac{2}{3}\pi$,	$-\frac{1}{3}\pi$,	$\frac{1}{4}\pi$,	$\frac{1}{3}\pi$,	$\frac{2}{3}\pi$
$g(t) =$	$-\,1$,	$-\,3\sqrt{2}$,	$1 - 3\sqrt{3}$,	$-\,1 - 3\sqrt{3}$,	$3\sqrt{2}$,	$-\,1 + 3\sqrt{3}$,	$1 + 3\sqrt{3}$

Funkce g nabývá tedy svého maxima $M = 1 + 3\sqrt{3} \doteq 6.196$ v bodě $\alpha := \frac{2}{3}\pi$ a svého minima $m = -M$ v bodě $\beta := -\frac{1}{3}\pi$. Protože

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin\beta = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tag{13}$$

nabývá funkce f svého maxima a minima v bodech $\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$ a $\frac{1}{2}(1, -\sqrt{3})$; pro ostatní body $(x, y) \in X$ platí ostré nerovnosti $m < f(x, y) < M$. $\square$

V následujícím příkladu budeme hledat extrémy polynomu 3. stupně na jednoduché podmnožině prostoru $\mathbb{R}^3$; příklad dobře ilustruje skutečnost, že *délka a většinou i obtížnost příkladu roste rychle spolu s dimenzí.*

Příklad 17.3. Hledejme extrémy funkce

$$f(x, y, z) := x^2 + xz^2 + 2y^2 + yz^2 - \tfrac{1}{2}z^2 - 2x + y \quad \text{v} \quad X := \langle -1, 1\rangle^3, \tag{14}$$

která je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^3$ a splňuje tam identitu

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (2x + z^2 - 2,\ 4y + z^2 + 1,\ z(2x + 2y - 1)). \tag{14'}$$

Standardní vyšetření a zápis hodnot ve všech stacionárních bodech funkce f v $\operatorname{int} K$, uvnitř šesti stěn, dvanácti hran a v osmi vrcholech krychle K není obtížné, ale značně zdlouhavé; všechny potřebné údaje však obsahuje následující stručná tabulka, pomocí níž může čtenář snadno ověřit správnost svých výpočtů.

Množina	Charakteristika	Parc. derivace	Stac. body	f
krychle	$(-1,1)^3$	viz nahoře	$\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$	$-\frac{13}{12}$
stěna	$x=-1$	$z^2+4y+1, z(2y-3)$	$(-1,-\frac{1}{4},0)$	$\frac{23}{8}$
stěna	$x=1$	$z^2+4y+1, z(2y+1)$	$(1,-\frac{1}{4},0)$	$-\frac{9}{8}$
stěna	$y=-1$	$z^2+2x-2, z(2x-3)$	žádný	
stěna	$y=1$	$z^2+2x-2, z(2x+1)$	žádný	
stěna	$z=-1$	$2x-1, 4y+2$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)$	$-\frac{5}{4}$
stěna	$z=1$	$2x-1, 4y+2$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$	$-\frac{5}{4}$
hrana	$(x,y)=(-1,-1)$	$-5z$	$(-1,-1,0)$	4
hrana	$(x,y)=(-1,1)$	$-z$	$(-1,-1,0)$	6
hrana	$(x,y)=(1,-1)$	$-z$	$(1,-1,0)$	0
hrana	$(x,y)=(1,1)$	$3z$	$(1,1,0)$	2
hrana	$(x,z)=(-1,-1)$	$4y+2$	$(-1,-\frac{1}{2},-1)$	1
hrana	$(x,z)=(-1,1)$	$4y+2$	$(-1,-\frac{1}{2},1)$	1
hrana	$(x,z)=(1,-1)$	$4y+2$	$(1,-\frac{1}{2},-1)$	-1
hrana	$(x,z)=(1,1)$	$4y+2$	$(1,-\frac{1}{2},1)$	-1
hrana	$(y,z)=(-1,-1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},-1,-1)$	$-\frac{3}{4}$
hrana	$(y,z)=(-1,1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},-1,1)$	$-\frac{3}{4}$
hrana	$(y,z)=(1,-1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},1,-1)$	$\frac{13}{4}$
hrana	$(y,z)=(1,1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},1,1)$	$\frac{13}{4}$
vrchol	$(-1,-1,\pm1)$			$\frac{3}{2}$
vrchol	$(-1,1,\pm1)$			$\frac{11}{2}$
vrchol	$(1,-1,\pm1)$			$-\frac{1}{2}$
vrchol	$(1,1,\pm1)$			$\frac{7}{2}$

Z tabulky je patrné, že

$$M := \max f(X) = 6 = f(-1,1,0), \quad m := \min f(X) = -\tfrac{5}{4} = f(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\pm1),$$

zatímco v ostatních bodech $(x,y,z) \in X$ je $m < f(x,y,z) < M$.

Poznámka 17.1. V předcházejících třech příkladech jsme viděli, jak algoritmus hledání extrémů funkce několika proměnných obecně vypadá: V případě rovinné množiny X hledáme stacionární body v $\operatorname{int} X$, hranici množiny X buď parametrizujeme vhodnou křivkou φ, nebo rozložíme na několik množin $X_1, \dots, X_n$, které lze snadno parametricky popsat, a uvnitř těchto množin hledáme opět stacionární body. Nakonec porovnáme hodnoty ve všech nalezených stacionárních bodech a v krajních bodech křivky φ resp. v hraničních bodech všech množin X_i. V případě množiny $X \subset \mathbb{R}^3$ je postup obdobný, jen kroků je více; při každém kroku klesá dimenze vyšetřovaných množin o 1.

Tento postup je jako prakticky každý algoritmus jen obecným návodem; není striktním předpisem, který je nutné za všech okolností a do všech detailů dodržovat. Inteligentní kalkulus musí sice vysvětlit podstatu podobných algoritmů, ale zároveň musí řešitele vést k tomu, aby využíval všech specifických vlastností dané situace. Vzhledem k nekonečné různotvárnosti situací nelze poskytnout obecný návod k jejich řešení; velmi často záleží na pozorovací schopnosti řešitele (získané zpravidla dlouholetou početní praxí), zdali odhalí nějaký specifický rys problému, dovolující algoritmus zjednodušit a zkrátit. Ilustrujme to příkladem.

Příklad 17.4. Hledejme extrémy funkce

$$f(x,y,z) := \sin x \sin y \cos z + \sin x \cos y + \cos x \quad \text{v} \quad X := \langle 0, \pi \rangle^3, \tag{15}$$

která je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$. Protože její derivace

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin x \sin y \sin z \tag{16}$$

je záporná v $\operatorname{int} X$ [2]) a nulová v ∂X, je $f(x,y,z)$ pro každý bod (x,y) množiny $Y := \langle 0, \pi \rangle^2$ nerostoucí funkcí proměnné z. Podrobněji: Je-li $(x,y) \in \operatorname{int} Y$, tato funkce klesá; je-li $(x,y) \in \partial Y$, je konstantní. Pro všechna $(x,y,z) \in X$ platí proto nerovnosti

$$f(x,y,0) \ge f(x,y,z) \ge f(x,y,\pi), \tag{17}$$

z nichž plyne, že funkce f nabývá svého maxima na dolní stěně ($z = 0$) krychle X a svého minima na stěně horní ($z = \pi$).

Hledejme proto maximum funkce

$$g(x,y) := f(x,y,0) = \sin x (\cos y + \sin y) + \cos x \tag{18}$$

a minimum funkce

$$h(x,y) := f(x,y,\pi) = \sin x (\cos y - \sin y) + \cos x \tag{19}$$

ve čtverci Y.

[2]) takže f nemá v $\operatorname{int} X$ žádné stacionární body

Protože

$$
\frac{\partial g}{\partial x} = \cos x(\cos y + \sin y) - \sin x\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \sin x(\cos y - \sin y)\,, \tag{20}
$$

$$
\frac{\partial h}{\partial x} = \cos x(\cos y - \sin y) - \sin x\,, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\sin x(\cos y + \sin y) \tag{21}
$$

a protože v $(0,\pi)$ je $\sin x > 0$, je derivace $\partial g/\partial y$ (resp. $\partial h/\partial y$) v intervalu $(0,\pi)$ rovna nule, právě když je $y = \frac{1}{4}\pi$ (resp. $y = \frac{3}{4}\pi$). Dosazením této hodnoty do $\partial g/\partial x$ (resp. do $\partial h/\partial x$) získáme výraz

$$
\sqrt{2}\cos x - \sin x \quad (\text{resp. } -\sqrt{2}\cos x - \sin x)\,, \tag{22}
$$

který se v $(0,\pi)$ anuluje, právě když je $x = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$ (resp. $x = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}$). Bod $(a_1, b_1) := (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ (resp. $(a_2, b_2) := (\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$) je tedy jediným stacionárním bodem funkce g (resp. h) v $\operatorname{int} Y$ a snadným výpočtem zjistíme, že

$$
g(a_1, b_1) = \sqrt{3} \quad (\text{resp. } h(a_2, b_2) = -\sqrt{3})\,. \tag{23}
$$

Protože je $g \equiv h$ v ∂Y, stačí tam vyšetřit např. první z těchto funkcí. Jak zjistíme dosazením, je

$$
g(0,y) \equiv 1\,,\ g(\pi,y) \equiv -1\,,\ g(x,0) = \cos x + \sin x\,,\ g(x,\pi) = \cos x - \sin x\,,
$$

přičemž derivace funkce $g(x,0)$ (resp. $g(x,\pi)$) se v intervalu $(0,\pi)$ anuluje, právě když je x rovno $\frac{1}{4}\pi$ (resp. $\frac{3}{4}\pi$). Uvážíme-li, že

$$
g(0,0) = 1,\ g(\tfrac{1}{4}\pi, 0) = \sqrt{2},\ g(\pi,0) = -1
$$
$$
(\text{resp. } g(0,\pi) = 1,\ g(\tfrac{3}{4}\pi, \pi) = -\sqrt{2},\ g(\pi,\pi) = -1)\,,
$$

vidíme, že všechny hodnoty funkcí g a h v ∂Y leží mezi $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$. Funkce $g|Y$ nabývá proto svého maxima $\sqrt{3}$ jen v bodě (a_1, b_1) a funkce $h|Y$ svého minima $-\sqrt{3}$ jen v bodě (a_2, b_2).

