18. Lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s koeficienty a_k a s pravou stranou b budeme rozumět rovnici

$$(1^*) \qquad L(y) := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, y^{(k)} = b\,,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ jsou funkce spojité v jistém intervalu $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, přičemž $a_0 \not\equiv 0$ v (α, β). Budeme říkat, že L je **lineární diferenciální operátor** n-tého řádu (příslušný k rovnici (1^*)); místo $L(y)$ se často stručněji píše Ly a hodnota $(L(y))(x)$ (resp. $(Ly)(x)$) funkce $Ly \equiv L(y)$ v bodě $x \in (\alpha, \beta)$ se zapisuje i ve zjednodušeném (ale ne zcela korektním) tvaru $Ly(x)$ nebo $L(y(x))$. Rovnice (1^*) obsahuje neznámou funkci y spolu s jejími derivacemi až do řádu n včetně. Jejím **řešením** v intervalu $(\gamma, \delta) \subset (\alpha, \beta)$ nazveme každou funkci $y : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$ třídy C_n, pro niž platí rovnost $Ly(x) = b(x)$ pro všechna $x \in (\gamma, \delta)$. **Obecným řešením** rovnice (1^*) (v (γ, δ)) budeme nazývat množinu všech jejích řešení (v (γ, δ)). [1])

Poznámka 18.1. Definici lineární diferenciální rovnice a jejího řešení jsme formulovali tak obecně, jak to žádají zejména *aplikace* této matematické disciplíny v jiných exaktních vědách. Předpoklad, že koeficient a_0, jímž je v rovnici (1^*) násobena derivace $y^{(n)}$, není v (α, β) identicky roven 0, je však pro *jednoduchou* teorii těchto rovnic příliš slabý. Je-li $a_0 \equiv 0$ v jistém intervalu $(\gamma, \delta) \subset (\alpha, \beta)$, derivace $y^{(n)}$ v (1^*) ve skutečnosti není, což *podstatným způsobem* mění vlastnosti této rovnice. Ale ani v případě, kdy množina všech kořenů funkce a_0 nemá v (α, β) žádný hromadný bod (tj. je-li *izolovaná v* (α, β)), není situace jednoduchá, protože i řešení v blízkosti „izolovaného“ kořenu funkce a_0 může být velmi složité. [2])

Teorie je jednoduchá jen v případě, že a_0 není *nikde* v (α, β) rovno 0; rovnice (1^*) je pak ekvivalentní s rovnicí, která z ní vznikne dělením funkcí a_0. Předpokládáme-li, že se tak stalo, můžeme se zabývat jen rovnicemi (1^*), v nichž je

$$(2) \qquad a_0 \equiv 1 \ \text{ v } \ (\alpha, \beta)\,.$$

Úmluva. *Nebude-li výslovně uvedeno něco jiného, budeme v dalším předpokládat platnost podmínky* (2). $\square$

Rovnice (1^*) bude mít za tohoto předpokladu tvar

$$(1) \qquad Ly := y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b\,.$$

---

[1]) Každému jednotlivému řešení rovnice (1^*) se v literatuře podrobněji, pro výraznější odlišení od řešení obecného, říkává *partikulární řešení*.

[2]) Jak je patrné, mluvíme jen o celkem přehledných případech; co kdybychom však hledali řešení v $\mathbb{R}$ a množina všech kořenů funkce a_0 byla např. Cantorovo diskontinuum?

Speciálním, ale velmi důležitým případem rovnice (1) je rovnice

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, y^{(k)} = 0 \tag{3}$$

s nulovou pravou stranou; říká se jí *homogenní* nebo také *bez pravé strany.* [3])

Následující věta obsahuje základní informaci o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (1).

Věta 18.1. *Pro každý bod $x_0 \in (\alpha, \beta)$ a pro každou n-tici čísel $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ existuje právě jedno řešení $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ rovnice (1) tak, že*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,. \tag{4}$$

Poznámka 18.2. Ve větě 18.1 je formulován a vyřešen tzv. **Cauchyho problém** pro diferenciální rovnici (1), totiž existence a jednoznačnost jejího řešení za předpokladu, že jsou splněny **počáteční podmínky** (4). Z této věty (jejíž důkaz není jednoduchý) snadno plynou velmi závažné informace např. o obecném řešení rovnice (1); budeme se jimi zabývat později.

* * *

Podle obecné definice lineární nezávislosti elementů lineárního prostoru jsou funkce $y_1, \ldots, y_n$ (např. jako elementy prostoru všech funkcí $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$) *lineárně nezávislé v intervalu* (α, β), platí-li (pro každou n-tici čísel $c_1, \ldots, c_n$) implikace

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in (\alpha, \beta) \ \Rightarrow\ c_k = 0 \text{ pro } k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Obráceně, tyto funkce jsou *lineárně závislé* (v (α, β)), existuje-li n-tice čísel $c_1, \ldots, c_n$, z nichž aspoň jedno není rovno 0, pro niž je $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$ funkce (identicky) nulová (v intervalu (α, β)). [4])

n-tice lineárně nezávislých řešení rovnice (3) se nazývá **fundamentální systém** rovnic (3) a (1). Jak ihned uvidíme, hrají takové n-tice v teorii lineárních diferenciálních rovnic zásadní úlohu.

---

[3]) První název není nejvhodnější, protože existují diferenciální rovnice, které se nazývají homogenní, ale nemají s rovnicí (3) nic společného; protože se však tímto typem rovnic v této knize nezabýváme, slovo „homogenní“ pro rovnici (1) s nulovou pravou stranou s ničím nekoliduje. Druhý název užívají s oblibou lidé, kteří matematiku i dnes považují za součást čarodějnického umění, ve kterém *mistři* podstatu kouzel tají, tak aby *nezasvěcenci* byli výsledky jejich čarování co nejvíce zmateni a šokováni. Jedním z cílů je proto zamlžit vše, co zamlžit lze; obyčejný smrtelník se domnívá, že rovnice má vždy dvě strany, zasvěcenec (který si bohužel plete nic s nulou) je schopen řešit i „rovnice“, které mají patrně jen levou stranu – zdalipak mají aspoň rovnítko?

[4]) Lineární kombinaci, v níž jsou všechny koeficienty rovny 0, se říká *triviální*; jejím opakem je kombinace *netriviální*, v níž je nenulový aspoň jeden z koeficientů. V této terminologii jsou funkce $y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, je-li některá jejich *netriviální* lineární kombinace identicky rovna 0.

Věta 18.2. 1. *Každá rovnice* (3) *má fundamentální systém.*
2. *Je-li*

$$\{y_1, \ldots, y_n\} \tag{6}$$

fundamentální systém rovnice (3), *je funkce* $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *řešením této rovnice, právě když je* $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ *pro vhodné konstanty* $c_1, \ldots, c_n$. □

Jinými slovy: Známe-li fundamentální systém rovnice (3), známe i její obecné řešení – je jím lineární obal fundamentálního systému. *Obecné řešení rovnice* (3) *je lineární prostor dimenze* n *a fundamentální systém je totéž co jeho báze.*

Z algebry je známo, že je-li (6) bází lineárního prostoru dimenze n, je n-tice $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ elementů tohoto prostoru jeho bází, právě když existuje regulární matice[5]) $\{\lambda_{jk}\}_{1 \le j \le n, 1 \le k \le n}$ tak, že

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} y_k \quad \text{pro} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

První část V. 18.2 můžeme proto zesílit: *Každá rovnice* (3) *má nekonečně mnoho fundamentálních systémů.* □

Doplňme právě uvedené poznatky ještě tímto tvrzením:

Věta 18.3. *Pro každou* n*-tici lineárně nezávislých funkcí* $y_1, \ldots, y_n$ *třídy* C_n *v* (α, β) *existuje právě jedna diferenciální rovnice tvaru* (3), *pro niž je tato* n*-tice fundamentálním systémem.*

Poznámka 18.3. Tuto diferenciální rovnici lze získat tak, že determinant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} \tag{8}$$

rozvedeme podle posledního sloupce, výsledek položíme rovný nule a dělíme koeficientem

$$W(y_1, \ldots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

u derivace $y^{(n)}$, který se nazývá **Wronského determinant** funkcí $y_1, \ldots, y_n$ a je – jak uvidíme ve větě 18.5 – všude v (α, β) nenulový. □

[5]) tj. matice s nenulovým determinantem

Lineární závislost resp. nezávislost n-tic funkcí lze někdy zjistit přímo z definice:

Příklad 18.1. *Funkce* $1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n$ *jsou pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *lineárně nezávislé v každém intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, protože polynom $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \not\equiv 0$ by v I měl jen konečný počet kořenů; má-li se tedy rovnat 0 v každém bodě $x \in I$, musí to být nulový polynom, tedy polynom, jehož všechny koeficienty c_k jsou nulové.

Příklad 18.2. *Je-li* $n \in \mathbb{N}$ *a jsou-li* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *navzájem různá reálná čísla, jsou funkce* $e^{\lambda_k x}$, $1 \le k \le n$, *lineárně nezávislé v* $\mathbb{R}$. Abychom to dokázali, předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ a že

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} \equiv 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}. \tag{10}$$

Dělíme-li funkcí $e^{\lambda_n x}$, dostaneme ekvivalentní identitu $\sum_{k=1}^{n-1} e^{(\lambda_k - \lambda_n)x} + c_n \equiv 0$; limita pro $x \to +\infty$ výrazu vlevo je rovna c_n, protože všechna čísla $\lambda_k - \lambda_n$ jsou záporná. Tím je dokázáno, že $c_n = 0$.

Identitu (10) lze tedy ekvivalentně napsat ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k e^{\lambda_k x} \equiv 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}; \tag{10_1}$$

dělením $e^{\lambda_{n-1} x}$ a přechodem k limitě pro $x \to +\infty$ získáme rovnost $c_{n-1} = 0$.

Je zřejmé, že takto lze pokračovat až do okamžiku, kdy budeme mít místo (10) identitu $c_1 = 0$.

Příklad 18.3. *Funkce* $e^x \cos x$ *a* $e^x \sin x$ *jsou lineárně nezávislé v intervalu* $I := \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Je-li totiž $c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x \equiv 0$ v I, jsou hodnoty levé strany nulové speciálně i v bodech 0 a $\frac{1}{2}\pi$; to vede k rovnostem $c_1 = 0$ a $e^{\pi/2} c_2 = 0$, tedy i $c_2 = 0$. $\square$

Příklad 18.4. *Funkce* $1, \sin^2, \cos^2$ *jsou lineárně závislé v každém intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, protože $1 - \sin^2 - \cos^2 \equiv 0$. $\square$

V příkladech 18.1–18.4 jsme sice lineární nezávislost ověřovali nebo vyvraceli různými způsoby, ale vždy přímo z její definice. *Problém lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí lze někdy řešit i pomocí Wronského determinantu* (9):

Příklad 18.5. Předpokládejme, že $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé funkce třídy C_n v (α, β). Pak existuje n-tice konstant $c_1, \dots, c_n$, z nichž aspoň jedna je nenulová, pro niž je $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) = 0$ všude v (α, β). Derivujeme-li tuto identitu jednou, dvakrát, $\dots$, $(n-1)$-krát, získáme identity

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(m)}(x) = 0 \ \text{ pro všechna } \ x \in (\alpha, \beta) \ \text{ a pro } \ m = 0, 1, \dots, n-1. \tag{11}$$

Protože tato soustava n rovnic má pro každé (pevné) $x \in (\alpha, \beta)$ netriviální řešení $\{c_1, \dots, c_n\}$, je podle známého algebraického tvrzení determinant soustavy, tj. Wronského determinant funkcí $y_1, \dots, y_n$, roven 0 všude v (α, β). $\square$

Dokázali jsme toto tvrzení:

Věta 18.4. *Jsou-li funkce $y_1, \dots, y_n$ třídy C_n lineárně závislé v intervalu (α, β), je jejich Wronského determinant* (9) *v tomto intervalu identicky roven nule.*

Jinými slovy: Je-li determinant (9) *nenulový aspoň v jednom bodě intervalu (α, β), jsou funkce $y_1, \dots, y_n$ v tomto intervalu lineárně nezávislé.*

Poznámka 18.4. Pomocí právě uvedené věty lze zesílit výsledky, které jsme dokázali v příkladech 18.2 a 18.3:

1) Funkce z Př. 18.2 jsou lineárně nezávislé v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}$, protože jejich Wronského determinant

$$e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)\,x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)\,x} \prod_{1\le j<k\le n} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0$$

se nikde v $\mathbb{R}$ nerovná 0. (Vlevo je tzv. *Vandermondův determinant* – sr. s Cv. 2.37.)

