19. Lebesgueův integrál

„Integrál funkce f přes množinu M“ je skupina slov, která nemá smysl, není-li např. ze souvislosti patrné, který integrál máme na mysli. Definic integrálu je totiž celá řada a může se stát, že integrál funkce f přes množinu M podle jedné definice existuje, podle jiné ne. (Pokud však tento integrál existuje podle dvou definic, příslušné hodnoty bývají většinou stejné.)

Zásadní otázkou inteligentního kalkulu je, který z integrálů máme vybrat pro početní praxi? Jsem přesvědčen, že v $\mathbb{R}$ se neobejdeme bez integrálu Newtonova, protože pomocí (vhodným způsobem zobecněné) primitivní funkce se počítá převážná část jednorozměrných integrálů, vč. integrálu Riemannova. Oproti Riemannovu integrálu má integrál Newtonův ještě další výhody: jeho definice a výpočet nezávisí na tom, zdali je integrand a integrační obor omezený nebo ne, a není tedy třeba budovat (pro studenty dosti nudnou) teorii tzv. nevlastních integrálů.

Jak je to však s integrály funkcí dvou, tří, … proměnných přes množiny obsažené v $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, … ? Máme na vybranou např. mezi Riemannovým, Newtonovým, Lebesgueovým, Kurzweilovým, Perronovým integrálem. V bezduchém kalkulu se často integruje bez ověřování, zda a kdy je to dovoleno, a je asi jedno, která z definic integrálu se předstírá – výsledky budou kromě notoricky známých příkladů (které se pak snad ani nemusí řešit, protože se najdou ve sbírkách vzorců) nezaručené a často nesprávné. Má-li se však integrál užít v nové situaci (např. při výzkumné práci), měla by správnost výsledku zaručit kvalifikovaná aplikace vět dokázaných o zvoleném druhu integrálu.

Ctitelé kalkulu se evidentně zamilovali do Riemannova integrálu; odůvodňují to např. tím, že definice tohoto integrálu je jednoduchá. Je však jednoduchost definice správným kritériem výběru? Definici přece zavádíme jen jednou, zatímco numerických příkladů a teoretických úvah, v nichž využíváme vlastnosti integrálu, je nepřeberné množství, protože integrál je jedním z nejdůležitějších nástrojů analýzy a jejích aplikací. Vhodnějším kritériem výběru integrálu je pro každého, kdo při práci s ním ověřuje předpoklady aplikovaných tvrzení, jejich *jednoduchost a obecnost*. Pak Riemannův integrál soutěž prohraje např. proto, že riemannovsky nelze integrovat žádnou neomezenou (nebo „příliš nespojitou“) funkci a že ani zcela jednoduché funkce nelze integrovat přes neomezený obor; zobecněný Riemannův integrál, který by podobné situace měl řešit, má v prostorech dimenze větší než 1 značně problematickou již samu definici.

Jsem přesvědčen, že *rozhodneme-li se pro větší obecnost a jednoduchou aplikovatelnost, vybereme mezi všemi známými integrály integrál Lebesgueův jako optimální.* Jeho vadou – ale jen „jednorázovou“ – je složitější definice, kterou však bohatě vyvažuje jeho obecnost. Integrovat lze např. každou efektivně[1]) sestrojitelnou nezápornou funkci přes každou efektivně[1]) sestrojitelnou množinu a jeho vlastnosti jsou podstatně jednodušší než vlastnosti např. Riemannova integrálu.

---

[1]) tj. bez užití axiomu výběru

Pro čtenáře, kteří se s Lebesgueovou definicí integrálu nesetkali na vysoké škole (nebo v literatuře), vysvětlím stručně jeden z možných postupů vedoucích k definici tohoto integrálu a zavedu všechny potřebné pojmy. Pak čtenáře seznámím (bez důkazu) s větami, které jsou pro práci s Lebesgueovým integrálem (ať již je to v teorii, nebo v praxi) podstatné. Ilustrující příklady celou věc čtenáři jistě přiblíží; nebude asi na závadu při vhodných příležitostech upozornit na konkrétní vady Riemannova integrálu – snad některý z jeho dosavadních uživatelů uzná, že *Lebesgueův integrál je daleko vhodnější matematický nástroj*.