Shrneme-li, vidíme, že funkce f má v X tyto vlastnosti:

$$
\begin{gathered}
\max f(X) = f(a_1, b_1, 0) = \sqrt{3}\,,\ \min f(X) = f(a_2, b_2, \pi) = -\sqrt{3}\,, \\
(a_1, b_1, 0) \neq (x,y,z) \neq (a_2, b_2, \pi) \Rightarrow -\sqrt{3} < f(x,y,z) < \sqrt{3}\,.
\end{gathered} \tag{24}
$$

Všimněme si, že jsme funkci f nemuseli vůbec vyšetřovat na čtyřech ze šesti stěn krychle X; bylo to proto, že 1) $f(x,y,z)$ je konstantní funkcí z pro každé $(x,y) \in \partial Y$ a že 2) funkce g (resp. h) nabývá svého maxima (resp. minima) v jistém vnitřním bodě množiny Y, zatímco její hodnoty v ∂Y jsou vesměs menší (resp. větší) než její hodnota v tomto bodě.[3]) Všimněme si dále, že vzhledem k identitě $g \equiv h$ v ∂Y stačilo v této množině vyšetřit jen jednu z funkcí g, h.

[3]) Kdyby však např. funkce g nabývala svého maxima v nějakém bodě $(a,b) \in \partial Y$, nabývala by funkce f své maximální hodnoty ve všech bodech úsečky s krajními $(a,b,0)$ a (a,b,π).

Poznámka 17.2. Na nekompaktní množině $X \subset \mathbb{R}^p$ nemusí mít maximum (resp. minimum) ani omezená spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ mající stacionární body; příkladem takové funkce v $\mathbb{R}^2$ je $\operatorname{arctg}(x^3y^3)$, jejímiž stacionárními body jsou právě všechny body ležící na některé ze souřadnicových os.

Na žádný problém s extrémy nenarazíme u funkcí $f : X \to \mathbb{R}$ neomezených shora i zdola; je zřejmé, že maximum ani minimum nemají a že $\inf f(X) = -\infty$, $\sup f(X) = +\infty$.

Pro funkci omezenou zdola (resp. shora) se problém existence a nalezení minima (resp. maxima) na nekompaktní množině dá leckdy rozřešit pomocí tohoto jednoduchého tvrzení:

Věta 17.2. *Nechť množiny X a K leží v nějakém metrickém prostoru, přičemž K nechť je neprázdná kompaktní množina splňující podmínku $\operatorname{int} K \subset X$. Funkce $f : (X \cup K) \to \mathbb{R}$ nechť je spojitá v K a nechť existuje bod $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že platí implikace*

$$x \in \partial K \cup (X - K) \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) < f(x_0)). \tag{25}$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$. $\square$

Protože při aplikaci právě vyslovené věty je důležité dobře rozumět jejímu mechanismu, připojíme krátký důkaz, a to pro funkci omezenou zdola; pro funkci omezenou shora je argumentace obdobná:

Minimum funkce $f|K$ existuje podle důsledku věty 12.7; označíme-li je A, je zřejmě $A \le f(x_0)$. Podle (25) nenabývá f hodnoty A nikde v $\partial K \cup (X - K)$; protože $X \cup K = \operatorname{int} K \cup \partial K \cup (X - K)$, plyne z toho, že všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = A$, leží v $\operatorname{int} K$. Z inkluze $\operatorname{int} K \subset X$ ihned plyne, že A je minimem funkce f v X. $\square$

V dalším budeme hledat extrémy jen v případech, kdy X leží v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$. Jak víme, funkce $f : X \to \mathbb{R}$ může nabýt svého minima a maxima v X jen v některém stacionárním bodě ležícím v $\operatorname{int} X$, nebo v některém bodě z $\operatorname{int} X$, v němž f není diferencovatelná, nebo v některém bodě z ∂X. V konkrétních případech zpravidla najdeme v $\operatorname{int} X$ všechny stacionární body funkce f a všechny body, v nichž f není diferencovatelná, a vypočteme hodnoty ve všech těchto bodech; v závislosti na tom pak sestrojíme množinu K splňující předpoklady V. 17.2.

Příklad 17.5°. Vyšetřme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^3 - 3xy + y^3 \quad \text{v} \quad X := \langle 0, +\infty)^2 . \tag{26}$$

Tato funkce je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$; protože není v X omezená shora, je $\sup f(X) = +\infty$, a zbývá zabývat se jejím minimem.

Rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2 = 0 \tag{27}$$

mají – jak snadno zjistíme – právě dva společné kořeny, a to body $(0,0)$ a $(1,1)$, ale jen druhý z nich leží v $\operatorname{int} X$. Protože $f(1,1) = -1$, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ tak, aby bod $(1,1)$ ležel v $\operatorname{int} K$ a aby f byla např. nezáporná všude v $\partial K \cup (X - K)$; tím dokážeme, že jediným bodem, v němž má funkce $f|X$ minimum, je bod $(1,1)$.

Protože výrazy x^3 a y^3 jsou všude v X nezáporné a v $\operatorname{int} X$ dokonce kladné, je třeba nějak odhadnout vliv nekladného (a v $\operatorname{int} X$ záporného) výrazu $-3xy$. Zřejmě však platí implikace

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x,y) \geq x^3 - 3xy \geq 3x(3-y) \geq 0\,, \ \text{je-li } y \leq 3\,, \tag{28}$$

a ze symetrie plyne, že

$$f(x,y) \geq 0\,, \ \text{je-li } y \geq 3,\ x \leq 3\,; \tag{29}$$

kromě toho platí implikace

$$x \geq 3,\ y \geq 3 \Rightarrow f(x,y) \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x-y)^2 + xy) \geq 0\,. \tag{30}$$

Množina $K := \langle 0,3 \rangle^2$ má zřejmě všechny žádané vlastnosti, protože každý bod $x \in \partial K \cup (X - K)$ leží buď na některé souřadnicové ose, nebo splňuje některou z podmínek $(x \geq 3) \wedge (y \leq 3)$, $(x \leq 3) \wedge (y \geq 3)$, $(x \geq 3) \wedge (y \geq 3)$; ve všech těchto případech je $f(x,y) \geq 0 > \min f(K) = f(1,1) = -1$.

Příklad 17.6$^{\mathbf{o}}$. Hledejme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \ \text{ v } \ X := \mathbb{R}^2_+\,. \tag{31}$$

Protože $x^2 + xy + y^2 = 0$ jen pro $(x,y) = (0,0)$, je funkce f třídy C_∞v množině $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; protože f je v X nezáporná a neomezená shora, budeme se zabývat jen jejím minimem.

Stacionární body funkce f najdeme řešením rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y - \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y - \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Vynásobíme-li první z rovnic výrazem $(x+2y)$, druhou výrazem $-(2x+y)$ a sečteme-li výsledky, získáme rovnici $4(x^2 - y^2) = 0$ jako nutnou (ale samozřejmě nikoli postačující) podmínku, aby bod (x,y) byl stacionární. Musí tedy být $y = \pm x$; protože však žádné body tvaru $(x,-x)$ v X neleží, musí být dokonce $y = x$. Dosadíme-li to do (32) a vynásobíme-li výsledek výrazem $3x^3$, získáme rovnici $3x^4 = 1$, která má v $\mathbb{R}_+$ jediný kořen, a to $a := 3^{-1/4} \doteq 0.7598$; jak snadno zjistíme, je $f(a,a) = 2\sqrt{3} \doteq 1.1547$.

Sestrojme kompaktní množinu K tak, že $(a,a) \in \operatorname{int} K \subset X$ a že

$$(x,y) \in \partial K \cup (X - K) \Rightarrow f(x,y) \geq 2; \tag{33}$$

tím bude podle V. 17.2 dokázáno, že existuje $\min f(X)$ a rovná se $f(a,a)$.