2) I funkce $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ z Př. 18.3 jsou lineárně nezávislé v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}$, protože jejich Wronského determinant

$$\begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x}$$

je všude v $\mathbb{R}$ nenulový. $\square$

Jsou-li funkce y_k řešeními rovnice (3), platí toto zesílení věty 18.4:

Věta 18.5. *Jsou-li $y_1, \dots, y_n$ řešení rovnice* (3) *v (α, β), jsou jen tyto dvě možnosti:*

1. *Funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a jejich Wronského determinant je všude v (α, β) nenulový.*

2. *Funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé a jejich Wronského determinant je všude v (α, β) nulový.*

Poznámka 18.5. Právě vyslovená věta slouží hlavně k ověřování lineární závislosti nebo nezávislosti řešení rovnice (3); lze ji však užít i nečekanějším způsobem:

Protože Wronského determinant funkcí x, e^x je zřejmě roven $(x-1)e^x$, což je funkce rovná 0 v bodě 1 a všude jinde nenulová, *není tato dvojice funkcí řešením žádné lineární diferenciální rovnice tvaru $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ v žádném intervalu (α, β) obsahujícím bod* 1. Vysvětlení je jednoduché: Podle věty a poznámky 18.3 je dvojice $\{x, e^x\}$ fundamentálním systémem rovnice $y'' + (xy' - y)/(1-x) = 0$, jejíž dva koeficienty nejsou v bodě 1 definovány (a nelze je tam spojitě dodefinovat).

Poznamenejme ještě, že funkce mohou být v jednom intervalu lineárně nezávislé, v jiném lineárně závislé, a to i v případě, že jsou třídy C_∞ v $\mathbb{R}$: Položíme-li např.

$$y_1(x) := \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{v } (-\infty, 0\rangle \\ \exp(-1/x^2) & \text{v } \mathbb{R}_+ \end{matrix} \right\}, \quad y_2(x) := \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{v } (-\infty, 0\rangle \\ x\exp(-1/x^2) & \text{v } \mathbb{R}_+ \end{matrix} \right\},$$

snadno nahlédneme, že funkce y_1, y_2 jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}_-$ a lineárně nezávislé v $\mathbb{R}_+$ (kde se jejich Wronského determinant rovná $\exp(-2/x^2)$). $\square$

Další věta charakterizuje obecné řešení rovnice (1):

Věta 18.6. *Je-li* $\{y_1, \dots, y_n\}$ *fundamentální systém rovnice* (1) *a je-li* y_0 *jakékoli její řešení, je*

$$\{\, y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \,;\ c_j \in \mathbb{R} \ \textit{pro}\ j = 1, \dots, n \} \tag{12}$$

obecné řešení rovnice (1).

Geometricky řečeno: Posuneme-li lineární prostor všech řešení rovnice (3) (považovaný např. za podprostor všech funkcí spojitých v (α, β)) o řešení y_0, je příslušný lineární útvar (nadrovina) obecným řešením rovnice s pravou stranou b.

<u>Résumé</u>: *K tomu, abychom mohli napsat všechna řešení rovnice* (1), *stačí najít nějaký její fundamentální systém* (6) *a nějaké její řešení* y_0*; každé řešení rovnice* (1) *má pak tvar*

$$y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j\,, \tag{13}$$

kde c_j *jsou vhodné konstanty. Obráceně:* (13) *je pak řešením rovnice* (1) *při každé volbě konstant* c_j. $\square$

Teoreticky je tedy všechno velmi jednoduché, obecná řešení rovnic (3) a (1) mají velmi jednoduchou algebraickou strukturu. Bohužel však *neexistuje algoritmus, který by v obecném případě umožnil fundamentální systém a řešení* y_0 *najít.* [6])

Poněkud nadějnější je situace, kdy jsou funkce a_k v rovnici (1) konstantní; takové (lineární diferenciální) rovnici se říká **rovnice s konstantními koeficienty** a podle V. 18.1 je její obecné řešení složeno z funkcí s definičním oborem $\mathbb{R}$. Ukazuje se, že úloha najít fundamentální systém se u takové rovnice redukuje na řešení algebraické rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0\,, \tag{14}$$

která se nazývá **charakteristická rovnice** rovnic (1) a (3), zatímco vlevo je tzv. **charakteristický polynom** těchto rovnic. Pomocí fundamentálního systému lze pak (aspoň teoreticky) najít i řešení y_0. Příslušná tvrzení jsou obsahem vět 18.7–18.9, které následují. $\square$

Čtenáři je jistě z algebry známo, že algebraická rovnice s *reálnými* koeficienty má spolu s každým kořenem $\mu = \alpha + i\beta$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, i kořen $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$ s ním komplexně sdružený, přičemž násobnosti obou těchto kořenů jsou stejné.

---

[6]) Není to nic udivujícího; jak známo, neexistuje ani vzorec, který by dovolil najít kořeny obecné *algebraické* rovnice stupně vyššího než 4 na základě jejich koeficientů. Rozumějme dobře: *Bylo dokázáno, že takový vzorec neexistuje*; podobně jako je tomu s kvadraturou kruhu, nejde tedy o to, že naše současné znalosti a schopnosti nejsou dostačující.

Abychom mohli do jednoho tvrzení zahrnout případy, kdy charakteristická rovnice má buď jen reálné, nebo jen imaginární kořeny, *umluvíme se, že symbol tvaru* $\{\gamma_m\}_{m=1}^0$ *bude znamenat prázdnou posloupnost.*

Věta 18.7. *Předpokládejme, že členy prosté posloupnosti* $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$, *kde* $p \geq 0$, *jsou právě všechny reálné kořeny rovnice* (14) *a že členy prostých posloupností* $\{\mu_k\}_{k=1}^q$, $\{\overline{\mu}_k\}_{k=1}^q$, *kde* $q \geq 0$, *jsou právě všechny imaginární kořeny této rovnice; nechť* $\alpha_k := \operatorname{Re} \mu_k$, $\beta_k := \operatorname{Im} \mu_k$ *a nechť* r_j (*resp.* s_k) *je násobnost kořenu* λ_j (*resp. kořenů* μ_k *a* $\overline{\mu}_k$).

Pak tvoří funkce

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&e^{\lambda_p x}, x e^{\lambda_p x}, \dots, x^{r_p - 1} e^{\lambda_p x}, \\
&e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \dots, x^{s_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, x^{s_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&e^{\alpha_q x} \cos \beta_q x, e^{\alpha_q x} \sin \beta_q x, \dots, x^{s_q - 1} e^{\alpha_q x} \cos \beta_q x, x^{s_q - 1} e^{\alpha_q x} \sin \beta_q x
\end{aligned}
\tag{15}
$$

fundamentální systém rovnice (1).

Poznámka 18.6. I když tvrzení právě uvedené věty vypadá dosti složitě, lze si konstrukci fundamentálního systému za situace, kdy známe všechny kořeny charakteristické rovnice včetně jejich násobností, zapamatovat velmi snadno:

Každý reálný kořen λ násobnosti r rovnice (14) „přispěje“ do fundamentálního systému r funkcemi $e^{\lambda x}$, $x e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}$. Je-li $\mu = \alpha + i\beta$ imaginární kořen násobnosti s rovnice (14), platí totéž o číslu $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$; kdybychom připustili, že řešení rovnice (3) mohou být i komplexní funkce, byly by (jak se snadno přesvědčíme dosazením) funkce $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ řešeními této rovnice. Reálná řešení z nich získáme rozkladem na reálnou a imaginární část, tedy přechodem k funkcím $e^{\alpha x} \cos \beta x$ a $e^{\alpha x} \sin \beta x$; každou z nich pak postupně vynásobíme mocninami $x^0, x^1, \dots, x^{s-1}$, podobně jako jsme to učinili s funkcí $e^{\lambda x}$ a číslem r v případě reálného kořenu λ.

V (15) odpovídá každému kořenu $\lambda \in \mathbb{R}$ násobnosti r právě r funkcí, každé dvojici $\{\mu, \overline{\mu}\} \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}$ kořenů násobnosti s právě $2s$ funkcí; počet funkcí v (15) je tedy roven součtu násobností všech kořenů rovnice (14), který je jak známo roven n. □

Než přejdeme k ilustrujícím příkladům, vysvětleme dvě metody, jak lze (aspoň teoreticky) pomocí fundamentálního systému najít řešení y_0 rovnice (1); *metodu*, která se nazývá **variace konstant** [7]), *lze užít i v případě, že koeficienty* a_k *rovnice nejsou konstantní.* Na rozdíl od toho *lze druhou metodu aplikovat jen na rovnice s konstantními koeficienty a navíc jen při speciálním tvaru pravé strany* b.

---

[7]) Obyčejný člověk se domnívá, že konstanty se nazývají konstantami proto, že se nemění („constans“ znamená latinsky „stálý“, „neměnný“); matematik-čaroděj však pracuje i s měnícími se konstantami („variare“ znamená mj. „měnit se“). Historickou genezi slovního protikladu „variace konstant“ tedy raději nekomentujme. Racionální jádro metody je však jednoduché: Podobně jako je každé řešení rovnice (3) lineární kombinací funkcí tvořících fundamentální systém (přičemž koeficienty v této kombinaci jsou samozřejmě *čísla*), existují vždy *funkce* $C_1, \dots, C_n$ tak, že $C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ je řešením rovnice (1) – stačí, aby tyto funkce splňovaly jisté podmínky.

Věta 18.8. (Variace konstant.) *Nechť funkce* $y_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, *tvoří fundamentální systém rovnice* (1) *a nechť funkce* $B_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, *splňují v* (α, β) *identity*

$$
\begin{aligned}
&B_1 y_1 + \ldots + B_n y_n = 0\,,\\
&B_1 y_1' + \ldots + B_n y_n' = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
&B_1 y_1^{(n-2)} + \ldots + B_n y_n^{(n-2)} = 0\,,\\
&B_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + B_n y_n^{(n-1)} = b\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Je-li C_k *(pro každé* $k = 1, \ldots, n$*) funkce primitivní k funkci* B_k *v* (α, β), *je funkce*

$$
y_0 := \sum_{k=1}^{n} C_k y_k
\tag{17}
$$

řešením rovnice (1).

Poznámka 18.7. Poznamenejme, že soustava rovnic (16) je vždy řešitelná vzhledem k funkcím $B_1, \ldots, B_n$, protože její determinant je Wronského determinant lineárně nezávislých řešení y_k rovnice (3), což je (podle V. 18.5) funkce nenulová všude (α, β). Podle Cramerova pravidla je přitom každé B_k podílem dvou determinantů: Ve jmenovateli je Wronského determinant funkcí $y_1, \ldots, y_n$, v čitateli determinant, který z $W(y_1, \ldots, y_n)$ vznikne nahrazením k-tého sloupce pravými stranami soustavy (16), tedy funkcemi $0, \ldots, 0, b$. Protože oba determinanty jsou funkce spojité v (α, β), platí totéž i o B_k; funkce C_k k ní primitivní tedy opravdu (pro každé $k = 1, \ldots, n$) existuje.

Teoreticky je tedy vše v pořádku; je-li $\{y_1, \ldots, y_n\}$ fundamentální systém, existují vždy funkce C_k tak, že (17) je řešením rovnice (1). Při aplikaci V. 18.8 však můžeme narazit na dvě zásadní potíže: 1) Soustavu (16) nebudeme umět rozřešit např. proto, že n je příliš velké; 2) k některé z nalezených funkcí B_k nebudeme umět najít funkci primitivní např. proto, že nepatří mezi tzv. elementární funkce. □

Další metoda hledání řešení y_0 rovnice (1) pomocí fundamentálního systému vede mnohdy k cíli rychleji a snadněji než variace konstant, *lze ji však bohužel užít jen pro rovnice s konstantními koeficienty* a pravá strana musí mít navíc tzv. *speciální tvar*, což znamená, že je lineární kombinací funkcí tvaru

$$
p_1(x)\, e^{\lambda x}\,, \quad p_2(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x\,, \quad p_3(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x\,,
\tag{18}
$$

kde p_1, p_2, p_3 jsou polynomy, λ, α, β reálná čísla.

Protože z linearity operátoru L ihned plyne, že

$$
L y_1 = b_1\,,\ L y_2 = b_2 \ \Rightarrow\ L(y_1 \pm y_2) = b_1 \pm b_2\,,
$$

můžeme se omezit na vysvětlení, jak najít řešení y_0, pro každou z funkcí (18) zvlášť.

Věta 18.9. *Nechť p je polynom stupně $s \geq 0$, nechť* (3) *je rovnice s konstantními koeficienty a nechť M je její charakteristický polynom. Je-li číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ kořen polynomu M, značme N jeho násobnost; je-li $M(\lambda) \neq 0$, položme $N = 0$.*

Pak – podle toho, zdali je λ reálné, nebo imaginární číslo – platí:

1. *Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ a $b(x) = p(x)\, e^{\lambda x}$, existuje polynom q stupně $\leq s$ tak, že funkce*

$$y_0(x) := x^N q(x)\, e^{\lambda x} \tag{19}$$

je řešením rovnice (1).

2. *Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$, a je-li $b(x)$ rovno buď $p(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$, nebo $p(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x$, existují polynomy q a r stupňů $\leq s$ tak, že funkce*

$$y_0(x) := x^N e^{\alpha x} (q(x) \cos \beta x + r(x) \sin \beta x) \tag{20}$$

je řešením rovnice (1).