Na první pohled není rozdíl mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem nijak velký – oba integrály pracují se součty tvaru

$$\sum_{k=1}^{p} f_k \mu(M_k), \tag{1}$$

kde čísla f_k nějak souvisejí s integrovanou funkcí, množiny M_k tvoří rozklad integračního oboru M a μ je funkce zobecňující délku, obsah a objem jednoduchých geometrických útvarů v $\mathbb{R}$, v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$. Na rozdíl od riemannovských součtů (1), kdy množiny M_k jsou zpravidla intervaly, jsou v případě Lebesgueova integrálu tyto množiny daleko obecnější.

Naším prvním úkolem bude popsat, přes které množiny se lebesgueovsky integruje a jak se definuje jejich (Lebesgueova) míra, tj. zmíněné zobecnění délky, obsahu a objemu. Protože se v příslušné teorii často setkáme se součty spočetně mnoha *nezáporných* čísel, bude užitečné trochu pozměnit definici součtu zobecněné řady:

Úmluva. Nechť A je spočetná množina, pro každé $\alpha \in A$ nechť je $a_\alpha \geq 0$ a nechť podle původní definice řada

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \tag{2}$$

diverguje; pak budeme říkat, že **součet** řady (2) je roven $+\infty$.[2])

* * *

Intervalem v $\mathbb{R}^p$ (nebo p-**rozměrným intervalem**) budeme – pokud nebude výslovně řečeno něco jiného – rozumět *kompaktní* interval, tedy kartézský součin

$$I = I_1 \times \ldots \times I_p \tag{3}$$

p jednorozměrných kompaktních (tj. omezených uzavřených) intervalů I_j.

p-**rozměrný objem** $v_p(I)$ **intervalu** (3) je definován jako součin délek intervalů I_j. Je-li tedy $I_j = \langle a_j, b_j \rangle$, je

$$v_p(I) := \prod_{j=1}^{p} (b_j - a_j)\,; \tag{4}$$

---

[2]) V původní definici na str. 219 prvního dílu jsme divergentním zobecněným řadám žádný součet nepřiřadili, protože tehdy šlo o co nejtěsnější souvislost mezi konvergencí zobecněných řad a absolutní konvergencí „obyčejných“ řad. Nyní se nám hodí zobecněným řadám $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha$ s nezápornými členy, pro něž je $\sup\{\sum_{\alpha \in K} a_\alpha\,;\ K \subset A \text{ je konečná}\} = +\infty$, přiřadit součet $+\infty$.

zřejmě jde o zobecnění délky úsečky, obsahu obdélníka a objemu kvádru. Protože v dalším budeme často dlouhou dobu pracovat jen v prostoru $\mathbb{R}^p$ s pevně daným p, budeme místo v_p psát krátce v a mluvit stručně o „objemu“.

Než přikročíme k definici objemu otevřené množiny, zaveďme tento pojem: Říkáme, že **intervaly** $I \subset \mathbb{R}^p$, $J \subset \mathbb{R}^p$ **se nepřekrývají**, je-li $\operatorname{int} I \cap \operatorname{int} J = \emptyset$. Říkáme, že $\mathcal{S}$ je **systém nepřekrývajících se intervalů**, je-li složen z intervalů, z nichž žádné dva (různé) se nepřekrývají.