Protože nerovnost $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ platí pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a protože zlomek v (31) je kladný pro všechna $(x,y) \neq (0,0)$, je

$$f(x,y) > x^2 - xy + y^2 \geq \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq 2\,, \text{ je-li } x^2 + y^2 \geq 4\,. \tag{34_1}$$

Protože $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ a $0 \leq x^2 + xy + y^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ všude v $\mathbb{R}^2$, je

$$f(x,y) \geq \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \geq 2\,, \text{ je-li } 0 < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\,. \tag{34_2}$$

Je-li $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$, je

$$g(x) := f(x,0) = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ a } h(y) := f(0,y) = y^2 + \frac{1}{y^2}\,; \tag{35}$$

protože $g(0+) = g(+\infty-) = +\infty$ a protože $g'(x) = 2(x - x^{-3}) \neq 0$ v $\mathbb{R}_+ - \{1\}$, nabývá funkce $g|\mathbb{R}_+$ podle V. 8.2 v bodě 1 svého minima, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$ je $g(x) \geq g(1) = 2$. Podobně pro funkci h.

Položíme-li tedy

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, \tfrac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

(tj. je-li K průnik uzavřeného mezikruží $\overline{U((0,0),2)} - U((0,0),\frac{1}{2})$ s uzavřeným prvním kvadrantem), je podmínka (33) splněna.[4]

Příklad 17.7. Hledejme extrémy funkce

$$f(x,y,z) := (x^3 + y^3 + z^3)\,e^{-(x^2+y^2+z^2)} \text{ v } X := \mathbb{R}^3\,. \tag{36}$$

Označme

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad s := x^3 + y^3 + z^3 \tag{37}$$

a uvažme, že pro každé $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ je $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, $|z| \leq r$, takže

$$|f(x,y,z)| \leq g(r) := 3r^3 \exp(-r^2)\,.$$

Protože funkce g je omezená v $\mathbb{R}$, je funkce f omezená v $\mathbb{R}^3$, a budeme tedy řešit problém obou extrémů této funkce.

[4]) Všimněme si, že nyní *není* $K \subset X$ (na rozdíl od příkladu 17.5), i když slabší podmínka $\operatorname{int} K \subset X$ z věty 17.2 samozřejmě splněna je.

Násobíme-li parciální derivace funkce (36) podle x, y, z nenulovým faktorem $\exp r^2$, získáme funkce

$$(38)\quad f_x(x,y,z) := x(3x-2s),\ f_y(x,y,z) := y(3y-2s),\ f_z(x,y,z) := z(3z-2s),$$

jejichž společné kořeny jsou identické se stacionárními body funkce f. Při hledání těchto kořenů využijeme symetrii $f(x,y,z)$ v proměnných x, y, z.

1) Je zřejmé, že bod $(0,0,0)$ je kořen funkcí (38) a že $f(0,0,0) = 0$.

2) Protože $f_y(x,0,0) = f_z(x,0,0) = 0$ a protože rovnice $f_x(x,0,0) = 3x - 2x^3 = 0$ má kořeny 0 a $\pm u$, kde $u := \sqrt{3/2}$, mají rovnice (38) kromě bodu (0,0,0) řešení $(\pm u, 0, 0)$. Ze symetrie plyne, že stacionárními body funkce f jsou i body

$$(39)\qquad (\pm u,0,0),\ (0,\pm u,0),\ (0,0,\pm u),$$

v nichž f nabývá hodnot

$$(39')\qquad \pm U := \pm\Big(\frac{3}{2e}\Big)^{3/2} \doteq \pm 0.41\,.$$

3) Protože $f_z(x,y,0) = 0$ pro všechna x, y, řešme za předpokladu, že $x \neq 0 \neq y$, rovnice $f_x(x,y,0) = 0$, $f_y(x,y,0) = 0$, tj. rovnice $x(3x-2s) = 0$, $y(3y-2s) = 0$. Z nich plyne, že $y = x$; dosadíme-li to do první z rovnic (spolu se $z = 0$), získáme rovnici $x(4x^2-3) = 0$ s nenulovým řešením $\pm v$, kde $v := \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Z toho a ze symetrie rovnic (38) plyne, že dalšími stacionárními body jsou

$$(40)\qquad (\pm v,\pm v,0),\ (\pm v,0,\pm v),\ (0,\pm v,\pm v);$$

funkce f v nich nabývá hodnot

$$(40')\qquad \pm V := \pm\frac{1}{4}\Big(\frac{3}{e}\Big)^{3/2} \doteq \pm 0.29\,.$$

4) Zbývá najít kořeny funkcí (38) za předpokladu, že $xyz \neq 0$. Pak je zřejmě $x = y = z$, a dosadíme-li to do rovnice $f_x(x,y,z) = 0$, získáme rovnici $3x(x^2-2) = 0$ s nenulovým řešením $\pm w$, kde $w := 1/\sqrt{2}$. Seznam stacionárních bodů uzavírají proto body

$$(41)\qquad (\pm w,\pm w,\pm w),$$

v nichž f nabývá hodnot

$$(41')\qquad \pm W := \pm\frac{3}{(2e)^{3/2}} \doteq \pm 0.24\,.$$

Maximem a minimem hodnot funkce f v nalezených patnácti stacionárních bodech jsou čísla

$$(42)\qquad \pm U = f(\pm u,0,0) = f(0,\pm u,0) = f(0,0,\pm u) = \pm\Big(\frac{3}{2e}\Big)^{3/2} \doteq \pm 0.409916\,;$$

abychom dokázali, že tato čísla jsou maximem a minimem množiny $f(X)$ (a že pro všechna (x,y,z) různá od bodů (39) je $|f(x,y,z)| < U$), stačí najít kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^3$, která obsahuje všech 15 stacionárních bodů uvnitř, přičemž

$$(x,y,z) \in \partial K \cup (\mathbb{R}^3 - K) \Rightarrow |f(x,y,z)| < U\,. \tag{43}$$

Funkce $g(r)$ je kladná v $\mathbb{R}_+$ a má derivaci $g'(r) = 3r^2(3-2r^2)\exp(-r^2)$ zápornou všude v intervalu $(\sqrt{3/2}\,, +\infty)$, takže tam klesá. Z nerovností $|f(x,y,z)| \le g(r)$, $e^3 > 20$ plyne, že

$$g(3) = \frac{3^4}{e^9} < \frac{100}{20^3} = \frac{1}{80} = 0.0125 < U\,;$$

za K tedy stačí zvolit uzavřenou kouli $\overline{U((0,0,0),3)}$.

Příklad 17.8. Funkce f třídy C_∞ definovaná rovností

$$f(x,y) := 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3} \quad \text{v} \quad X := \mathbb{R}^2_+ \tag{44}$$

je nezáporná a shora neomezená. Jediným společným řešením rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - \frac{8y}{x^3} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4} = 0 \tag{45}$$

v X je bod $(x,y) = (2,3)$, přičemž $f(2,3) = 10$. Tvrdíme, že *f má v bodě $(2,3)$ minimum*.

Abychom to dokázali, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ obsahující bod $(2,3)$ uvnitř a splňující podmínku

$$(x,y) \in X - \operatorname{int} K \Rightarrow f(x,y) > 10\,. \tag{46}$$

Uvažme především, že všechny tři sčítance na pravé straně (44) jsou v X kladné, takže $f(x,y)$ je větší než kterýkoli z nich. Uvažme konkrétněji, že

1) $f(x,y) > 3x \ge 10$, je-li $x \ge 4$; [5])

2) $0 < x \le 4 \Rightarrow f(x,y) > 4y/x^2 \ge \frac{1}{4}y \ge 10$ pro všechna $y \ge 40$;

3) $f(x,y) > 27/y^3 \ge 10$, je-li $y^3 \le 2.7$, tedy jistě pro všechna $y \in (0,1\rangle$;

4) $y \ge 1 \Rightarrow f(x,y) > 4y/x^2 \ge 4/x^2 \ge 10$, je-li $x^2 < \frac{2}{5}$, tedy jistě pro $x \in (0, \frac{3}{5}\rangle$ (protože $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \frac{2}{5}$).

Z 1)$-$4) je patrné, že stačí položit

$$K := \langle \tfrac{3}{5}, 4\rangle \times \langle 1, 40\rangle\,. \tag{47}$$

* * *

[5]) Místo „4“ bychom samozřejmě mohli napsat „10/3“, ale pro jednoduchost dalších výpočtů i zápisu se vyhýbáme zbytečným zlomkům. Je zřejmé, že při hledání množiny K máme značnou volnost, a to nejen v tomto konkrétním případě. Je-li (v obecném případě) $a \in X$ jediný bod, pro nějž je $A := \min f(X) = f(a)$, splňuje *každá* kompaktní množina $K \subset X$, obsahující bod a uvnitř, podmínku $x \in X - \operatorname{int} K \Rightarrow f(x) > A$. Hlavním kritériem pro výběr množiny K je proto *jednoduchost ověření této podmínky za situace, kdy existenci minima teprve dokazujeme*.

Mnohdy potřebujeme najít extrémy funkce na množině, která má dimenzi menší, než je dimenze eukleidovského prostoru, v němž pracujeme – např. na elipse v rovině nebo na závitnici v prostoru; omezíme se přitom na extrémy na hladinách (obecně vektorových) funkcí, speciálně tedy na varietách. Pro tyto extrémy se historicky ujal název **vázané extrémy** [6]) a při jejich hledání je mnohdy užitečná tato věta:

Věta 17.3. *Nechť jsou splněny tyto předpoklady: $p < q$ jsou přirozená čísla, $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ je otevřená množina, funkce*

$$F = (F_1, \dots, F_p) : \Omega \to \mathbb{R}^p \quad \text{a} \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \tag{48}$$

jsou třídy C_1 *v* Ω*, množina*

$$V := \{x \in \Omega;\ F(x) = 0\} \tag{49}$$

je neprázdná, hodnost matice $F'(x)$ je rovna p v každém bodě $x \in V$.