Příklad 18.6. Rozřešme rovnici

$$y'' - y = \sin x\,, \tag{21}$$

a to nejdříve *variací konstant*. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má kořeny ± 1, takže fundamentální systém tvoří funkce e^x a e^{-x}. Soustava rovnic (16) má nyní tvar

$$B_1(x)\, e^x + B_2(x)\, e^{-x} = 0\,, \quad B_1(x)\, e^x - B_2(x)\, e^{-x} = \sin x \tag{22}$$

a řešení

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \tfrac{1}{2}\, e^{-x} \sin x = (-\tfrac{1}{4}\, e^{-x} (\cos x + \sin x))'\,, \\ B_2(x) &= -\tfrac{1}{2}\, e^{x} \sin x = (\tfrac{1}{4}\, e^{x} (\cos x - \sin x))'\,; \end{aligned} \tag{23}$$

vpravo jsme rovnou napsali primitivní funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ funkcí $B_1(x)$ a $B_2(x)$.

Podle V. 18.6 je řešením rovnice (21) funkce

$$(-\tfrac{1}{4}\, e^{-x} (\cos x + \sin x))\, e^x + (\tfrac{1}{4}\, e^{x} (\cos x - \sin x))\, e^{-x} = -\tfrac{1}{2} \sin x\,,$$

a obecným řešením rovnice (21) je tedy množina

$$\{-\tfrac{1}{2} \sin x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}\,;\ c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}\}\,. \tag{24}$$

Pro porovnání zkusme nyní aplikovat V. 18.9, což je možné, protože (21) je rovnice s konstantními koeficienty, jejíž pravá strana má speciální tvar; *na rozdíl od variace konstant nebudeme muset integrovat:*

Protože $\alpha = 0$, $\beta = 1$ a protože $\lambda = \alpha + i\beta = i$ není kořen charakteristické rovnice, je $N = 0$. Pravá strana rovnice je $p(x) \sin x$, kde $p \equiv 1$ je polynom stupně 0; položíme proto $y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ a hledáme konstanty α, β tak, aby y_0

bylo řešením rovnice (21). Protože $y_0'' = -y_0$, získáme dosazením do (21) identitu $-2\alpha\cos x - 2\beta\sin x = \sin x$; protože funkce $\cos x$, $\sin x$ jsou lineárně nezávislé, musí být $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Řešením rovnice (21) je tedy funkce $y_0(x) := -\frac{1}{2}\sin x$.

Příklad 18.7. Rozřešme rovnici

$$y''' - y'' - y' + y = x^2\,; \tag{25}$$

charakteristická rovnice $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$ má dvojnásobný kořen 1 a jednoduchý kořen -1, takže fundamentální systém tvoří nyní funkce e^x, $x e^x$, e^{-x}.

Protože $\lambda = 0$ není kořen charakteristické rovnice, budeme řešení rovnice (25) hledat podle V. 18.9 ve tvaru $y_0(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, kde α, β, γ jsou zatím neznámé konstanty. Dosazením do (25) získáme identitu $\alpha x^2 + (\beta - 2\alpha)x + (\gamma - \beta - 2\alpha) = x^2$, takže $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$. Řešením rovnice (25) je tedy funkce $y_0(x) = x^2 + 2x + 4$ a jejím obecným řešením množina všech funkcí tvaru

$$x^2 + 2x + 4 + (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-x}\,,\ \text{kde } c_1, c_2, c_3 \text{ jsou libovolné konstanty}. \tag{26}$$

Čtenář může sám zkusit metodu variace konstant; řešením příslušné soustavy (16) získá funkce

$$B_1(x) = -\tfrac{1}{4}x^2(2x+1)e^{-x},\ B_2(x) = \tfrac{1}{2}x^2 e^{-x},\ B_3(x) = \tfrac{1}{4}x^2 e^x,$$

které je nutné integrovat, atd.

Aplikace věty 18.9 je v tomto případě zřejmě podstatně výhodnější.

Příklad 18.8. Hledejme nejdříve obecné řešení rovnice

$$y''' - y = 3e^x \tag{27}$$

a pak řešení Y, které splňuje počáteční podmínky

$$Y(0) = 1\,,\ Y'(0) = -1\,,\ Y''(0) = 0\,. \tag{28}$$

Charakteristická rovnice $\lambda^3 - 1 = 0$ má kořeny $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, a fundamentální systém se tedy skládá z funkcí

$$y_1(x) := e^x\,,\ y_2(x) := e^{-x/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x),\ y_3(x) := e^{-x/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x)\,. \tag{29}$$

Podle V. 18.9 máme řešení rovnice (27) hledat ve tvaru $y_0(x) = \alpha x e^x$, protože 1 je jednoduchý kořen charakteristické rovnice a $p \equiv 3$ je polynom stupně 0. Je $y_0'''(x) = \alpha(3+x)e^x$ a z rovnice $L(y_0) = 3\alpha e^x = 3e^x$ plyne, že $\alpha = 1$. Obecné řešení rovnice (27) je tedy množina všech funkcí tvaru

$$(x + c_1)e^x + e^{-x/2}(c_2\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x) + c_3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x))\,, \tag{30}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou libovolné konstanty.

Máme-li splnit uvedené počáteční podmínky, je třeba vypočítat první a druhou derivaci funkce (30) a dosadit do nulté až druhé derivace této funkce $x = 0$. [8]) Tím získáme levé strany rovnic

$$c_1 + c_2 = 1\,,\ 1 + c_1 - \tfrac{1}{2}(c_2 - \sqrt{3}\,c_3) = -1\,,\ 2 + c_1 - \tfrac{1}{2}(c_2 + \sqrt{3}\,c_3) = 0\,; \tag{31}$$

jejich pravé strany jsou pravými stranami rovností (28). Rovnice (31) mají řešení $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, takže hledaným řešením je funkce

$$Y(x) := (x-1)\,e^x + 2\,e^{-x/2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right). \tag{32}$$

Příklad 18.9. Je-li $b \equiv 0$, jsou řešeními v $\mathbb{R}$ rovnice

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = b(x) \tag{33}$$

lineárně nezávislé funkce x a x^2. *Protože metoda variace konstant byla formulována jen pro případ, že u derivace nejvyššího řádu je koeficient* 1, přejdeme od (33) k rovnici

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = \frac{b(x)}{x^2}\,, \tag{34}$$

která tuto podmínku splňuje a je ekvivalentní s rovnicí (33) v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$. Rovnice budeme řešit 1) pro $b(x) := 2x^2 \lg x$ a 2) pro $b(x) := x^2 e^x$.

Ad 1) Řešení hledáme jen v $\mathbb{R}_+$, protože jinde není $\lg x$ definováno. Rovnice

$$x\,B_1(x) + x^2\,B_2(x) = 0\,,\quad B_1(x) + 2x\,B_2(x) = 2\lg x \tag{35}$$

mají řešení $B_1(x) = -2\lg x$, $B_2(x) = 2\lg x/x$ a příslušné primitivní funkce jsou např. $C_1(x) := 2x\,(1 - \lg x)$ a $C_2(x) := \lg^2 x$. Z toho plyne, že řešením rovnic (33) a (34) v $\mathbb{R}_+$ je funkce $y_0(x) := C_1(x)x + C_2(x)x^2 = x^2\,(\lg^2 x - 2\lg x + 2)$ a že jejich obecné řešení je proto množina všech funkcí tvaru

$$c_1x + x^2\,(\lg^2 x - 2\lg x + c_2)\,, \tag{36}$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. [9])

Ad 2) Řešení nyní hledáme v $\mathbb{R}_+$ i v $\mathbb{R}_-$, přičemž postup je v obou intervalech stejný. Rovnice

$$x\,B_1(x) + x^2\,B_2(x) = 0\,,\quad B_1(x) + 2x\,B_2(x) = e^x \tag{37}$$

---

[8]) Podrobný výpočet přenechávám čtenáři; přesvědčí se, že najít v obecném řešení rovnice partikulární řešení splňující dané počáteční podmínky vyžaduje – zejména u rovnic vyšších řádů – jistý čas, energii a trpělivost.

[9]) V závorce za x^2 jsme napsali jen c_2 místo konstanty $2 + c_2$, která by vznikla sečtením obecného řešení $c_1x + c_2x^2$ s funkcí $y_0(x)$, protože c_2 probíhá celé $\mathbb{R}$ stejně jako $2 + c_2$. Podobně zjednodušíme obě konstanty v (36′) na následující stránce.

mají nyní řešení $B_1(x) = -e^x$, $B_2(x) = e^x/x$. První z těchto funkcí má primitivní funkci $C_1(x) := -e^x$, druhou integrovat „neumíme“, i když je spojitá jak v $\mathbb{R}_+$, tak i v $\mathbb{R}_-$; primitivní funkce v obou intervalech tedy jistě má, žádná z nich však nepatří mezi tzv. elementární funkce.

Naznačme dvě možnosti řešení vzniklého problému:

A. Ze známého Taylorova rozvoje exponenciální funkce ihned plyne, že

$$B_2(x) = \frac{e^x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \quad \text{pro všechna} \quad x \neq 0\,, \tag{38}$$

a C_2 lze proto v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$ definovat rovností

$$C_2(x) := \lg|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}\,. \tag{39}$$

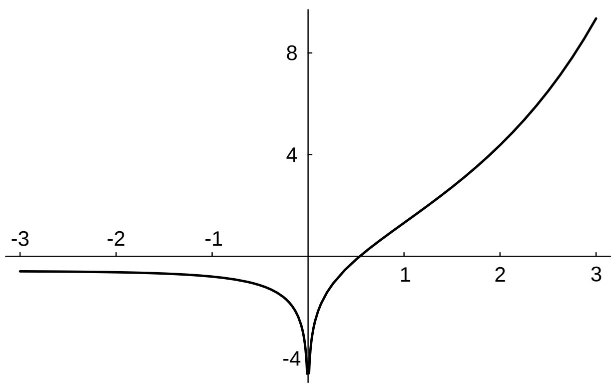
Funkce $y_0(x) := C_1(x)x + C_2(x)x^2$ je pak řešením rovnic (33) a (34) jak v $\mathbb{R}_-$, tak i v $\mathbb{R}_+$; rozvedeme-li xe^x v Taylorovu řadu a výsledek upravíme, zjistíme, že

$$y_0(x) = -xe^x + x^2 \lg|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k \cdot k!} = (\lg|x| - 1)\,x^2 - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k\,(k+1)!}\,.$$

Obecné řešení rovnic (33) a (34) v $\mathbb{R}_+$ i v $\mathbb{R}_-$ je proto množina všech funkcí tvaru

$$c_1 x + (c_2 + \lg|x|)\,x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k\,(k+1)!}\,, \quad \text{kde } c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}. \tag{36'}$$

Poznamenejme, že funkce $\varphi(x) := x^2 \lg|x|$ a $\varphi'(x) = x\,(2\lg|x| + 1)$ mají v bodě 0 limitu 0; položíme-li tedy $\varphi(0) = 0$, bude funkce φ třídy C_1 v celém $\mathbb{R}$. *Řešení (36′) lze tedy rozšířit na funkci třídy* C_1 *v celém* $\mathbb{R}$*, ale toto rozšíření není řešením rovnice* (33) *v* $\mathbb{R}$, protože $\varphi''(x) = 2\lg|x| + 3 \to -\infty$ pro $x \to 0$.



GRAF FUNKCE $C_2(x)$ Z PŘÍKLADU 18.9

B. Numerická a počítačová matematika nabízí další možnost, jak se vyrovnat s problémem funkce primitivní k funkci e^x/x. Z „předpočítačové“ éry máme v knihovnách značné množství informací o různých neelementárních funkcích včetně tabulek jejich hodnot a např. v programu „Mathematica“ firmy Wolfram Research najdeme funkci ExpIntegralEi$(x) \equiv C_2(x) + C$, kde $C \doteq 0.5772156649015$ je tzv. **Eulerova konstanta**; v literatuře se tato funkce značí krátce $\mathrm{Ei}(x)$. Program nám přitom poskytne nejen všechny hodnoty funkcí Ei a C_2 s libovolnou přesností, ale i jejich grafy (viz obrázek na str. 219). To umožňuje s oběma funkcemi „počítačově“ zacházet jako s kteroukoli elementární funkcí; snadno např. zjistíme, že (jediný) kořen funkce C_2 leží v intervalu $(\xi, \xi + 10^{-13})$, kde $\xi := 0.5379782445744$.

* * *

V aplikacích se velmi často setkáme s diferenciálními rovnicemi druhého řádu; např. v mechanice hmotného bodu je to proto, že síla je úměrná zrychlení, které je druhou derivací funkce udávající polohu. Při řešení rovnic $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ se někdy hodí vzorec umožňující – aspoň teoreticky – najít pomocí jednoho nenulového řešení y_1 této rovnice další řešení y_2 tak, že $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém. Vzorec by bylo samozřejmě možné napsat a čtenář by pak do něj jen dosazoval; dává-li však čtenář před touto mechanickou činností přednost pochopení příslušného principu, může při řešení konkrétních příkladů postupovat podle tohoto obecného algoritmu:

Nechť $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a $y_1 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} - \{0\}$ jsou dvě řešení rovnice

$$(40_1) \qquad L(y) := y'' + a_1y' + a_2y = 0\,,$$

kde a_1, a_2 jsou funkce spojité v (α, β). Násobme tuto identitu funkcí y_1 a identitu

$$(40_2) \qquad L(y_1) = y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0$$

funkcí y; odečteme-li výsledky, dostaneme identitu

$$(41_1) \qquad (y_1y'' - y_1''y) + a_1(y_1y' - y_1'y) = 0\,.$$

Protože výraz v závorkách za a_1 je Wronského determinant $W := W(y_1, y)$ a výraz v prvních závorkách je roven W', lze identitu (41_1) napsat ve tvaru

$$(41_2) \qquad W' + a_1W = 0\,;$$

tuto rovnici převedeme vynásobením integračním faktorem $\exp \circ A$, kde $A' = a_1$ v (α, β), na tvar $(W(x)\exp(A(x)))' = 0.$[10]) Derivovaná funkce je tedy konstantní a existuje $d \in \mathbb{R}$ tak, že $W(x) = d\exp(-A(x))$ pro všechna $x \in (\alpha, \beta)$.