Pak pro každý bod $x \in V$, v němž je $f(x)$ rovno buď $\max f(V)$*, nebo* $\min f(V)$*, existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tak, že*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} = 0 \quad \textit{pro} \quad i = 1, \dots, q. \tag{50}$$

Poznámka 17.3. Jak jsme již řekli, nehledáme nyní extrémy funkce f na celé množině Ω, ale jen na její („ménědimenzionální“) části V, charakterizované vektorovou rovnicí $F(x) = 0$ neboli skalárními rovnicemi

$$F_1(x_1, \dots, x_q) = 0, \ \dots, \ F_p(x_1, \dots, x_q) = 0, \tag{51}$$

kterým se říká **vazby** – odtud termín „vázaný extrém“. Podle definice je množina V z právě vyslovené věty zřejmě $(q-p)$-rozměrnou varietou v $\mathbb{R}^q$.

Existence maxima a minima dané funkce na dané varietě není obecně zaručena, nejedná-li se o *kompaktní* varietu (a spojitou funkci). Ve větě 17.3 se na „složitost“ variety V neklade žádná podmínka, zatímco vazby, se kterými jsme se setkali v rozřešených příkladech této kapitoly, byly velmi jednoduché. Tak např. horní strana čtverce X v Př. 17.1 byla charakterizována podmínkou $y = 1$, a stačilo tedy do $f(x, y)$ dosadit, abychom získali funkci již jen jedné proměnné. V Př. 17.2 jsme kružnici parametrizovali – opět proto, abychom získali funkci jedné proměnné.

Při hledání extrémů na jednoduchých hladinách lze podobně postupovat i v případech vícedimenzionálních: Máme-li hledat extrémy funkce $f(x, y, z)$ na jednotkové

[6]) S jednoduchými vázanými extrémy jsme se ve skutečnosti již několikrát setkali, a to v případech, kdy jsme při hledání extrémů danou funkci vyšetřovali i na hranici dané množiny. Např. v Př. 17.2 jsme vyšetřovali funkci f dvou proměnných na jednotkové kružnici, tedy na jednorozměrné varietě. Podobné problémy se často řeší např. v dynamice hmotného bodu, je-li jeho pohyb vázán např. na nějakou křivku nebo plochu.

sféře v $\mathbb{R}^3$, můžeme z rovnice $x^2+y^2+z^2=1$ vypočítat např. z a hledat extrémy funkcí

$$g_\pm(x,y) := f(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2}\,) \text{ v kruhu } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2\le 1\}\,;$$

lze též přejít ke sférickým souřadnicím, tedy k funkci

$$h(\varphi,\vartheta) := f(\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta) \text{ v intervalu } \langle 0,2\pi\rangle \times \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle\,.$$

Jindy se hodí např. cylindrické nebo jiné křivočaré souřadnice; vždy jde o to, abychom transformací souřadnic získali z f co nejjednodušší funkci.

Právě uvedené poznámky měly naznačit, že při hledání extrémů funkcí na varietách nejsme odkázáni jen na V. 17.3 a že je vhodné pokusit se předem odhadnout, která metoda povede v daném případě k cíli snadněji; protože záleží na specifických vlastnostech příslušné funkce a variety, obecná konkrétnější rada neexistuje. $\square$

Věta 17.3 podává jistou *nutnou* podmínku, kterou musí splňovat každý bod $x\in V$, v němž má $f\,|\,V$ maximum nebo minimum; najdeme-li tedy všechna společná řešení $x=(x_1,\dots,x_q)$ rovnic (50) – (51), budou mezi nalezenými řešeními všechny body, v nichž má $f\,|\,V$ extrém. [7]) Čísla λ_i, která se v této souvislosti nazývají **Lagrangeovy neurčité koeficienty**, mají jen pomocný charakter. Není nutné je počítat (i když se tomu někdy nevyhneme); spíše se snažíme co nejrychleji je eliminovat. Protože soustava $(p+q)$ rovnic (50) – (51) je obecně nelineární a rovnice nemusí být dokonce ani algebraické, může být její řešení značně netriviální, ne-li nepřekonatelný problém. $\square$

Uveďme dva příklady vázaných extrémů:

Příklad 17.9. Hledejme extrémy funkce $f(x,y) := x^2+y^2$ na nulové hladině V funkce

$$F(x,y) := 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4\,. \tag{52}$$

Geometrický smysl úlohy: Vhodným otočením souřadnicových os bychom se mohli zbavit „smíšeného členu“ $6xy$, což by ihned prozradilo, že $V=F_{-1}(0)$ je elipsa o středu v počátku. Vzhledem k tomu, že $f(x,y)$ je čtverec vzdálenosti bodu (x,y) od počátku, máme zjistit (bez otáčení os), které její body jsou nejméně a nejvíce vzdálené od počátku; tím zároveň určíme délku a polohu jejích poloos. [8])

Ověření předpokladů věty 17.3 nečiní potíže: Protože např. $F(2/\sqrt{5}\,,0)=0$, je $V\neq\emptyset$; funkce f a F jsou třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a V je varieta, protože obě derivace

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 10x - 6y\,, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -6x + 10y \tag{53}$$

se anulují jen v počátku, který ve V zřejmě neleží.

[7]) Ještě jednou však zdůrazněme, že věta 17.3 existenci extrémů nezaručuje.

[8]) Náš další postup bude samozřejmě na těchto geometrických představách nezávislý.

Jakožto vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení F je množina V uzavřená. Z rovnosti $F(x,y)=0$ plyne, že $5(x^2+y^2)=4+6xy\le 4+3(x^2+y^2)$, takže nerovnost $2(x^2+y^2)\le 4$ platí pro všechny body $(x,y)\in V$; to dokazuje, že varieta V je omezená. V je tedy kompaktní a existence minima i maxima množiny $f(V)$ je zaručena.

Podle V. 17.3 máme najít všechny body $(x,y)\in V$, k nimž existuje $\lambda\in\mathbb{R}$ tak, že

$$(54)\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0\,;$$

tyto rovnice lze po dosazení $\partial f/\partial x=2x$, $\partial f/\partial y=2y$ upravit na tvar

$$(55)\qquad (5\lambda+1)x=3\lambda y,\quad (5\lambda+1)y=3\lambda x\,.$$

Protože nemůže být $\lambda=0=5\lambda+1$, je z těchto rovnic patrné, že 1) $xy=0\Rightarrow x=y=0$; 2) $(\lambda=0)\vee(5\lambda+1=0)\Rightarrow x=y=0$; protože bod $(0,0)$ ve V neleží, plyne z toho, že všechna čtyři čísla λ, $5\lambda+1$, x, y jsou nenulová.

Dělením první rovnice v (55) druhou z nich získáme rovnost $x/y=y/x$ neboli $y^2=x^2$ neboli $y=\pm x$. Dosadíme-li $y=x$ (resp. $y=-x$) do rovnice $F(x,y)=0$, dostaneme rovnici $4x^2=4$ (resp. $16x^2=4$), která má řešení $x=\pm1$ (resp. $x=\pm\frac12$). Všechny body, v nichž funkce $f\,|\,V$ nabývá minima nebo maxima, leží tedy v množině $\{(1,1),\ (-1,-1),\ (\frac12,-\frac12),\ (-\frac12,\frac12)\}$; Lagrangeův koeficient λ nebylo třeba počítat.[9] Protože $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ a $f(\frac12,-\frac12)=f(-\frac12,\frac12)=\frac12$, nabývá $f\,|\,V$ v prvních dvou bodech svého maxima, v druhých dvou svého minima.

Geometricky to znamená, že elipsa $F(x,y)=0$ (o středu v počátku) má poloosy délek $\sqrt2$ a $1/\sqrt2$, přičemž její hlavní osa (procházející body $(1,1)$ a $(-1,-1)$) svírá s osou x úhel $\frac14\pi$.

Příklad 17.10. Najděme extrémy funkce $f(x,y,z):=xyz$ na nulové hladině W vektorové funkce $F=(F_1,F_2)$, kde

$$(56)\qquad F_1(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-4,\ \ F_2(x,y,z):=(x-1)^2+y^2-1\,.$$

Nulová hladina W funkce F je průnik sféry o středu $(0,0,0)$ a poloměru 2 s válcovou plochou, jejíž osa je rovnoběžná s osou z a jejíž průnik s rovinou xy je kružnice o středu $(1,0)$ a poloměru 1. Jak již víme z Př. 16.8, je tato hladina známa pod názvem *Vivianiho křivka*; je kompaktní, protože je průnikem kompaktní množiny $(F_1)_{-1}(0)$ (sféry) s uzavřenou množinou $(F_2)_{-1}(0)$ (válcem).