Porovnáme-li výraz $y_1y' - y_1'y$ se vzorcem pro derivaci podílu y/y_1 (který smíme utvořit, protože y_1 se podle předpokladu nikde v (α, β) nerovná 0), vidíme, že

$$(42) \qquad \Big(\frac{y(x)}{y_1(x)}\Big)' = d\,\frac{\exp(-A(x))}{y_1^2(x)} = dB'(x)\,,$$

[10]) Viz str. 162 Úvodu.

kde B znamená nějakou funkci primitivní ke zlomku $\exp\circ(-A)/y_1^2$. Funkce y/y_1 a dB se v důsledku toho liší jen o jistou aditivní konstantu c, a položíme-li $y_2 := y_1 B$, vidíme, že identita

$$y(x) = cy_1(x) + dy_2(x) \tag{43}$$

platí všude v (α, β). Každé řešení y rovnice $Ly = 0$ má tedy za naší situace tvar (43); z toho plyne, že funkce y_1, y_2 tvoří její fundamentální systém.

Tím je dokázáno toto užitečné tvrzení:

Věta 18.10. *Nechť $y_1 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} - \{0\}$ je řešení rovnice* (40_1) *a nechť funkce A, B splňují v (α, β) identity*

$$A'(x) = a_1(x)\,, \quad B'(x) = \frac{e^{-A(x)}}{y_1^2(x)}\,. \tag{44}$$

Položíme-li pak $y_2 := y_1 B$, tvoří dvojice $\{y_1, y_2\}$ fundamentální systém řešení rovnice (40_1).

Příklad 18.10. Rovnice

$$x(1 + \lg x)y'' - y' = 0 \tag{45}$$

má v $\mathbb{R}_+$ zřejmě řešení $y_1 \equiv 1$; před aplikací V. 18.10 dělíme výrazem $x(1 + \lg x)$ a omezíme se na intervaly $I_1 := (0, e^{-1})$ a $I_2 := (e^{-1}, +\infty)$, v nichž tento výraz není nikde roven nule. Protože v obou intervalech je

$$-\frac{1}{x(1 + \lg x)} = -(\lg|1 + \lg x|)' \quad \text{a} \quad \frac{\exp(\lg|1 + \lg x|)}{y_1^2(x)} = \pm(1 + \lg x) = \pm(x \lg x)'\,,$$

je funkce $y_2(x) := y_1(x) x \lg x = x \lg x$ řešením rovnice (45), a to zřejmě v celém $\mathbb{R}_+$;[11]) obecným řešením této rovnice v $\mathbb{R}_+$ je tedy množina všech funkcí tvaru $c_1 + c_2 x \lg x$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 18.11. Jak snadno zjistíme, má rovnice

$$y'' + \frac{xy'}{1+x} - \frac{y}{1+x} = 0 \tag{46}$$

v intervalech $I_1 := (-\infty, -1)$ a $I_2 := (-1, +\infty)$ řešení $y_1(x) := x$. Protože první z identit

$$\frac{x}{1+x} = \big(x - \lg|1+x|\big)'\,, \qquad \frac{\exp(\lg|1+x| - x)}{y_1^2(x)} = \pm\frac{1+x}{x^2}\, e^{-x} = \mp\Big(\frac{e^{-x}}{x}\Big)'$$

[11]) „$\pm$“ před výrazem $x \lg x$ zde nehraje žádnou roli, protože $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém, právě když totéž platí o $\{y_1, -y_2\}$; aby funkce y_2 byla třídy C_2, je však nutné zvolit v obou intervalech *stejné znaménko*.

platí v $\mathbb{R} - \{-1\}$, druhá v $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ a protože na znaménku opět nezáleží, je dvojice funkcí $y_1(x) = x$ a $y_2(x) := e^{-x}$ fundamentálním systémem řešení rovnice (46) v každém z intervalů I_1, $I_2' := (-1, 0)$, $I_2'' := \mathbb{R}_+$. Snadno se však přesvědčíme, že bod 0 bylo třeba vyloučit jen „z technických důvodů" a že jde ve skutečnosti o fundamentální systém v každém z intervalů I_1, I_2.

Poznámka 18.9. V Př. 16.10 jsme Eulerovu diferenciální rovnici řádu 3 převedli na lineární rovnici téhož řádu s konstantními koeficienty; v Př. 18.9 jsme řešili Eulerovu rovnici 2. řádu. Věnujme nyní trochu místa obecným úvahám.

Eulerovou diferenciální rovnicí řádu n nazýváme rovnici tvaru

$$Ly := \alpha_0 x^n y^{(n)} + \alpha_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y = b, \tag{47}$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou konstanty, přičemž $\alpha_0 = 1$ a b je funkce spojitá v jistém intervalu $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Zabývejme se nejdříve rovnicí $Ly = 0$ a jejím obecným řešením v $\mathbb{R}_+$. Funkce $g(t) := e^t$ je třídy C_∞ v $\mathbb{R}$ a zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$; lze tedy provést substituci $x = g(t)$, tj. definovat novou neznámou funkci $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rovností $Y(t) := y(e^t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. [12]) Protože budeme dosazovat za funkci y a za její derivace (podle x), vyjdeme raději z ekvivalentní identity $y(x) = Y(\lg x)$ platné v $\mathbb{R}_+$. Postupným derivováním dostaneme (v $\mathbb{R}_+$) identity

$$y'(x) = \frac{1}{x}\,\dot{Y}(\lg x), \tag{48_1}$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2}\,(\ddot{Y}(\lg x) - \dot{Y}(\lg x)), \tag{48_2}$$

$$y'''(x) = \frac{1}{x^3}\,(\dddot{Y}(\lg x) - 3\ddot{Y}(\lg x) + 2\dot{Y}(\lg x)) \tag{48_3}$$

atd. Snadno nahlédneme (a případnou indukcí snadno ověříme), že výraz $x^k y^{(k)}(x)$ je (pro $k = 1, \ldots, n$) lineární kombinací první až k-té derivace funkce Y v bodě $\lg x$ (neboli t). Z toho ihned plyne, že substitucí $x = e^t$ (neboli $t = \lg x$) přejde rovnice $Ly = 0$ v lineární diferenciální rovnici

$$\tilde{L}(Y) := Y^{(n)} + A_1 Y^{(n-1)} + \ldots + A_n Y = 0 \tag{49}$$

řádu n s konstantními koeficienty A_k pro neznámou funkci Y. Je-li $Y_1, \ldots, Y_n$ její fundamentální systém, tvoří funkce $Y_1 \circ \lg, \ldots, Y_n \circ \lg$ fundamentální systém řešení v $\mathbb{R}_+$ rovnice

$$\alpha_0 y^{(n)} + \frac{\alpha_1}{x}\,y^{(n-1)} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x^n}\,y = 0, \tag{50}$$

která vznikla z rovnice $Ly = 0$ dělením x^n. [13])

[12]) Princip záměny proměnných v „diferenciálních výrazech" byl vysvětlen v kapitole 16, str. 155 − 156.

[13]) Fundamentální systém jsme definovali jen pro případ, že u derivace nejvyššího řádu je koeficient 1.

Abychom získali fundamentální systém rovnice (49) v $\mathbb{R}_-$, proveďme substituci $x = -e^t$, tj. zaveďme nyní funkci $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rovností $Y(t) := y(-e^t)$, z níž plyne, že $y(x) = Y(\lg(-x))$. Derivujeme-li tuto identitu, dostaneme vzorce

$$(51_1) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\,\dot{Y}(\lg(-x))\,,$$

$$(51_2) \qquad y''(x) = \frac{1}{x^2}\,(\ddot{Y}(\lg(-x)) - \dot{Y}(\lg(-x)))\,,$$

$$(51_3) \qquad y'''(x) = \frac{1}{x^3}\,(\dddot{Y}(\lg(-x)) - 3\ddot{Y}(\lg(-x)) + 2\dot{Y}(\lg(-x)))$$

atd. Rovnice $Ly = 0$ přejde tedy v rovnici (49) *s týmiž koeficienty* jako v případě substituce $x = e^t$, tedy s týmž obecným řešením. Je-li $\{Y_1(t), \dots, Y_n(t)\}$ fundamentální systém rovnice (49), budou v $\mathbb{R}_-$ tvořit fundamentální systém rovnice (50) funkce $Y_1(\lg(-x)), \dots, Y_n(\lg(-x))$.

Poznamenejme ještě, že se zde výjimečně zabýváme rovnicí (47), v níž koeficient u nejvyšší derivace není 1. Protože tímto koeficientem je funkce, která se v bodě 0 rovná 0, hledáme – aspoň zpočátku – řešení jen v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$. Je však možné, že z vhodných dvojic takových řešení lze vykonstruovat řešení y v celém $\mathbb{R}$; stačí, aby funkce y byla řešením v $\mathbb{R}_+$ i v $\mathbb{R}_-$ a měla v bodě 0 spojitou derivaci řádu n.

Résumé: Substituce $x = e^t$ v $\mathbb{R}_+$ a $x = -e^t$ v $\mathbb{R}_-$ vedou od rovnice (47) k téže rovnici (49); je-li ve (47) na pravé straně místo 0 funkce $b(x)$, bude pravá strana rovnice (49) rovna $b(e^t)$ v prvním případě a $b(-e^t)$ ve druhém případě. Pro obecnou funkci b není žádná souvislost mezi $b|\mathbb{R}_+$ a $b|\mathbb{R}_-$; je-li však funkce b např. sudá nebo lichá, lze očekávat, že řešení v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$ budou úzce souviset.

Příklad 18.12. Rozřešme rovnici

$$(52) \qquad x^3y''' + xy' - y = x^2 + x + 1$$

nejdříve v $\mathbb{R}_+$. Dosadíme-li podle $(48_1)-(48_3)$, dostaneme rovnici

$$(53) \qquad (L^*Y)(t) := \dddot{Y}(t) - 3\ddot{Y}(t) + 3\dot{Y}(t) - Y(t) = e^{2t} + e^t + 1\,,$$

kterou budeme řešit v $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice $(\lambda-1)^3 = 0$ má trojnásobný kořen 1 a fundamentální systém tvoří proto funkce e^t, $t\,e^t$, $t^2\,e^t$. Podle V. 18.9 (a Po. 18.7) má rovnice (53) řešení tvaru $Y_0(t) = \lambda e^{2t} + \mu t^3 e^t + \nu$, kde λ, μ, ν jsou vhodné konstanty; dosadíme-li to do (53), dostaneme po úpravě rovnici $\lambda e^{2t} + 6\mu e^t - \nu = e^{2t} + e^t + 1$, takže $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{6}$, $\nu = -1$ a $Y_0(t) := e^{2t} + \frac{1}{6}\,t^3 e^t - 1$ je řešením rovnice (53). Protože obecné řešení této rovnice má tvar $(c_1 + c_2t + c_3t^2)\,e^t + Y_0(t)$, kde c_1, c_2, c_3 jsou konstanty, má obecné řešení rovnice (52) v $\mathbb{R}_+$ tvar

$$(54_+) \qquad x\,(c_1 + c_2 \lg x + c_3 \lg^2 x) + x^2 + \tfrac{1}{6}\,x \lg^3 x - 1\,.$$

Při řešení rovnice (52) v $\mathbb{R}_-$ užijeme substituci $x = -e^t$, což vede k rovnici $(L^*Y)(t) = e^{2t} - e^t + 1$, která má stejný fundamentální systém jako rovnice (53) a řešení $Y_0(t) = e^{2t} - \frac{1}{6}\,t^3 e^t - 1$. Obecné řešení v $\mathbb{R}_-$ má proto tvar

$$(54_-) \qquad x\,(c_1 + c_2 \lg(-x) + c_3 \lg^2(-x)) + x^2 + \tfrac{1}{6}\,x \lg^3(-x) - 1\,.$$

Je-li funkce $y : \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ řešením rovnice (52) jak v $\mathbb{R}_-$, tak i v $\mathbb{R}_+$ (tj. rovná-li se $y(x)$ v $\mathbb{R}_-$ výrazu (54_-), v $\mathbb{R}_+$ výrazu (54_+), kde c_1, c_2, c_3 jsou nějaká konkrétní čísla – v $\mathbb{R}_-$ obecně jiná než v $\mathbb{R}_+$), lze funkci y spojitě rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tím, že položíme $y(0) = -1$ (což je její limita v bodě 0 zprava i zleva). Takto rozšířená funkce však není řešením rovnice (52) v $\mathbb{R}$ např. proto, že $y'(0) = -\infty$.

Příklad 18.13. Rovnice

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' = x^3 \tag{55}$$

přejde substitucí $x = e^t$ v rovnici

$$\dddot{Y} - \dot{Y} = e^{3t}, \quad \text{kde } Y(t) = y(e^t), \tag{56_+}$$

a substitucí $x = -e^t$ v rovnici

$$\dddot{Y} - \dot{Y} = -e^{3t}, \quad \text{kde } Y(t) = y(-e^t). \tag{56_-}$$

Charakteristická rovnice $\lambda^3 - \lambda = 0$ má kořeny $-1, 0, 1$, takže fundamentální systém rovnic (56_+), (56_-) je $\{e^{-t}, 1, e^t\}$. Protože číslo 3 není kořen charakteristické rovnice, hledáme řešení rovnic ve tvaru Ae^{3t}, kde $A \in \mathbb{R}$. Jak snadno zjistíme dosazením, je A v prvním případě rovno $1/24$, ve druhém $-1/24$.[14]) Obecné řešení rovnic (56_+) a (56_-) je množina všech funkcí tvaru

$$c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 e^t + \tfrac{1}{24} e^{3t} \quad \text{a} \quad d_1 e^{-t} + d_2 + d_3 e^t - \tfrac{1}{24} e^{3t}, \tag{57}$$

kde $c_1, \dots, d_3$ jsou libovolné konstanty. Z toho plyne, že rovnice (55) má v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$ obecné řešení

$$\frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + \frac{x^3}{24} \quad \text{a} \quad -\frac{d_1}{x} + d_2 - d_3 x + \frac{x^3}{24}. \tag{58}$$

Je-li $c_1 \neq 0$ ($d_1 \neq 0$), nemá první (druhá) z funkcí (58) v bodě 0 zprava (zleva) konečnou limitu, a řešení tedy nelze rozšířit. Je-li však $c_1 = d_1 = 0$ a $c_2 = d_2$, je v bodě 0 limita první funkce zprava i limita druhé funkce zleva rovna společné hodnotě čísel c_2, d_2 a každá z funkcí tvaru

$$y(x) := \left\{ \begin{array}{ll} c_2 - d_3 x + \frac{1}{24} x^3 & \text{pro } x \in \mathbb{R}_- \\ c_2 & \text{pro } x = 0 \\ c_2 + c_3 x + \frac{1}{24} x^3 & \text{pro } x \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \tag{59}$$

je spojitá v celém $\mathbb{R}$.

Rovnosti $y''(x) = \frac{1}{4}x$, $y'''(x) = \frac{1}{4}$ (a tedy i rovnost $x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) = x^3$) sice platí v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$ při každé volbě konstant c_2, d_2, c_3, d_3, ale *funkce* (59) *není*

[14]) Není nutné dosazovat dvakrát; rovnice je lineární, takže změně znaménka pravé strany odpovídá změna znaménka řešení.

obecně řešením rovnice (55) *v celém* $\mathbb{R}$. Abychom se o tom přesvědčili, je nutné podrobněji vyšetřit i její derivace v bodě 0!

V $\mathbb{R}_-$ (v $\mathbb{R}_+$) je $y'(x) = -d_3 + \frac{1}{8}x^2$ ($y'(x) = c_3 + \frac{1}{8}x^2$); protože funkce y je spojitá v bodě 0 a protože $\lim_{x\to 0-} y'(x) = -d_3$ ($\lim_{x\to 0+} y'(x) = c_3$), platí podle V.5.5 rovnost $y'_-(0) = -d_3$ ($y'_+(0) = c_3$). V důsledku toho derivace $y'(0)$ existuje, právě když je $c_3 = -d_3$; rovná se pak společné hodnotě těchto čísel. Předpokládejme to; protože pak $y'(0) = \lim_{x\to 0} y'(x)$, je y' spojitá v bodě 0. Z rovnosti $y''(x) = \frac{1}{4}x$ v $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ plyne, že y'' má v bodě 0 limitu 0, takže podle V.5.5 je i $y''(0) = 0$, přičemž funkce y'' je v bodě 0 spojitá. V $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$ je $y'''(x) = \frac{1}{4}$, a podle V.5.5 je tedy i $y'''(0) = \frac{1}{4}$.

Dokázali jsme, že *funkce* (59) *je řešením v* $\mathbb{R}$ *rovnice* (55), *právě když je* $c_3 = -d_3$. Z právě rozřešeného příkladu je patrné, že *v některých případech může mít Eulerova diferenciální rovnice nekonečně mnoho řešení v celém* $\mathbb{R}$, *zatímco jiná její řešení v* $\mathbb{R}_-$ *a v* $\mathbb{R}_+$ (*kterých je též nekonečně mnoho*) *se na řešení v* $\mathbb{R}$ *rozšířit nedají*. Tyto komplikace jsou u Eulerovy rovnice (47) způsobeny koeficientem x^n u $y^{(n)}$, který se v bodě 0 anuluje. [15])

* * *

Nyní ještě krátce pojednáme o možnosti řešení lineární diferenciální řadou, i když toto téma patří spíše do komplexní analýzy. Abychom se vyhnuli dosti komplikovaným pojmům, které komplexní analýza v této části matematiky užívá, omezíme se na aplikaci dvou existenčních tvrzení: [16])

Věta 18.11. *Předpokládejme, že koeficienty* $a_1, \dots, a_n$ *rovnice*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b \tag{60}$$

i její pravá strana b *jsou funkce holomorfní v jistém kruhu* $K(\zeta, R) \subset \mathbb{C}$. *Pak pro každou* n*-tici komplexních čísel* $y_0, \dots, y_{n-1}$ *existuje právě jedna mocninná řada* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\zeta)^k$, *jejíž součet* $y(z)$ *je řešením rovnice* (60) *v* $K(\zeta, R)$ *a splňuje počáteční podmínky*

$$y(\zeta) = y_0\,,\ y'(\zeta) = y_1\,, \dots, y^{(n-1)}(\zeta) = y_{n-1}\,. \tag{61}$$

---

[15]) Na Př. 18.13 lze dobře ilustrovat jeden z nesprávných a zcela nelogických postupů, s nímž se v bezduchém kalkulu bohužel velmi často setkáváme: „Protože $y''(x) = \frac{1}{4}x$ a $y'''(x) = \frac{1}{4}$ a protože pravé strany těchto rovností mají dobrý smysl v celém $\mathbb{R}$, platí uvedené rovnosti zřejmě v celém $\mathbb{R}$; dosazením do rovnice (55) se přesvědčíme, že je opravdu splněna v celém $\mathbb{R}$. O konstanty c_3 a d_3 není nutné se starat, protože první derivace se v rovnici nevyskytuje a při dalším derivování stejně vypadnou.“ (Tato zcela nesprávná úvaha připomíná pověstné derivování $(\lg(\lg(\operatorname{arccotg} x/\pi)))' = -1/(\lg(\operatorname{arccotg} x/\pi) \cdot \operatorname{arccotg} x \cdot (1+x^2))$, při němž derivovaná funkce nemá smysl nikde a výraz vpravo všude.) Poznamenejme ještě, že podmínku $c_3 = -d_3$ neodhalí zřejmě ani žádný počítačový program, který „umí“ derivovat, protože počítá právě jen formálně.

[16]) Znám jen jednu monografii pojednávající o diferenciálních rovnicích v komplexním oboru s přesností a srozumitelností běžnou v reálné analýze; je to Jarníkova kniha [14], na niž zájemce o hlubší pochopení látky v celé její (nemalé) složitosti odkazuji. Věta 18.11 má v této monografii číslo 20a; věta 18.12 plyne z tvrzení uvedených v § 6 kapitoly III. Viz též [20].

Poznámka 18.10. Všechny derivace jsou nyní samozřejmě podle komplexní proměnné, řešením v $K(\zeta, R)$ rozumíme funkci y, která tam rovnici (60) splňuje identicky. Analogicky jako v reálném oboru se zavádí lineární nezávislost funkcí, fundamentální systém, Wronského determinant; koeficienty lineárních kombinací jsou ovšem komplexní. Lze ukázat, že platí analogie vět 18.2−18.6; interval (α, β) se přitom nahradí množinou $K(\zeta, R)$. Pro reálnou analýzu je důležité toto tvrzení:

Dodatek k V. 18.11. *Jsou-li splněny předpoklady* V. 18.11, *je-li* $\zeta \in \mathbb{R}$ *a jsou-li funkce* a_k *a* b *v intervalu* $I := K(\zeta, R) \cap \mathbb{R}$ *reálné, je při reálných počátečních podmínkách i restrikce řešení na interval* I *reálná.*

Poznámka 18.11. Na str. 73 je v bodech 1) − 3) naznačeno, jak „řešení rovnice řadou" probíhá. Jsou-li splněny předpoklady V. 18.11, odpadá ověřování bodu 3), protože věta *zaručuje*, že poloměr konvergence získané řady je $\geq R$.

Věta 18.11 dokonce *umožňuje* (aspoň teoreticky) *získat celý fundamentální systém řešení rovnice* (60). Zvolíme-li totiž jakoukoli regulární matici M typu $n \times n$ a rozřešíme-li rovnici (60) s nulovou pravou stranou a s počátečními podmínkami danými sloupci matice M, budou řešení lineárně nezávislá, protože jejich Wronského determinant bude roven $\det M$ a protože v komplexním oboru platí analogie V. 18.4. (Nejjednodušší regulární matice je přitom matice jednotková, s níž budeme pracovat v následujícím příkladě.)

Příklad 18.14. Abychom našli fundamentální systém $\{y_1, y_2\}$ rovnice

$$y'' + zy' + y = 0, \tag{62}$$

stačí najít řešení y_1, y_2 splňující např. počáteční podmínky $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Řešení budeme hledat ve tvaru mocninné řady o středu 0; protože koeficienty (považované za funkce komplexní proměnné z) jsou holomorfní v celém $\mathbb{C}$, budou mít mocninné řady, které získáme, poloměr konvergence rovný $+\infty$ a jejich součty budou řešeními v celém $\mathbb{C}$.

Předpokládejme, že funkce

$$y_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{63_0}$$

je řešením rovnice (62) v $\mathbb{C}$. Derivováním člen po členu získáme identity

$$y_1'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}, \tag{63_1}$$

$$y_1''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k \tag{63_2}$$

platné také v celém $\mathbb{C}$. Dosazením do (62) dostaneme identitu

$$(2c_2 + c_0) + (6c_3 + 2c_1) z + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1) c_{k+2} + (k+1) c_k) z^k = 0; \tag{64}$$

z počátečních podmínek přitom plyne, že $c_0 = y_1(0) = 1$ a $c_1 = y_1'(0) = 0$.

Jak víme, součet mocninné řady je nulová funkce, právě když jsou všechny koeficienty řady rovny nule. Z toho v našem případě plynou rovnosti

$$c_2 = -\tfrac{1}{2}\,, \ c_3 = 0\,, \ (k+2)c_{k+2} + c_k = 0 \ \text{ pro všechna } \ k \geq 2\,, \tag{65}$$

a z nich vzorce

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!}\,, \quad c_{2k+1} = 0 \ \text{ pro každé } \ k \geq 0\,. \tag{66}$$

Je tedy

$$y_1(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{8} - \frac{z^6}{48} + \frac{z^8}{384} - \frac{z^{10}}{3840} + \frac{z^{12}}{46080} - \dots\,. \tag{67}$$

S řešením $y_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ již nebude tolik práce, protože rekurentní vzorec pro koeficienty již máme; stačí jen uvážit, že nyní je $c_0 = y_2(0) = 0$, $c_1 = y_2'(0) = 1$, z čehož podle (64) plyne, že $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{1}{3}$, takže

$$c_{2k} = 0\,, \quad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} \ \text{ pro každé } \ k \geq 0\,. \tag{68}$$

Nyní tedy je

$$y_2(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{15} - \frac{z^7}{105} + \frac{z^9}{945} - \frac{z^{11}}{10395} + \frac{z^{13}}{135135} - \dots\,. \tag{69}$$

Najděme ještě řešení y_0 rovnice

$$y'' + zy' + y = z \tag{70}$$

s počátečními podmínkami $y_0(0) = y_0'(0) = 0$.[17])

Z těchto podmínek plyne, že $c_0 = c_1 = 0$. Protože na pravé straně (64) je nyní třeba napsat z, je $c_2 = 0$ a $c_3 = \frac{1}{6}$. V důsledku toho je

$$c_{2k} = 0 \ \text{ a } \ c_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2\,(2k+1)!!} \ \text{ pro každé } \ k \in \mathbb{N}\,, \tag{71}$$

takže

$$y_0(z) = \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{30} + \frac{z^7}{210} - \frac{z^9}{1890} + \frac{z^{11}}{20790} - \frac{z^{13}}{270270} + \dots\,. \tag{72}$$

Obecné řešení rovnice (70) má tvar $y_0 + k_1 y_1 + k_2 y_2$, kde $k_1 \in \mathbb{C}$, $k_2 \in \mathbb{C}$ jsou libovolné konstanty. $\square$

[17]) Kdyby byla pravá strana rovnice (70) rovna 0 (neboli kdybychom stále řešili rovnici (62)), byla by podle V. 18.11 funkce $y \equiv 0$ jediným řešením splňujícím uvedené „nulové“ počáteční podmínky. Protože však pravá strana není identicky rovna 0, vedou nulové počáteční podmínky k řešení, které identicky rovno nule není.