Zkontrolujme, zdali platí předpoklady věty 17.3: Obě funkce f a F jsou třídy C_∞, v celém $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$(57_1)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}=2x\,,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y\,,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=2z\,,$$

[9]) Pro čtenáře, kteří jsou občas – třeba ze zvědavosti – ochotni vyslechnout nebo udělat i něco zbytečného: V prvním případě je $\lambda=-1/2$, ve druhém $\lambda=-1/8$.

$$(57_2) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0;$$

v důsledku toho je

$$(58) \qquad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} = 4y, \quad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, z)} = 4z(1 - x), \quad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = -4yz.$$

Snadno zjistíme, že jediným bodem $(x, y, z) \in W$, v němž jsou všechny tyto jakobiány rovny nule, je bod $D := (2, 0, 0)$. Tento bod je tedy jediným singulárním bodem hladiny W; hladina W je kompaktní, nekompaktní množina $V := W - \{D\}$ je (jednorozměrná) varieta.[10])

Extrémy funkce f ve V najdeme užitím V. 17.3; navíc je však třeba zjistit, zdali f nemá extrém v singulárním bodě hladiny W, tj. vzít v úvahu, že $f(2, 0, 0) = 0$. Protože

$$(59) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy,$$

budou mít rovnice (50) a (51) tvar

$$(60') \qquad yz + 2x\lambda_1 + 2(x - 1)\lambda_2 = 0, \; xz + 2y\lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0, \; xy + 2z\lambda_1 = 0,$$

$$(60'') \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \; (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Eliminací parametrů λ_1, λ_2 z rovnic $(60')$ získáme rovnici $z^2(x - x^2 + y^2) = xy^2$, která má spolu s rovnicemi $(60'')$ těchto sedm řešení (x, y, z):

$$(61) \quad (2, 0, 0), \; (0, 0, \pm 2), \; (\tfrac{6}{5}, \pm a, \pm b), \; (\tfrac{6}{5}, \pm a, \mp b), \; \text{kde } a := \tfrac{2}{5}\sqrt{6}, \; b := 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

Hodnoty funkce f v bodech (61) jsou po řadě

$$(62) \qquad 0, \; 0, \; A, \; -A, \; \text{kde } A := \frac{48}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} \doteq 1.48723.$$

Z toho je patrné, že

$$(63) \qquad \begin{aligned} \min f(W) &= f(\tfrac{6}{5}, -a, b) = f(\tfrac{6}{5}, a, -b) = -A, \\ \max f(W) &= f(\tfrac{6}{5}, a, b) = f(\tfrac{6}{5}, -a, -b) = A; \end{aligned}$$

ve všech ostatních bodech $(x, y, z) \in W$ je $-A < f(x, y, z) < A$.

---

[10]) Vivianiho křivka je homeomorfní s lemniskatou a lze ji napsat jako sjednocení dvou oblouků $L_\pm$ s popisem $(x, y) = \frac{1}{2}\left(4 - z^2, \pm z\sqrt{4 - z^2}\right)$, $z \in \langle -2, 2 \rangle$. Oblouky $L_\pm$, jejichž krajními body jsou oba póly $(0, 0, \pm 2)$ sféry $(F_1)_{-1}(0)$, se protínají v bodě $D = (2, 0, 0)$; uvedené popisy jsme získali řešením vektorové rovnice $F(x, y, z) = (0, 0)$ vzhledem k (x, y).

Cvičení

A. Najděte extrémy funkce f v intervalu X.

	$f(x,y) =$	$X =$
17.01°.	$x - y - x^2y^3$	$\langle 0,1\rangle \times \langle -1,2\rangle$
17.02°.	$x^3 - xy + 2y - y^2$	$\langle -1,0\rangle \times \langle 1,2\rangle$
17.03°.	$x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + y^4$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.04°.	$xy(1 - x^2y^2)$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.05°.	$xy^2 - 2xy - 3x^2 + x - y$	$\langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$
17.06°.	$x^2 - 3xy - 2y^3$	$\langle -2,2\rangle^2$
17.07°.	$x^3 - 3x^2 + 6xy - 3x + 4y$	$\langle -1,0\rangle^2$
17.08°.	$6x^3 + 2xy + 3x^2y + y^2$	$\langle 0,1\rangle \times \langle -2,0\rangle$
17.09°.	$x^4 - 4xy + y^4$	$\langle -2,1\rangle^2$
17.10°.	$\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$	$\langle -2,2\rangle^2$
17.11°.	$\dfrac{x^2 - 5xy + y^2}{x^2 + y^2 - 4}$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.12°.	$\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x^4 + y^4 + 1}$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.13°.	$1 - xy\sqrt{x^2 + y^2}$	$\langle -1,1\rangle \times \langle -2,2\rangle$
17.14°.	$x\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}\right)$	$\langle 1,2\rangle \times \langle -1,1\rangle$
17.15°.	$x - y + \sin x \cos y$	$\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle^2$
17.16°.	$\sin x \sin y \sin(x + y)$	$\langle 0,\pi\rangle^2$
17.17°.	$\sin x \sin y \sin(x - y)$	$\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle^2$
17.18°.	$\sin x \cos y + \cos x \sin^2 y$	$\langle 0,\pi\rangle^2$
17.19°.	$\sin x + \cos y + \cos(x - y)$	$\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle^2$
17.20°.	$\cos^3 x \cos y + \sin x \sin^3 y$	$\langle -\pi, 0\rangle^2$
17.21°.	$\sin^2 x + \cos x \sin y - \cos^2 y$	$\langle -\pi,\pi\rangle^2$
17.22°.	$\sin^2(x - y)\cos^2(x + y)$	$\langle 0,\pi\rangle^2$

17.23$^{\mathbf{o}}$.	$\operatorname{arctg} xy - \lg(1 + x^2y^2)$	$\langle 1,5\rangle \times \langle -2,2\rangle$
17.24$^{\mathbf{o}}$.	$\lg(1 + x^2y) - \lg(1 + xy^2)$	$\langle 0,2\rangle^2$
17.25$^{\mathbf{o}}$.	$x^2 - y^2 + \lg(1 + x^2 + y^2)$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.26$^{\mathbf{o}}$.	$(1 - x^2y^2)\,e^{-xy}$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.27$^{\mathbf{o}}$.	$(x^2 - y)\,e^{-xy^2}$	$\langle -1,2\rangle \times \langle -1,1\rangle$
17.28$^{\mathbf{o}}$.	$xy^2\,e^{-x-y}$	$\langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$
17.29$^{\mathbf{o}}$.	$e^x \sinh y - e^y \cosh x$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.30$^{\mathbf{o}}$.	$e^x \sin y - e^y \sin x$	$\langle -\pi,\pi\rangle^2$
17.31$^{\mathbf{o}}$.	$\arcsin \dfrac{3xy}{1 + x^2 + y^2}$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.32$^{\mathbf{o}}$.	$\operatorname{arccotg}(xy - x^2 - y^2)$	$\langle -1,1\rangle^2$

B. Najděte extrémy funkce f v trojúhelníku X s danými vrcholy.

	$f(x,y) =$	vrcholy
17.33.	$3xy - y^2 - 3x + 2y$	$(3,0), (3,3), (0,3)$
17.34.	$x^2 + 3xy - y^2 - 4x$	$(0,0), (0,3), (3,0)$
17.35.	$x^3 - y^3 - 2x + 3y$	$(0,0), (1,0), (0,2)$
17.36.	$x^2 - 3xy + y^2 - 4x - 2y$	$(-1,-1), (3,0), (0,3)$
17.37.	$x^2 + 2xy - 2y^2 - 3x + 5y$	$(-2,0), (2,0), (2,2)$
17.38.	$x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$	$(-1,0), (1,-1), (1,1)$
17.39.	$xy(x - y - 2)$	$(-1,1), (0,-2), (2,0)$
17.40.	$\dfrac{2xy + 1}{3x - 2y - 1}$	$(-1,-1), (0,0), (-1,1)$
17.41.	$\dfrac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$	$(0,0), (1,0), (0,1)$

C. Najděte extrémy funkce f ve čtyřúhelníku X s danými vrcholy.

	$f(x,y) =$	vrcholy
17.42.	$x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + y$	$(-1,0), (0,-1), (1,0), (0,1)$
17.43.	$x^3 - y^3 - 3x + 6y$	$(-3,0), (-1,-2), (1,0), (-1,2)$

17.44. $xy(x-y-1)$	$(-1,0),(0,-1),(1,0),(0,1)$
17.45. $(x^2-y^2)(2x+2y-1)$	$(-1,0),(0,-1),(1,0),(0,1)$
17.46. $xy(x+y-2)^2$	$(-2,0),(2,0),(1,1),(-1,1)$
17.47. $x^3-2xy+y^2-x+y$	$(-2,0),(0,-1),(1,0),(0,1)$
17.48. $x^3+xy-y^2-2x+3y$	$(-2,0),(0,0),(1,2),(0,2)$
17.49. $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$	$(-1,1),(2,0),(0,0),(0,2)$
17.50. $(x^2-y^2)e^{y^2-x^2}$	$(0,0),(2,-2),(4,0),(2,2)$