Ve fyzikálních a technických problémech často vystupují cylindrické, sférické, hypergeometrické a další funkce, kterým se spolu s Legendrovými, Hermitovými, Laguerrovými a dalšími polynomy říká *speciální funkce*. Jsou řešeními diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž koeficienty sice nejsou holomorfní, ale od holomorfních funkcí se příliš neliší.

Plně uspokojivá řešení takových rovnic je třeba hledat v komplexní analýze, v níž se pracuje s obecně mnohoznačnými *analytickými funkcemi*, zejména s (nekonečně-značným) komplexním logaritmem a (obecně mnohoznačnou) komplexní obecnou mocninou. Protože to je zcela mimo náš dosah, omezíme se na řešení v intervalech tvaru $(0, R)$; vzhledem k tomu, že koeficienty rovnice budou nyní obecnější než ve větě 18.11, nelze si divit, že i řešení bude komplikovanější.

Věta 18.12. *Nechť funkce A, B jsou holomorfní v kruhu $K(0, R)$ a nechť*

$$\rho(\rho-1)+A(0)\rho+B(0)=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2), \tag{73}$$

kde $\rho_1 \geq \rho_2$ jsou reálná čísla. Pak platí:

1. *Rovnice*

$$y''+\frac{A(x)}{x}y'+\frac{B(x)}{x^2}y=0 \tag{74}$$

má v $(0, R)$ vždy (aspoň jedno) řešení tvaru

$$x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k, \tag{75_1}$$

kde řada vpravo konverguje v $K(0, R)$ a není řadou nulovou.

2. *Není-li $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$, má rovnice (74) v intervalu $(0, R)$ dvě lineárně nezávislá řešení tvaru*

$$x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k, \quad x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k, \tag{75_2}$$

kde obě řady konvergují v $K(0, R)$.

3. *Nemá-li rovnice (74) lineárně nezávislá řešení tvaru (75_2), má v intervalu $(0, R)$ fundamentální systém složený z funkcí tvaru*

$$x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k, \quad x^{\rho_1}\lg x\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k+x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k, \tag{76}$$

kde obě řady konvergují v $K(0, R)$.

Poznámka 18.12. Z našich úvah jsme musili vyloučit případ, kdy polynom (73) (tzv. *charakteristický polynom* rovnice (74)) nemá reálné kořeny, protože mocniny s nereálnými exponenty jsme nezavedli; ani v komplexní analýze nepatří jejich definice mezi nejjednodušší.

Jak se čtenář snadno sám přesvědčí, lze polynom (73) získat např. takto: Do levé strany rovnice (74) dosadíme $y = x^\rho$, zkrátíme výrazem $x^{\rho-2}$ a položíme $x = 0$.

V. 18.12 nevylučuje případ, kdy ρ_1 je celé nezáporné číslo; pak je první z řad (75) řadou mocninnou a její součet je (při vhodné volbě koeficientů c_k) řešením rovnice (74) v množině $K(0,R)-\{0\}$.

Při řešení rovnice (74) hledáme nejdříve řešení tvaru $(75_1)-(75_2)$; výrazy tam napsané se nazývají **pseudopotenční řady**. Jak je patrné z 1. části věty, *jedno pseudopotenční řešení $y_1 \not\equiv 0$ existuje vždy*; jestliže kromě násobků funkce y_1 další pseudopotenční řešení y_2 neexistuje, nezbývá než hledat řešení ve tvaru uvedeném ve 3. části věty. *Podmínka, že $\rho_1-\rho_2$ není celé číslo, je postačující, nikoli nutná k tomu, aby řešení* (75_2) *byla lineárně nezávislá.*

Poznamenejme konečně, že v aplikacích jsou A i B často polynomy, tedy funkce holomorfní v celé rovině $\mathbb{C}$; všechny řady uvedené ve větě 18.12 pak konvergují také všude v $\mathbb{C}$.

Příklad 18.15. Hledejme podle V. 18.12 řešení rovnice

$$Ly := y'' + \frac{y'}{x} + y = 0\,, \tag{77}$$

jejíž koeficienty odpovídají polynomům $A(x)=1$ a $B(x)=x^2$. Protože $A(0)=1$, $B(0)=0$, má polynom (73) nyní tvar $\rho^2=0$, takže $\rho_1=\rho_2=0$; z toho plyne existence řešení y_1, které je součtem jisté mocninné řady s poloměrem konvergence $+\infty$, přičemž tento součet bude řešením rovnice (77) v $\mathbb{C}-\{0\}$. Je-li

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \tag{78_0}$$

je

$$\frac{y_1'(x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k\, x^{k-2} = \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2) c_{k+2}\, x^k\,, \tag{78_1}$$

$$y_1''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k\, x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2}\, x^k\,, \tag{78_2}$$

takže

$$(Ly)(x) = \frac{c_1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + (k+2)^2 c_{k+2})\, x^k\,. \tag{79}$$

Tento výraz je (identicky) roven nule, právě když jsou koeficienty u všech mocnin x rovny nule [18]); je tedy $c_1=0$ a pro všechna $k\ge 0$ platí relace $c_k+(k+2)^2 c_{k+2}=0$. Z ní plyne, že $c_k=0$ pro všechna lichá k, a zvolíme-li např. $c_0=1$, bude

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^2 4^2 \dots (2k)^2} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \quad \text{pro všechna} \quad k \ge 0 \tag{80}$$

[18]) Víme, že podobné tvrzení platí pro mocninné řady; protože vynásobením pravé strany (79) faktorem x dostaneme řadu mocninnou, platí tvrzení i v našem případě.

a funkce

$$y_1(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{81}$$

bude řešením rovnice (77) v $\mathbb{C} - \{0\}$.

Kdybychom tuto rovnici napsali ve tvaru

$$L_1 y := xy'' + y' + xy = 0\,, \tag{77_1}$$

byla by funkce (81) jejím řešením v celém $\mathbb{C}$. Poznamenejme, že jde o nejjednodušší **Besselovu rovnici** a že funkce (81) je (až snad na multiplikativní konstantu) **Besselova funkce** $J_0(x)$.

Zbývá najít řešení y_2 rovnice (77) tak, aby $\{y_1, y_2\}$ byl fundamentální systém; protože z dosavadního postupu je zřejmé, že další řešení ve tvaru pseudopotenční řady neexistuje [19]), užijeme 3. část V.18.12 : Vytvoříme (nyní již jen v $\mathbb{R}_+$) funkci

$$y_2(x) := y_1(x) \lg x + \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \tag{82}$$

a najdeme koeficienty d_k tak, aby tato funkce byla řešením rovnice (77), nebo – což je v $\mathbb{R}_+$ totéž – rovnice (77_1). Položíme-li $y_3 = y_1 \lg x$, je

$$y_3'(x) = y_1'(x) \lg x + \frac{y_1(x)}{x}\,, \quad y_3''(x) = y_1'' \lg x + 2\,\frac{y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2}\,; \tag{83}$$

uvážíme-li, že $y_1(x)$ je řešením rovnice (77_1), snadno zjistíme, že

$$(L_1 y_3)(x) = 2y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(k+1)!\, k!\, 2^{2k}}\,. \tag{84}$$

Naším úkolem je najít čísla d_k tak, aby funkce $Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ splňovala rovnici $2y_1' + L_1 Y = 0$. Protože

$$(L_1 Y)(x) = d_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (d_k + (k+2)^2 d_{k+2})\, x^{k+1} \tag{85}$$

a protože v řadě pro $2y_1'(x)$ jsou jen členy s lichými indexy, je patrné, že $d_{2k+1} = 0$ pro všechna $k \geq 0$, a zbývá rozřešit nekonečnou soustavu lineárních rovnic

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\, k!\, 2^{2k}} + d_{2k} + 4\,(k+1)^2\, d_{2k+2} = 0,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{86}$$

První rovnice této soustavy je $-1 + d_0 + 4d_2 = 0$, takže když položíme $d_0 = 1$, bude $d_2 = 0$.

[19]) Postup, kterým jsme získali funkci (81), je jednoznačný až na multiplikativní konstantu.

Následující rovnice mají pak řešení

$$(87) \qquad d_4 = -\frac{1}{128}\,,\ d_6 = \frac{5}{13824}\,,\ d_8 = -\frac{13}{1769472}\,,\ d_{10} = \frac{77}{884736000}\,,\ \dots\,.$$

Obecný vzorec, plynoucí z rekurentních vztahů (86), není zrovna jednoduchý. Doporučuji čtenáři, aby příslušný výpočet provedl a ověřil, že je

$$(88) \qquad d_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}} \sum_{j=1}^{k-1} \Big((j+1)!\,j! \prod_{m=j+1}^{k} m^2 \Big)^{-1} \quad \text{pro každé} \ \ k \ge 2\,.$$

Hledaným řešením rovnice (77_1) je tedy funkce

$$(82') \qquad y_2(x) := y_1(x) \lg x + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} d_{2k} x^{2k}$$

a $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém rovnice (71) v $\mathbb{R}_+$. $\square$

Obecnou **Besselovu rovnici** lze napsat ve tvaru

$$(89) \qquad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0\,,$$

kde ν je libovolné (komplexní) číslo. V příkladu 18.15 jsme tuto rovnici, přepsanou na tvar

$$(89_1) \qquad y'' + \frac{y'}{x} + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)\, y = 0\,,$$

vyřešili pro $\nu = 0$.

Příklad 18.16. Buď nyní $\nu = \frac{1}{2}$, takže máme řešit rovnici

$$(90) \qquad Ly := y'' + \frac{y'}{x} + \Big(1 - \frac{1}{4x^2}\Big)\, y = 0;$$

ve větě 18.12 to odpovídá volbě $A \equiv 1$ a $B(x) = x^2 - \frac{1}{4}$, takže polynom (73) je roven $\rho^2 - \frac{1}{4}$ a má kořeny $\pm\frac{1}{2}$. Rovnici (90) budeme proto řešit jen v $\mathbb{R}_+$, kde je ekvivalentní s rovnicí

$$(90_1) \qquad L_1 y := x^2 y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})\, y = 0\,.$$

Položíme-li

$$(91) \qquad y_1(x) = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{pro všechna} \ \ x \in \mathbb{R}_+\,,$$

snadno zjistíme, že

$$(92) \qquad (L_1 y_1)(x) = x^{3/2} \big(2c_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + (k+2)(k+3)\, c_{k+2})\, x^{k+1}\big)\,,$$

přičemž koeficienty u všech mocnin x^k musí být rovny 0.

Z rovnosti $c_1 = 0$ a z rekurentního vztahu

$$c_k + (k+2)(k+3)\,c_{k+2} = 0 \tag{93}$$

plyne, že $c_{2k+1} = 0$ pro všechna celá $k \geq 0$. Položíme-li $c_0 = 1$, dostaneme z relací (93) snadno vzorec

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad \text{pro všechna celá} \quad k \geq 0\,. \tag{94}$$

To vede k řešení

$$y_1(x) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,,\ \ x \in \mathbb{R}_+\,. \tag{95}$$

Zkusme najít další řešení $y_2(x)$ rovnice (90_1) ve tvaru pseudopotenční řady odpovídající kořenu $\rho_2 = -\frac{1}{2}$ polynomu $\rho^2 - \frac{1}{4}$, tj. položme

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty} d_k\,x^k\,,\ \ x \in \mathbb{R}_+\,. \tag{96}$$

Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned}(L_1 y_2)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,d_k\,x^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k\,x^{k+3/2} \\ &= x^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}((k+2)(k+1)\,d_{k+2} + d_k)\,x^k\,,\end{aligned} \tag{97}$$

protože v prvním součtu jsou první dva sčítance rovny 0. Položíme-li $d_1 = 0$, bude $d_{2k+1} = 0$ pro všechna k; položíme-li $d_0 = 1$, dostaneme z rekurentního vztahu

$$(k+2)(k+1)\,d_{k+2} + d_k = 0 \tag{98}$$

rovnost

$$d_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{pro všechna} \quad k \geq 0\,. \tag{99}$$

Funkce

$$y_2(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \tag{100}$$

je tedy další (pseudopotenční) řešení rovnice (90) v $\mathbb{R}_+$; jistě je zřejmé, že *řešení y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá, a to přesto, že rozdíl kořenů polynomu $\rho^2 - \frac{1}{4}$ je celé číslo.*

Cvičení

A. U každé z uvedených trojic a čtveřic funkcí najděte všechny otevřené intervaly, v nichž jsou lineárně nezávislé (resp. závislé).

18.01. $1, \cos x, \cos^2 x$

18.02. $1, \sinh x, \cosh x$

18.03. $1, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.04. $e^x, \sinh x, \cosh x$

18.05. $e^x, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.06. $e^{2x}, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.07. $e^{2x}, e^{-2x}, \sinh^2 x$

18.08. $1, \sinh x, x \sinh x$

18.09. x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}

18.10. $\lg x, x \lg x, x^2 \lg x$

18.11. $1, \sin x \sinh x, \cos x \cosh x$

18.12. $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$

18.13. $1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x$

18.14. $e^{2x}, e^{-2x}, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.15. $1, \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}), \lg(x - \sqrt{x^2 - 1})$

B. Ověřte, v jakých maximálních otevřených intervalech jsou uvedené funkce y_1, y_2 lineárně nezávislé a sestrojte lineární diferenciální operátor L druhého řádu s koeficientem 1 u druhé derivace tak, aby rovnice $Ly = 0$ měla fundamentální systém $\{y_1, y_2\}$. Pak najděte obecné řešení rovnice $Ly = b$ s funkcí b uvedenou v posledním sloupci.

	$y_1(x),\ y_2(x)$	$b(x)$
18.16.	$x,\ 1/x$	$\sqrt{x},\ \sin x$
18.17.	$x,\ e^x$	$1,\ x-1,\ (x-1)^2$
18.18.	$x,\ x^4$	$1,\ \sqrt[4]{x},\ 1/x$
18.19.	$x^2,\ e^{-x}$	$x+2,\ x(x+2)$
18.20.	$e^{x^2},\ e^{-x^2}$	$1,\ 8x^4$
18.21.	$\sinh x,\ \cosh x$	$1,\ x,\ e^x$
18.22.	$e^x \sin x,\ e^x \cos x$	$1,\ x,\ e^{-x}$
18.23.	$1,\ \arcsin x$	$1,\ \sqrt{1-x^2},\ 1/\sqrt{1-x^2}$
18.24.	$1,\ \operatorname{tg} x$	$1,\ \sin x,\ \operatorname{tg} x$
18.25.	$\lg x,\ 1/x$	$1,\ 1 + \lg x$

18.26. $\lg x,\ x\lg x$ — $\lg x,\ \lg^2 x$

18.27. $\sqrt{x},\ \sqrt[3]{x}$ — $x,\ \sqrt[6]{x}$

18.28. $\sqrt{x},\ 1/x$ — $1/x,\ \sqrt{x}$

18.29. $1,\ \operatorname{arctg} x$ — $1,\ 1/(x^2+1)$

18.30. $1,\ \operatorname{argsinh} x$ — $x,\ 1/(x^2+1)$

C. Najděte maximální otevřené intervaly, v nichž daná trojice funkcí y_1, y_2, y_3 tvoří fundamentální systém rovnice $Ly = 0$, a v nich pak najděte obecné řešení rovnice $Ly = b$ s pravými stranami uvedenými v posledním sloupci.

	$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$	Ly	$b(x)$
18.31.	$1,\ x,\ \dfrac{1}{x}$	$xy''' + 3y''$	$\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{x^2}$
18.32.	$x,\ \dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{x^2}$	$y''' + \dfrac{5y''}{x} + \dfrac{2y'}{x^2} - \dfrac{2y}{x^3}$	$40,\ 90(x+8)$
18.33.	$1,\ x,\ \lg x$	$xy''' + 2y''$	$48x,\ 576\lg x$
18.34.	$1,\ x,\ \operatorname{arctg} x$	$y''' + \dfrac{3x^2-1}{x(x^2+1)}\,y''$	$60x,\ \dfrac{1}{x}$
18.35.	$x,\ \sinh x,\ \cosh x$	$y''' - \dfrac{y''}{x} - y' + \dfrac{y}{x}$	$x,\ 8x\sinh x$

D. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $Ly = b$ s konstantními koeficienty, kde dvě varianty pravé strany b jsou uvedeny v posledním sloupci.

	Ly	$b(x)$
18.36.	$y'' - 3y' + 2y$	$e^x,\ e^{-x}$
18.37.	$y'' - 2y' - 3y$	$16e^{3x},\ 64xe^{-x}$
18.38.	$y'' + 2y' + y$	$xe^{-x},\ x^2$
18.39.	$y'' - y$	$\sinh x,\ x\cosh x$
18.40.	$y'' - 4y' + 3y$	$10\sin x,\ 16\sinh x$
18.41.	$y'' - 2y' + y$	$12x^2e^x,\ 50\cos^2 x$
18.42.	$y'' + 4y' + 3y$	$60\sinh^2 x,\ (x^2+x)e^{-x}$
18.43.	$y'' + 4y$	$25xe^x,\ 9x\sin x$

18.44.	$y'' + y$	$x^2,\ 8x\cos x$
18.45.	$y'' + 9y$	$50\,x\,e^x,\ 4\sin^3 x - 3\sin 3x$
18.46.	$y'' - 2y' + 2y$	$\sin x,\ 2x^2$
18.47.	$y'' - 2y' + 5y$	$10\,(\sin x + \cos x),\ 4\,e^x - 8\,e^{-x}$
18.48.	$y''' + 3y'' + 3y' + y$	$6\,e^{-x},\ 48\sinh x$
18.49.	$y''' + y'' + y' + y$	$4\sinh x,\ 8\cos x$
18.50.	$y''' - y'' - 4y' + 4y$	$10\sin x,\ 8x^3$
18.51.	$y''' - y'' + 4y' - 4y$	$8x^2,\ 25\,e^x$
18.52.	$y''' - y'' + y' - y$	$x^2,\ 4xe^x$
18.53.	$y''' - y'' + 2y$	$10\cos x,\ 2x^3$
18.54.	$y^{(4)} - 2y'' + y$	$x^4,\ 16\,e^x$
18.55.	$y^{(4)} - y$	$\sin 2x,\ 8\sinh x$

E. Najděte maximální otevřené intervaly, v nichž mají následující Eulerovy rovnice $Ly = b$ řešení, a sestrojte v nich jejich obecná řešení.

	Ly	$b(x)$
18.56.	$x^2y'' - 2xy' + 2y$	$x^2 + x,\ x\lg x$
18.57.	$x^2y'' + 3xy' + y$	$\dfrac{1}{x},\ \dfrac{\lg x}{x}$
18.58.	$x^2y'' + xy' + y$	$\sin(\lg x),\ x^3$
18.59.	$x^2y'' - 2y$	$\dfrac{1}{x},\ x^2\lg x$
18.60.	$x^2y'' + xy' - 4y$	$x + \dfrac{1}{x},\ \sinh(\lg x)$
18.61.	$x^3y''' + 3x^2y''$	$x^3, \lg x$
18.62.	$x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y$	$x + 1,\ \lg^2 x$
18.63.	$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y$	$x,\ \dfrac{\lg x}{x}$
18.64.	$x^3y''' + 2x^2y'' + 3xy' + 5y$	$\dfrac{1}{x^2}, x\lg^2 x$
18.65.	$x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y$	$\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{x^2}$

F. Na základě známého řešení y_1 diferenciální rovnice $Ly = 0$ druhého řádu a V. 18.10 najděte další řešení y_2 tak, aby $\{y_1, y_2\}$ byl její fundamentální systém. (Je-li u některého příkladu napsán místo y_1 otazník, lze toto řešení snadno uhodnout.)

Pak rozřešte rovnici $Ly = b$, kde b je daná funkce (a u každého řešení samozřejmě uveďte i příslušný obor).

	Ly	$y_1(x)$	$b(x)$
18.66.	$y'' + \operatorname{tg} x \cdot y'$	?	$\cos x$
18.67.	$y'' + 2 \operatorname{cotg} 2x \cdot y' - \dfrac{4y}{\sin^2 2x}$	$\operatorname{tg} x$	$\sin x$
18.68.	$y'' - \dfrac{xy' - y}{x^2(\lg x - 1)}$	?	$\lg x - 1$
18.69.	$y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x) y' + 2 \operatorname{cotg}^2 x \cdot y$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$
18.70.	$y'' - \Big(2x + \dfrac{1}{x}\Big) y'$	?	x^2
18.71.	$y'' + 2 \, \dfrac{2x^2 + 1}{2x^2 - 1} (xy' - y)$	?	$2x^2 - 1$
18.72.	$y'' + \dfrac{2y' + (2x - 3) y}{1 - 2x}$	e^x	xe^{-x}
18.73.	$y'' - 2 \operatorname{cotg} 2x \cdot y'$	?	$\cos^2 x$
18.74.	$y'' + \dfrac{2 \sin x \cdot y' - (\sin x + \cos x) y}{\cos x - \sin x}$	$\sin x$	$\cos x - \sin x$
18.75.	$y'' + \dfrac{\lg x + 2}{x \lg x} \, y' + \dfrac{2 (\lg x + 1)}{x^2 \lg^2 x} \, y$	$\lg x$	$x^2 \lg x$

G. Pro každou z následujících rovnic najděte dvě lineárně nezávislá řešení v některém z tvarů uvedených ve větách 18.11 a 18.12 (vč. oborů v nich uvedených). [20])

	Ly		Ly
18.76.	$y'' + x^2 y' + xy$	**18.77.**	$y'' + x^4 y' + x^3 y$
18.78.	$y'' + xy$	**18.79.**	$y'' + x^2 y$
18.80.	$y'' - \dfrac{y}{x}$	**18.81.**	$y'' + \dfrac{(3x - 2) y' + y}{x (x - 2)}$

[20]) V některých případech bude zřejmé, že nalezená řada je řešením ve větším oboru, než zaručuje např. V. 18.12.

18.82. $y'' - \dfrac{2xy' + 6y}{1 - x^2}$

18.83. $y'' - \dfrac{2xy' - y}{1 - x^2}$

18.84. $y'' + \dfrac{(6x-1)y' + 2y}{2x(x-1)}$

18.85. $y'' + \dfrac{3+x}{x}\, y' - \dfrac{3}{x^2}\, y$

Řešení

A. Funkce z cvičení **18.01**, **18.02**, **18.05**–**18.08**, **18.11**–**18.13** jsou lineárně *nezávislé* v každém otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, funkce z cvičení **18.09** (resp. **18.10**) v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ (resp. $I \subset \mathbb{R}_+$); funkce z cvičení **18.03**, **18.04** a **18.14** jsou lineárně *závislé* v $\mathbb{R}$ (a tedy i v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}$). Maximální otevřenou množinou, v níž jsou všechny tři funkce z cvičení **18.15** definovány, je interval $J := (1, +\infty)$ a funkce jsou lineárně *závislé* v každém otevřeném $I \subset J$.

B. Za „**O:**“ následuje diferenciální operátor Ly s příslušnými otevřenými intervaly; za „**Ř:**“ jsou pak uvedena řešení rovnice s první, druhou a popř. třetí pravou stranou.

18.16. **O:** $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2}$ v $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $\frac{4}{21}\, x^{5/2}$; 2) $-\sin x - \dfrac{\cos x}{x}$

18.17. **O:** $y'' - \dfrac{xy'}{x-1} + \dfrac{y}{x-1}$ v $I_1 := (-\infty, 1)$ a $I_2 := (1, +\infty)$;
Ř: 1) $e^{x-1}\,\mathrm{Ei}(1-x) - x \lg|1-x| - 1$ v I_1 a I_2; 2) $-x^2 - x - 1$;
3) $-\frac{1}{2}x^3 - x - 1$

18.18. **O:** $y'' - \dfrac{4y'}{x} + \dfrac{4y}{x^2}$ v $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $-\frac{1}{2}x^2$; 2) $-\frac{16}{35}\, x^{9/4}$;
3) $-\frac{1}{9}x(1 + 3\lg|x|)$

18.19. **O:** $y'' + \dfrac{(x^2-2)y'}{x^2+2x} - \dfrac{2(x+1)y}{x^2+2x}$ v $(-\infty, -2), (-2, 0)$ a $\mathbb{R}_+$;
Ř: 1) $x^2 \lg|x| - x + 1$; 2) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

18.20. **O:** $y'' - \dfrac{y'}{x} - 4x^2 y$ v $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $\frac{1}{8}\,(e^{x^2}\,\mathrm{Ei}(-x^2) - e^{-x^2}\,\mathrm{Ei}(x^2))$
2) $-2x^2$;

18.21. **O:** $y'' - y$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) -1; 2) $-x$; 3) $\frac{1}{4}e^x(2x-1)$

18.22. **O:** $y'' - 2y' + 2y$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}(x+1)$; 3) $\frac{1}{5}e^{-x}$

18.23. **O:** $y'' + \dfrac{xy'}{x^2-1}$ v $(-1, 1)$; **Ř:** 1) $\frac{1}{4}(x^2 + \arcsin^2 x)$;
2) $\frac{1}{9}(x^2-7)\sqrt{1-x^2}$; 3) $-\sqrt{1-x^2}$

18.24. **O:** $y'' - (2\,\mathrm{tg}\, x)y'$ v intervalech $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
Ř: 1) $\frac{1}{4}(1 + 2x\,\mathrm{tg}\, x)$; 2) $-\frac{1}{3}\sin x$; 3) $\frac{1}{4}(\mathrm{tg}\, x - 2x)$

18.25. **O:** $y'' + \dfrac{(1+2\lg x)y'}{x(1+\lg x)} - \dfrac{y}{x^2(1+\lg x)}$ v $(0, e^{-1})$ a $(e^{-1}, +\infty)$;
Ř: 1) $F(x)\lg x - x^{-1}G(x) - \frac{1}{3}x^2$, kde $F(x), G(x)$ jsou primitivní funkce funkcí $\dfrac{x}{1+\lg x}, \dfrac{x^2 \lg x}{1+\lg x}$ v uvedených intervalech ; 2) $\frac{1}{18}(2+3\lg x)x^2$

18.26. **O:** $y'' - \dfrac{2y'}{x \lg x} + \dfrac{(2+\lg x)y}{x^2 \lg^2 x}$ v $(0,1)$ a $(1, +\infty)$; **Ř:** 1) $\frac{1}{2}x^2 \lg x$; 2) $\frac{1}{4}(2\lg x - 3)x^2 \lg x$

18.27. **O:** $y'' + \dfrac{y'}{6x} + \dfrac{y}{6x^2}$ v $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $\frac{3}{20}x^3$; 2) $\frac{18}{55}x^{13/6}$

18.28. **O:** $y'' + \dfrac{3y'}{2x} - \dfrac{y}{2x^2}$ v $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) x; 2) $\frac{1}{7}x^{5/2}$

18.29. **O:** $y'' + \dfrac{2xy'}{x^2+1}$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) $\frac{1}{6}(x^2 + 2\lg(x^2+1))$; 2) $\frac{1}{2}\lg(x^2+1)$

18.30. **O:** $y'' + \dfrac{xy'}{x^2+1}$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) $\frac{1}{9}(x^3+3x)$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{argsinh}^2 x$

C. Ve sloupcích uvádíme po řadě číslo cvičení, maximální otevřené intervaly, v nichž je daná trojice funkcí fundamentálním systémem dané rovnice, a řešení rovnice $L(y) = b$ s první a druhou pravou stranou.