D. Najděte extrémy funkce f na množině X dané nerovností nebo nerovnostmi.

$f(x,y) =$	(x,y) splňuje nerovnost(i)
17.51. $(x^2-y^2)e^{y^2-x^2}$	$x^2+y^2\le 1$
17.52. $x^2-\sqrt{3}\,xy+2y^2$	$x^2+y^2\le 1$
17.53. $\dfrac{xy}{x^2+y^2-9}$	$x^2+y^2\le 4$
17.54. $x^2+2\sqrt{3}\,xy-y^2$	$x^2+y^2\le 1$
17.55. $(x^2+y^2+1)(x^2-y^2-1)$	$x^2+y^2\le 1$
17.56. $(x^2+y^2-4)(x^2-2y^2-2)$	$x^2+y^2\le 4$
17.57. $(3x^2+3y^2-1)(x-y^2+1)$	$x^2+y^2\le 1$
17.58. $2x^2-xy+2y^2-x$	$x^2+y^2\le 1$
17.59. $(x^2+4y^2-4)(x^2-2xy+4y^2)$	$x^2+4y^2\le 4$
17.60. $\lg(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	$x^2+y^2\le 1, x\ne 0$
17.61. $\arccos\dfrac{xy}{x^2+y^2}$	$0<x^2+y^2\le 3$
17.62. $\operatorname{arccotg}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$	$0<x^2+y^2\le 3$

E. Najděte extrémy funkce f na (neomezené) množině $X\subset\mathbb{R}^2$.

$f(x,y) =$	$X =$
17.63$^{\mathbf{o}}$. $(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$	$\mathbb{R}^2$
17.64$^{\mathbf{o}}$. $(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$	$\mathbb{R}^2$

17.65°. $(x-y)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.66°. $(x^4+y^4)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.67°. $(x^2+y^4)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.68°. $(x^2-y^2)\,e^{-(x^4+y^4)}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.69°. $(x^2-xy+y^2)\,e^{-(x+2y)}$ $\qquad \langle 0,+\infty)^2$

17.70°. $(x-4xy+5y)\,e^{-(x+y)}$ $\qquad \langle 0,+\infty)^2$

17.71°. $(4x^2+y^2)\,e^{-(2x+y)}$ $\qquad \langle 0,+\infty)^2$

17.72°. $x\,\exp\left(x\,(y^2+1)^2\right)$ $\qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x\le 0\}$

17.73°. $x^2y^3\,(6-x-y)$ $\qquad \langle 0,+\infty)^2$

17.74°. $x^4-4xy+y^4$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.75°. $x^4-24xy+9y^3$ $\qquad \langle 0,+\infty)^2$

17.76°. x^2-xy+y^2-2x+y $\qquad \mathbb{R}^2$

17.77°. $x^4-x^2y^2+4y^4$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.78°. $x^2+xy+y^2-4\lg x-10\lg y$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.79°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{y}+4y$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.80°. $\dfrac{6}{x}+\dfrac{x}{2y}+\dfrac{y}{3}$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.81°. $xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.82°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+32xy$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.83°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+3xy\,(x+y)$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.84°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-7xy+2\,(x+y)^2$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.85°. $\dfrac{3}{xy}+xy\,(3x+y)$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.86°. $x^2+y^2+\dfrac{1}{xy\,(x^2+y^2)}$ $\qquad \mathbb{R}^2_+$

17.87°. $xy^2-2\sin xy$ $\qquad \langle 0,+\infty)^2$

17.88°. $x^2y^2-2\operatorname{arctg} xy^2$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.89°. $\dfrac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^4+y^4+1}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

17.90°. $\dfrac{(x^2-1)(y^2-4)}{(x^2+y^2+4)^2}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

F. Najděte extrémy funkce f na množině $X \subset \mathbb{R}^3$. Ve druhém sloupci je množina X buď přímo napsána, nebo jsou uvedeny nerovnosti, které ji charakterizují. V příkladech 17.99 – 17.102 je X čtyřstěn a jsou uvedeny jeho vrcholy. Pro zkrácení zápisu klademe $R := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

	$f(x, y) =$	$X =$
17.91.	$x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 3y + z$	$\langle 0, 2\rangle^3$
17.92.	$x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 3y + 4z$	$\langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle^2$
17.93.	$x^3 + x - 2y^2 - y + 4z^3 - 4z$	$\langle -1, 1\rangle^3$
17.94.	$6xyz - x - 2y - 3z$	$\langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 2\rangle \times \langle -3, 3\rangle$
17.95.	$z(2x + 1) - y(2z + 1) - x(2y + 1)$	$\langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 2\rangle \times \langle -1, 1\rangle$
17.96.	$2x^3 - 2(y^2 + z^2) - x - y - z$	$\langle -1, 0\rangle^3$
17.97.	$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$	$\langle 0, \pi\rangle^3$
17.98.	$e^{-(x+y+z)}(x - 1)(2y - 1)(3z - 1)$	$\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$
17.99.	$xyz - 3x - 6y - 3z$	$(0, 0, 0), (9, 0, 0),$ $(0, 9, 0), (0, 0, 9)$
17.100.	$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z$	$(-3, 0, 0), (0, -3, 0),$ $(0, 0, -3), (1, 1, 1)$
17.101.	$xy + xz + yz - x - y - z$	$(-2, 2, 0), (2, 2, 0),$ $(0, -2, 0), (0, 0, 4)$
17.102.	$xy + 2xz + 3yz - x - y - z$	$(-2, 2, 1), (-2, -2, -1),$ $(2, 0, -1), (0, 0, 2)$
17.103.	$x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4xz - x - z$	$x^2 + y^2 \le 4, \lvert z\rvert \le 2$
17.104.	$4x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xz + 3z$	$x^2 + y^2 \le 1, \lvert z\rvert \le 1$
17.105.	$x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + z^2$	$R^2 \le 1$
17.106.	$4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 3yz$	$R^2 \le 1$
17.107.	$xy - 2z(x^2 + y^2)$	$R^2 \le 1, y \ge 0$
17.108.	$x^2 - y^2 z$	$x^2 + y^2 \le 4,\ \lvert z\rvert \le 2 - y$
17.109.	$xy^2 z^3(1 - x - 2y - 3z)$	$x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
17.110.	$R^2 e^{-R^2}$	$\mathbb{R}^3$

17.111. $xyz\,e^{-R^2}$ $\mathbb{R}^3$

17.112. $R^2 e^{-(x+y+z)}$ $\langle 0,+\infty)^3$

17.113. $(x+2y+4z)\,e^{-(x+y+z)}$ $\langle 0,+\infty)^3$

17.114. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{16y}{z}+z$ $\mathbb{R}^3_+$

17.115. $2xyz+\dfrac{1}{3xyz}$ $\mathbb{R}^3_+$

17.116. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}+8xyz$ $\mathbb{R}^3_+$

17.117. $\lg(R^2-R+1)-R^2+R$ $\mathbb{R}^3$

17.118. $\lg R^2-R^2+3R-1$ $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$

17.119. $\operatorname{arctg} R-\lg(R^2+1)$ $\mathbb{R}^3$

17.120. $x^2y^2z^2-\operatorname{arctg}(xy^3z)$ $\langle 0,+\infty)^3$

G. Najděte vázané extrémy funkce f na množině X v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$ určené vazbami uvedenými ve druhém sloupci; v příkladech 17.121–17.129 navíc dokažte, že množina X je kompaktní, abyste měli existenci minima i maxima f na X zaručenu. Množina X z Cv. 17.130 kompaktní není a metoda Lagrangeových koeficientů nedává odpověď na otázku, zdali daná funkce na dané hladině extrémy vůbec má; řešte proto tento příklad jinak – viz Po. 17.3.

	$f(x,y)=$	vazba(y)
17.121.	$\sqrt{x^2+y^2}$	$7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2=16$
17.122.	x^2-xy+y^2-y	$x^2+y^2=1$
17.123.	$x-2y$	$13x^2-10xy+13y^2=72$
17.124.	x^2-xy+y^2	$x^4+y^4=16$
17.125.	x^2-xy+y^2	$2x^2-xy+y^2=2$
17.126.	$x^2-xy+y^2-xz+z^2$	$x^2+y^2+z^2=1$
17.127.	xyz	$x^2+2y^2+3z^2=1$
17.128.	$x^3-4y^3-z^3$	$x^2+2y^2+z^2=1$
17.129.	$x+y-2z$	$x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1$
17.130.	$x^2+y^2+z^2$	$x+2y+3z+4=0,\ 4x+3y+2z+1=0$

Řešení

Má-li daná funkce f na dané množině X minimum (maximum), jsou uvedeny všechny body, v nichž tohoto extrému nabývá; nemá-li je, je ve druhém (třetím) sloupci napsáno příslušné infimum (supremum). Připomeňme, že $f(\pm a, \pm b) = c$ znamená, že $f(a,b) = f(-a,-b) = c$, zatímco rovnost $f(\pm a, \mp b) = c$ je ekvivalentní s rovnostmi $f(a,-b) = f(-a,b) = c$. V příkladu 17.127 bylo nutné (z technických důvodů) učinit výjimku; z osmi bodů tvaru $(\pm a, \pm b, \pm c)$ se tam vybírají čtyři s lichým počtem a čtyři se sudým počtem znamének minus.

Cvičení	Minimum	Maximum
17.01.	$f(1,2) = -9$	$f(1,-1) = 3$
17.02.	$f(0,2) = 0$	$f(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{40}{27} \doteq 1.48$
17.03.	$f(1,\pm 1) = -2$	$f(-1,0) = 3$
17.04.	$-\frac{2}{9}\sqrt{3} \doteq -0.385$ v průniku X s hyperbolou $xy = -1/\sqrt{3}$	$\frac{2}{9}\sqrt{3} \doteq 0.385$ v průniku X s hyperbolou $xy = 1/\sqrt{3}$
17.05.	$f(2, \frac{5}{4}) = -105/8$	$f(\frac{1}{6}, 0) = \frac{1}{12}$
17.06.	$f(2,2) = -24$	$f(2,-2) = 32$
17.07.	$f(0,-1) = -4$	$f(-1,-1) = 1$
17.08.	$f(\frac{1}{3}(1+\sqrt{3}), -2) = \frac{20}{9} - \frac{4}{3}\sqrt{3} \doteq -0.087$	$f(1,0) = 6$
17.09.	$f(1,1) = -2$	$f(-2,1) = f(1,-2) = 25$
17.10.	-1, je-li $x = 0$, $\lvert y\rvert \le 2$	$f(\pm 2, 0) = \frac{3}{5}$
17.11.	$f(\pm 1, \mp 1) = -\frac{7}{2}$	$f(\pm 1, \pm 1) = \frac{3}{2}$
17.12.	$= 1$ v bodech $(0,0), (0,\pm 1),$ $(\pm 1, 0), (1, \pm 1), (-1, \pm 1)$	$= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ v bodech $(a, \pm a),$ $(-a, \pm a),$ kde $a := \sqrt{(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}$
17.13.	$f(\pm 1, \pm 2) = 1 - 2\sqrt{5} \doteq -3.47$	$f(\pm 1, \mp 2) = 1 + 2\sqrt{5} \doteq 5.47$
17.14.	$f(x, 0) = 0$, je-li $1 \le x \le 2$	$f(1, \pm 1) = \sqrt{2}$
17.15.	$f(0, \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi$	$f(\frac{1}{2}\pi, 0) = 1 + \frac{1}{2}\pi$
17.16.	$f(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$	$f(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$
17.17.	$f(\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$	$f(-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$
17.18.	$f(\pi, \frac{1}{2}\pi) = f(\frac{1}{2}\pi, \pi) = -1$	$f(\frac{1}{2}\pi, 0) = f(0, \frac{1}{2}\pi) = 1$

17.19.	$f(0,\frac{1}{2}\pi)=0$	$f(\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{6}\pi)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$
17.20.	$f(0,-\pi)=f(-\pi,0)=-1$	$f(-\pi,-\pi)=f(-\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi)=$ $f(0,0)=1$
17.21.	$f(0,-\frac{1}{6}\pi)=f(0,-\frac{5}{6}\pi)=$ $f(\pm\pi,\frac{1}{6}\pi)=f(\pm\pi,\frac{5}{6}\pi)=-\frac{5}{4}$	$f(\pm\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{2}\pi)=f(\pm\frac{2}{3}\pi,-\frac{1}{2}\pi)=\frac{5}{4}$
17.22.	$0=f(0,\pi)=f(\pi,0)=f(x,y)$, kde $(x,y)\in X$ a $(y=x)\vee$ $(y=\frac{1}{2}\pi-x)\vee(y=\frac{3}{2}\pi-x)$	$1=f(\frac{1}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi)=f(\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi)$
17.23.	$f(5,-2)=-\operatorname{arctg}10-\lg 101$ $\doteq -6.086$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\lg\frac{5}{4}\doteq 0.24$, je-li $(x,y)\in X$ a $xy=\frac{1}{2}$
17.24.	$f(\frac{1}{2},2)=-\lg 2\doteq -0.693$	$f(2,\frac{1}{2})=\lg 2\doteq 0.693$
17.25.	$f(0,\pm1)=\lg 2-1\doteq -0.307$	$f(\pm1,0)=\lg 2+1\doteq 1.693$
17.26.	$f(-1,\pm1)=f(1,\pm1)=0$	$2ae^a\doteq 1.25$, kde $a:=\sqrt{2}-1$, je-li $(x,y)\in X$ a $xy=-a$
17.27.	$f(-a,1)=-2ae^a\doteq -1.25$, kde $a:=\sqrt{2}-1$	$f(-1,-1)=2e$
17.28.	0 v $\langle 0,2\rangle\times\{0\}\cup\{0\}\times\langle 0,3\rangle$	$f(1,2)=4e^{-3}\doteq 0.199$
17.29.	$f(\pm1,\mp1)=-\cosh 2\doteq -3.762$	$f(x,x)=-1$, je-li $x\in\langle -1,1\rangle$
17.30.	$f(\frac{1}{2}\pi,\pi)=f(\pi,-\frac{1}{2}\pi)=-e^{\pi}$ $\doteq -23.14$	$f(-\frac{1}{2}\pi,\pi)=f(\pi,\frac{1}{2}\pi)=e^{\pi}$ $\doteq 23.14$
17.31.	$f(\pm1,\mp1)=-\frac{1}{2}\pi$	$f(\pm1,\pm1)=\frac{1}{2}\pi$
17.32.	$f(0,0)=\frac{1}{2}\pi$	$f(\pm1,\mp1)=\operatorname{arccotg}(-3)\doteq 2.82$
17.33.	$f(3,0)=-9$	$f(3,3)=15$
17.34.	$f(0,3)=-9$	$f(\frac{11}{6},\frac{7}{6})=\frac{13}{12}$
17.35.	$f(0,2)=-2$	$f(0,1)=2$
17.36.	$f(1.7,1.3)=-11.45$	$f(-1,-1)=5$
17.37.	$f(\frac{3}{2},0)=-\frac{9}{4}$	$f(-2,0)=10$
17.38.	$f(1,-1)=-6$	$f(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{26}{9}$
17.39.	$f(\frac{2}{3},\frac{4}{9})=-\frac{128}{243}\doteq -0.527$	$f(-1,1)=4$
17.40.	$f(-1,-1)=-\frac{3}{2}$	$f(-1,1)=\frac{1}{6}$

17.41.	$f(0,0)=f(1,0)=f(0,1)=1$	$f(a,a)=1/2a \doteq 1.366$, kde $a := \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \doteq 0.366$
17.42.	$f(\frac{3}{4},-\frac{1}{4})=-\frac{11}{8}$	$f(0,1)=4$
17.43.	$f(-3,0)=-18$	$f(-1,\sqrt{2})=2+4\sqrt{2} \doteq 7.66$
17.44.	$f(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=-\frac{8}{27}$	$f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$
17.45.	$f(-1,0)=-3$	$f(0,-1)=3$
17.46.	$f(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})=-\frac{27}{4}$	$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$
17.47.	$f(-2,0)=-6$	$f(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})=\frac{39}{16} \doteq 2.44$
17.48.	$f(-2,0)=-4$	$f(1,2)=3$
17.49.	$f(0,0)=-1$	$f(0,2)=f(2,0)=\frac{3}{5}$
17.50.	0 na 1. a 4. straně čtverce X	e^{-1} pro $(x,y)\in X$, pro něž je $x=\sqrt{1+y^2}$
17.51.	$f(0,\pm 1)=-e$	$f(\pm 1,0)=e^{-1}$
17.52.	$f(0,0)=0$	$f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\sqrt{3})=\frac{5}{2}$
17.53.	$f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})=-\frac{2}{5}$	$f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=\frac{2}{5}$
17.54.	$f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\sqrt{3})=-2$	$f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3},\pm\frac{1}{2})=2$
17.55.	$f(0,\pm 1)=-4$	$f(\pm 1,0)=0$
17.56.	$f(\pm\sqrt{3},0)=-1$	$f(0,\pm\sqrt{3/2})=\frac{25}{2}$
17.57.	$f(\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1),0)=-\frac{4}{9}(\sqrt{2}+1) \doteq -1.073$	$f(1,0)=4$
17.58.	$f(\frac{4}{15},\frac{1}{15})=-\frac{2}{15}$	$f(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2})=2+\frac{3}{4}\sqrt{3} \doteq 3.299$
17.59.	$f(\pm 1,\mp\frac{1}{2})=-6$	0 v bodě $(0,0)$ a v ∂X
17.60.	$\inf f(X)=-\infty$	$\sup f(X)=\frac{1}{2}\pi$
17.61.	$f(x,x)=\frac{1}{3}\pi$, je-li $(x,x)\in X$	$f(x,-x)=\frac{2}{3}\pi$, je-li $(x,-x)\in X$
17.62.	$f(x,x)=\frac{1}{4}\pi$, je-li $(x,x)\in X$	$f(x,-x)=\frac{3}{4}\pi$, je-li $(x,-x)\in X$
17.63.	$f(0,0)=0$	$f(x,y)=1/e$, je-li $x^2+y^2=1$
17.64.	$f(0,\pm 1)=-1/e$	$f(\pm 1,0)=1/e \doteq 0.368$
17.65.	$f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-1/\sqrt{e}$	$f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=1/\sqrt{e} \doteq 0.6065$