18.31.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{6}x^2$	$\frac{1}{4}x(2\lg\lvert x\rvert - 3)$
18.32.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	x^3	$x^3(x+18)$
18.33.	$\mathbb{R}_+$	x^4	$\frac{16}{3}x^3(6\lg x - 7)$
18.34.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	$x^4 + 8(x^2 - \lg(1+x^2))$	$\frac{1}{6}(x^2 - 3 - 4\lg(1+x^2))$
18.35.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	$-(x^2+2)$	$2(x^2-3)\sinh x - 2x\cosh x$

D. Obecné řešení rovnice $Ly = b$ řádu n s konstantními koeficienty je množina všech funkcí (s definičním oborem $\mathbb{R}$) tvaru $y_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, kde y_0 je nějaké řešení rovnice $Ly = b$, $\{y_1, \dots, y_n\}$ fundamentální systém této rovnice a $c_k \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Funkce ve druhém sloupci tvoří fundamentální systém, ve třetím a čtvrtém sloupci jsou řešení y_0 rovnice $Ly = b$ pro první a druhou ze zadaných funkcí b.

18.36.	e^x, e^{2x}	$-e^x(x+1)$	$\frac{1}{6}e^{-x}$
18.37.	e^{-x}, e^{3x}	$e^{3x}(4x-1)$	$-e^{-x}(8x^2+4x+1)$
18.38.	e^{-x}, xe^{-x}	$\frac{1}{6}x^3 e^{-x}$	$x^2 - 4x + 6$
18.39.	e^x, e^{-x}	$\frac{1}{2}x\cosh x - \frac{1}{4}\sinh x$	$\frac{1}{8}(2x^2+1)\sinh x - \frac{1}{4}x\cosh x$

18.40.	e^x, e^{3x}	$2\cos x + \sin x$	$-(4x+2)\,e^x - e^{-x}$
18.41.	$e^x, x\,e^x$	$x^4\,e^x$	$25 - 3\cos 2x - 4\sin 2x$
18.42.	e^{-x}, e^{-3x}	$e^{2x} - 15\,e^{-2x} - 10$	$\frac{1}{6}\,x^3 e^{-x}$
18.43.	$\cos 2x, \sin 2x$	$(5x-2)\,e^x$	$3x\sin x - 2\cos x$
18.44.	$\cos x, \sin x$	$x^2 - 2$	$(2x^2-1)\sin x + 2x\cos x$
18.45.	$\cos 3x, \sin 3x$	$(5x-1)\,e^x$	$\frac{2}{3}\,x\cos 3x + \frac{3}{8}\sin x -$ $\frac{1}{9}\sin 3x$
18.46.	$e^x\cos x, e^x\sin x$	$\frac{1}{5}\,(2\cos x + \sin x)$	$(x+1)^2$
18.47.	$e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$	$3\cos x + \sin x$	$2\sinh x$
18.48.	$e^{-x}, x\,e^{-x}, x^2 e^{-x}$	$x^3 e^{-x}$	$3\,e^x - 4x^3 e^{-x}$
18.49.	$e^{-x}, \cos x, \sin x$	$\sinh x - (x + \frac{1}{2})\,e^{-x}$	$(3-2x)\cos x +$ $(1+2x)\sin x$
18.50.	e^x, e^{2x}, e^{-2x}	$\sin x + \cos x$	$2x^3 + 6x^2 + 15x + 15$
18.51.	$e^x, \cos 2x, \sin 2x$	$-(2x^2+4x+3)$	$(5x-2)\,e^x$
18.52.	$e^x, \cos x, \sin x$	$-x\,(x+2)$	$(x-1)^2\,e^x$
18.53.	$e^{-x}, e^x\cos x, e^x\sin x$	$3\cos x - \sin x$	$x^3 + 3x - 3$
18.54.	$e^x, x\,e^x, e^{-x}, x\,e^{-x}$	$x^4 + 24x^2 + 72$	$(2x^2 - 4x + 3)\,e^x$
18.55.	$e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x$	$\frac{1}{15}\sin 2x$	$2x\cosh x - 3\sinh x$

E. Místo obecného řešení uvádíme (ve 2. sloupci) jen funkce tvořící fundamentální systém a (ve 3. sloupci) řešení při obou volbách pravých stran; obecné řešení se z nich vykonstruuje (v uvedených maximálních intervalech) pomocí V. 18.6.

18.56.	x, x^2	1) $x\,((x-1)\lg\lvert x\rvert - (x+1))$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $-\frac{1}{2}\,x\,(\lg^2 x + 2\lg x + 2)$ v $\mathbb{R}_+$
18.57.	$\dfrac{1}{x}, \dfrac{\lg\lvert x\rvert}{x}$	1) $\dfrac{\lg^2\lvert x\rvert}{2x}$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $\dfrac{\lg^3 x}{6x}$ v $\mathbb{R}_+$
18.58.	$\cos(\lg\lvert x\rvert), \sin(\lg\lvert x\rvert)$	1) $\frac{1}{4}\sin(\lg x) - \frac{1}{2}\cos(\lg x)\,\lg x$ v $\mathbb{R}_+$, 2) $\frac{1}{10}\,x^3$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$
18.59.	$\dfrac{1}{x}, x^2$	1) $-\dfrac{1 + 3\lg\lvert x\rvert}{9x}$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $\frac{1}{54}\,x^2\,(9\lg^2 x - 6\lg x + 2)$ v $\mathbb{R}_+$

18.60.	$\dfrac{1}{x^2}\,,x^2$	1) $-\dfrac{1}{3}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)$ v $\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$, 2) $\dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{1}{x}-x\Big)$ v $\mathbb{R}_+$
18.61.	$1,x,\dfrac{1}{x}$	1) $\frac{1}{24}x^3$ v $\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$, 2) $-(1+\frac{1}{2}\lg^2 x)$ v $\mathbb{R}_+$
18.62.	$x,\cos(\lg\lvert x\rvert)$,	1) $\frac{1}{2}(x\lg\lvert x\rvert - x - 2)$ v $\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$,
	$\sin(\lg\lvert x\rvert)$	2) $-(2+\lg x)\lg x$ v $\mathbb{R}_+$
18.63.	$x, x\lg\lvert x\rvert,\dfrac{1}{x}$	1) $\frac{1}{8}x(2\lg^2\lvert x\rvert - 2\lg\lvert x\rvert + 1)$ v $\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$,
		2) $\dfrac{2\lg^2 x+4\lg x+3}{16x}$ v $\mathbb{R}_+$
18.64.	$\dfrac{1}{x}\,, x\cos(2\lg\lvert x\rvert)$,	1) $-\dfrac{1}{13x^2}$ v $\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$,
	$x\sin(2\lg\lvert x\rvert)$	2) $\frac{1}{8}x\lg x(\lg x-1)$ v $\mathbb{R}_+$
18.65.	$\dfrac{1}{x}\,,\dfrac{\lg\lvert x\rvert}{x}\,,\dfrac{\lg^2\lvert x\rvert}{x}$	1) $\dfrac{\lg^3\lvert x\rvert}{6x}$ v $\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$, 2) $-\dfrac{1}{x^2}$ v $\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$

F. Ve druhém sloupci je napsána dvojice funkcí tvořící fundamentální systém dané rovnice, ve třetím je řešení rovnice $Ly=b$ s předepsanou pravou stranou b. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny všechny maximální otevřené intervaly, v nichž má jak diferenciální rovnice, tak i její řešení smysl.

18.66.	$1,\sin x$	$\cos x + x\sin x$	$(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$
18.67.	$\operatorname{tg} x,\operatorname{cotg} x$	$\frac{1}{3}\cos x\operatorname{cotg} x$	$(\frac{1}{2}k\pi,\frac{1}{2}(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$
18.68.	$x,\lg x$	$\frac{1}{2}x^2(\lg x-2)$	$(0,e)$, $(e,+\infty)$
18.69.	$\sin x,\sin^2 x$	$-\sin x\cos x$	$(\frac{1}{2}k\pi,\frac{1}{2}(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$
18.70.	$1,e^{x^2}$	$-\frac{1}{4}(x^2+1)$	$\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+$
18.71.	x,e^{x^2}	$-\frac{1}{2}-x^2$	$(-\infty,-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,
			$(\sqrt{2},+\infty)$
18.72.	e^x, xe^{-x}	$2x+1$	$(-\infty,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},+\infty)$
18.73.	$1,\cos^2 x$	$\frac{1}{8}\cos 2x+$	
		$\frac{1}{2}\sin^2 x\lg\lvert\sin x\rvert$	$(\frac{1}{2}k\pi,\frac{1}{2}(k+1)\pi)$
18.74.	$\sin x, e^x$	$x\sin x+$	
		$\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$	$((k-\frac{3}{4})\pi,(k+\frac{1}{4})\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$
18.75.	$\lg x, x^2\lg x$	$\frac{1}{4}x^2\lg x(2\lg x-1)$	$(0,1),(1,+\infty)$

G. Ve druhém sloupci jsou napsána lineárně nezávislá řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$ dané rovnice, ve třetím sloupci je definice koeficientů c_k, v posledním sloupci obor, v němž je podle věty 18.11 nebo 18.12 příslušná funkce $y_j(x)$ určitě řešením. (Jak již bylo uvedeno, součet příslušné řady může být řešením ve větší množině.) $U(0,r)$ (resp. $P(0,r)$) je kruhové (resp. prstencové) okolí 0 v rovině $\mathbb{C}$.

18.76.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k}$	$\frac{(-1)^k}{(3k)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-2)^2$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k+1}$	$\frac{(-1)^k}{(3k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-1)^2$	$\mathbb{C}$
18.77.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{5k}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{5j-4}{5j\,(5j-1)}$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{5k+1}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{5j-3}{5j\,(5j+1)}$	$\mathbb{C}$
18.78.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k}$	$\frac{(-1)^k}{(3k)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-2)$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k+1}$	$\frac{(-1)^k}{(3k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-1)$	$\mathbb{C}$
18.79.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{4k}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{4j\,(4j-1)}$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{4k+1}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{4j\,(4j+1)}$	$\mathbb{C}$
18.80.	$y_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!\,(k-1)!}$		$\mathbb{C} - \{0\}$
	$y_2(x) = y_1(x)\lg x + 1 - \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k$	$\frac{k}{(k!)^2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2j+1)}{j\,(j+1)}$	$\mathbb{R}_+$
18.81.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{2}{2-x}$		$P(0,2)$
	$y_2(x) = y_1(x)\lg x$		$(0,2)$
18.82.	$y_1(x) = 3x^2 - 1$		$U(0,1)$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4k^2-1}\, x^{2k+1}$		$U(0,1)$

18.83. $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{2k}$ $\qquad \dfrac{1}{(2k)!} \prod_{j=1}^{k} (4j^2 - 6j + 3)$ $\qquad U(0,1)$

$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{2k+1}$ $\qquad \dfrac{1}{(2k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (4j^2 - 2j + 1)$ $\qquad U(0,1)$

18.84. $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k!\,(2x)^k}{(2k-1)!!}$ $\qquad P(0,1)$

$y_2(x) = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\, x^k$ $\qquad (0,1)$

18.85. $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{(4+k)!}$ $\qquad \mathbb{C} - \{0\}$

$y_2(x) = \dfrac{6 - 6x + 3x^2 - x^3}{6x^3}$ $\qquad \mathbb{C} - \{0\}$