17.66.	$f(0,0)=0$	$f(0,\pm\sqrt{2})=f(\pm\sqrt{2},0)=$ $4e^{-2}\doteq 0.54$
17.67.	$f(0,0)=0$	$f(0,\pm\sqrt{2})=4e^{-2}\doteq 0.54$
17.68.	$f(0,\pm 1/\sqrt[4]{2})=-1/\sqrt{2e}$	$f(\pm 1/\sqrt[4]{2},0)=1/\sqrt{2e}\doteq 0.43$
17.69.	$f(0,0)=0$	$f(2,0)=4e^{-2}\doteq 0.54$
17.70.	$f(\frac{5}{2},\frac{3}{2})=-5e^{-4}\doteq -0.0916$	$f(0,1)=5e^{-1}\doteq 1.839$
17.71.	$f(0,0)=0$	$f(1,0)=f(0,2)=4e^{-2}\doteq 0.54$
17.72.	$f(-1,0)=-e^{-1}\doteq -0.368$	$f(0,y)=0$ pro všechna $y\in\mathbb{R}$
17.73.	$\inf f(X)=-\infty$	$f(2,3)=108$
17.74.	$f(\pm 1,\pm 1)=-2$	$\sup f(X)=+\infty$
17.75.	$f(2,\frac{4}{3})=-\frac{80}{3}$	$\sup f(X)=+\infty$
17.76.	$f(1,0)=-1$	$\sup f(X)=+\infty$
17.77.	$f(0,0)=0$	$\sup f(X)=+\infty$
17.78.	$f(1,2)=7-10\lg 2\doteq 0.0685$	$\sup f(X)=+\infty$
17.79.	$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=6$	$\sup f(X)=+\infty$
17.80.	$f(6,3)=3$	$\sup f(X)=+\infty$
17.81.	$f(5,2)=30$	$\sup f(X)=+\infty$
17.82.	$f(\frac{1}{4},\frac{1}{2})=12$	$\sup f(X)=+\infty$
17.83.	$f(\frac{1}{3}\sqrt{3},\frac{1}{3}\sqrt{3})=8/\sqrt{3}\doteq 4.6188$	$\sup f(X)=+\infty$
17.84.	$f(1,1)=3$	$\sup f(X)=+\infty$
17.85.	$f(3^{-3/5},3^{2/5})=5\sqrt[5]{3}\doteq 6.23$ $(3^{-3/5}\doteq 0.52,\ 3^{2/5}\doteq 1.55)$	$\sup f(X)=+\infty$
17.86.	$f(2^{-1/6},2^{-1/6})=3/\sqrt[3]{2}\doteq 2.38$ $(2^{-1/6}\doteq 0.89)$	$\sup f(X)=+\infty$
17.87.	$\inf f(X)=-2$	$\sup f(X)=+\infty$
17.88.	$\inf f(X)=-\pi$	$\sup f(X)=+\infty$
17.89.	$f(\pm a,0)=(0,\pm a)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$ $\doteq -0.207$, kde $a:=(1+\sqrt{2})^{1/2}$ $\doteq 1.55$	$f(0,0)=1$

17.90.	$f(\pm\sqrt{6},0)=-\frac{1}{5}$	$f(0,0)=\frac{1}{4}$
17.91.	$f(0,\frac{3}{2},0)=-\frac{9}{4}$	$f(2,2,0)=10$
17.92.	$f(1,\frac{3}{2},0)=-\frac{13}{4}$	$f(0,0,2)=f(0,3,2)=f(2,0,2)$ $=4$
17.93.	$f(-1,1,\frac{1}{3}\sqrt{3})=-5-\frac{8}{9}\sqrt{3}$ $\doteq -6.54$	$f(1,-\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\sqrt{3})=\frac{17}{8}+\frac{8}{9}\sqrt{3}$ $\doteq 3.66$
17.94.	$f(-1,2,3)=-48$	$f(1,-2,-3)=48$
17.95.	$f(1,2,1)=-8$	$f(1,-2,1)=12$
17.96.	$f(-1,-1,-1)=-3$	$f(-\frac{1}{6}\sqrt{6},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\sqrt{6}$ $\doteq 0.52$
17.97.	0 ve všech vrcholech krychle X	$f(\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)=4$
17.98.	$f(0,0,0)=-1$	$f(0,0,\frac{4}{3})=3e^{-4/3}\doteq 0.79$
17.99.	$f(0,9,0)=-54$	$f(0,0,0)=0$
17.100.	$f(0,0,-3)=-9$	$f(\frac{3}{5},\frac{3}{5},-\frac{3}{5})=\frac{36}{5}$
17.101.	$f(0,-\frac{1}{4},\frac{7}{2})=-\frac{33}{8}$	$f(-\frac{1}{4},-\frac{3}{2},0)=\frac{17}{8}$
17.102.	$f(-2,2,-1)=f(2,0,-1)=-5$	$f(-2,-2,-1)=19$
17.103.	$f(2,0,2)=-28$	$f(-2,0,\frac{7}{6})=\frac{121}{12}$
17.104.	$f(\frac{1}{2},0,-1)=-5$	$f(1,0,1)=10$
17.105.	$f\big(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0\big)=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$f\big(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\mp\sqrt{\frac{1}{2}},0\big)=1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$
17.106.	$f(0,\pm 3/\sqrt{10},\pm 1/\sqrt{10})=-\frac{5}{2}$	$f(\pm 1,0,0)=4$
17.107.	$f(-\frac{1}{4}\sqrt{6},\frac{1}{4}\sqrt{6},\frac{1}{2})=-\frac{9}{8}$	$f(\frac{1}{4}\sqrt{6},\frac{1}{4}\sqrt{6},-\frac{1}{2})=\frac{9}{8}$
17.108.	$f(0,2,4)=-16$	$f(0,-2,-4)=16$
17.109.	$\inf f(X)=-\infty$	$f(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7})=7^{-7}\doteq 1.21\cdot 10^{-6}$
17.110.	$f(0,0,0)=0$	$f(x,y,z)=e^{-1}$, je-li $R=1$
17.111.	$f(a,\pm a,\mp a)=f(-a,\pm a,\pm a)=$ $=-A$, kde $a:=1/\sqrt{2}$	$f(a,\pm a,\pm a)=f(-a,\pm a,\mp a)$ $=A:=(2e)^{-3/2}\doteq 0.0789$
17.112.	$f(0,0,0)=0$	$f(2,0,0)=f(0,2,0)=f(0,0,2)$ $=4e^{-2}\doteq 0.54$
17.113.	$f(0,0,0)=0$	$f(0,0,1)=4e^{-1}\doteq 1.47$
17.114.	$f(\frac{1}{4}\sqrt{2},\frac{1}{2},2\sqrt{2})=8\sqrt{2}\doteq 11.31$	$\sup f(X)=+\infty$

17.115.	$f(x,y,z) = \frac{2}{3}\sqrt{6} \doteq 1.63$, je-li $(x,y,z) \in X, xyz = 1/\sqrt{6} \doteq 0.408$	$\sup f(X) = +\infty$
17.116.	$f(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$	$\sup f(X) = +\infty$
17.117.	$\inf f(X) = -\infty$	$f(x,y,z) = 0$, je-li $R \in \{0,1\}$
17.118.	$\inf f(X) = -\infty$	$f(x,y,z) = 1 + \lg 4 \doteq 2.386$, je-li $R = 2$
17.119.	$\inf f(X) = -\infty$	$f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \lg \frac{5}{4} \doteq 0.24$, je-li $R = \frac{1}{2}$
17.120.	$\inf f(X) = -\frac{1}{2}\pi$	$\sup f(X) = +\infty$
17.121.	$f(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1$	$f(\pm\sqrt{3}, \pm 1) = 2$
17.122.	$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{3} \doteq 0.299$	$f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{3} \doteq 2.299$
17.123.	$f(-1/\sqrt{10}, 7/\sqrt{10}) = -\frac{3}{2}\sqrt{10} \doteq -4.74$	$f(1/\sqrt{10}, -7/\sqrt{10}) = \frac{3}{2}\sqrt{10} \doteq 4.74$
17.124.	$f(\pm\sqrt[4]{8}, \pm\sqrt[4]{8}) = 2\sqrt{2} \doteq 2.828$	$f(\pm\sqrt[4]{8}, \mp\sqrt[4]{8}) = 6\sqrt{2} \doteq 8.485$
17.125.	$f(\pm\sqrt{8/7}, \pm\sqrt{2/7}) = \frac{6}{7}$	$f(0, \pm\sqrt{2}) = 2$
17.126.	$f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \doteq 0.293$	$f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \doteq 1.707$
17.127.	$f(x,y,z) = -\frac{1}{18}\sqrt{2} \doteq -0.079$, je-li $(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert, \lvert z\rvert) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}, 1/3)$ a $xyz < 0$	$f(x,y,z) = \frac{1}{18}\sqrt{2} \doteq 0.079$, je-li $(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert, \lvert z\rvert) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}, 1/3)$ a $xyz > 0$
17.128.	$f(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2}$	$f(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$
17.129.	$f(-1/a, -3/a, 3/a) = -a$, kde $a := \sqrt{10} \doteq 3.16$	$f(1/a, 3/a, -3/a) = a$, kde $a := \sqrt{10} \doteq 3.16$
17.130.	$f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{7}{3}$	$\sup f(X) = +\infty$