Definice objemu otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^p$ je založena na této větě:

Věta 19.1. *Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^p$ je sjednocením jistého spočetného systému $\mathcal{S}$ nepřekrývajících se intervalů. Jsou-li $\mathcal{S}_1 = \{I_m\}$ a $\mathcal{S}_2 = \{J_n\}$ dva takové systémy, je*

$$\sum_m v(I_m) = \sum_n v(J_n)\,. \quad \square \tag{5}$$

Prázdná množina je ovšem sjednocením prázdného systému intervalů; neprázdná otevřená množina je vždy sjednocením nekonečného systému nepřekrývajících se intervalů, protože konečné sjednocení by bylo kompaktní a kromě prázdné množiny v $\mathbb{R}^p$ neexistuje množina zároveň kompaktní a otevřená.

Je zřejmé, že z jednoho takového rozkladu (neprázdné množiny) lze rozdělováním jeho intervalů sestrojit nekonečně mnoho dalších rozkladů. Věta 19.1 přináší dva důležité poznatky: 1) Rozklady na nepřekrývající se intervaly existují. 2) Pro každé dva takové rozklady je součet objemů příslušných intervalů stejné číslo – někdy konečné, jindy nekonečné. [3])

Z toho plyne korektnost této definice:

Objemem otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^p$ rozumíme číslo

$$v(G) := \sum_{I \in \mathcal{S}} v(I)\,, \tag{6}$$

kde $\mathcal{S}$ je systém nepřekrývajících se intervalů, jejichž sjednocením je G. Protože žádný interval není otevřenou množinou, definice objemu intervalu a objemu otevřené množiny nekolidují a pro objem lze v obou případech užívat týž symbol v. $\square$

Je jistě zřejmé, že *pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^p$ je $0 \le v(G) \le +\infty$, přičemž $v(G) = 0$, právě když je $G = \emptyset$.* Příkladem otevřené množiny, jejíž objem je roven $+\infty$, je $\mathbb{R}^p$.

Označení. Systém všech otevřených podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$ budeme v dalším značit $\mathcal{T}_p$ nebo krátce $\mathcal{T}$.

Příklad 19.1$^{\mathbf{o}}$. Popišme jeden ze způsobů, jak lze k rozkladu z věty 19.1 dojít; pro jednoduchost to provedeme v rovině, v $\mathbb{R}^p$ je postup analogický, jen indexů je více.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $\mathcal{A}_n$ systém všech čtverců

$$I_{n;jk} := \left\langle \frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right\rangle \times \left\langle \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right\rangle,$$

[3]) Zde poprvé užíváme úmluvu zavedenou na předcházející stránce.

kde $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.[4]) Označme $\mathcal{S}_1$ systém všech čtverců z $\mathcal{A}_1$, které jsou částí G, a buď B_1 jejich sjednocení. Jsou-li pro některé $n \in \mathbb{N}$ sestrojeny systémy $\mathcal{S}_m$ a množiny B_m, kde $1 \le m \le n$, buď $\mathcal{S}_{n+1}$ systém všech intervalů z $\mathcal{A}_{n+1}$, které jsou částí G, ale nejsou částí množiny $B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Tím jsou indukcí sestrojeny systémy $\mathcal{S}_n$ a příslušné množiny B_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a z konstrukce je patrné, že

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_n \cup \ldots$$

je systém nepřekrývajících se intervalů. Každý bod $x \in G$ leží pro každé $n \in \mathbb{N}$ v některém z intervalů $I_n \in \mathcal{A}_n$, a protože G je otevřená množina, je $I_n \subset G$ pro skoro všechna n; zvolíme-li nejmenší n tak, že $x \in I_n \subset G$, je $I_n \in \mathcal{S}_n$, takže $x \in B_n$. Sjednocením všech množin B_n, tj. sjednocením všech intervalů patřících do některého $\mathcal{S}_n$, je tedy celá množina G.[5])

* * *

Každá množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je podmnožinou nějaké otevřené množiny (např. $\mathbb{R}^p$) a každá otevřená množina má nějaký objem. Obecně sice neexistuje nejmenší otevřená množina G obsahující M, ale vždy můžeme vytvořit číslo

$$\mu^*(M) := \inf\{v(G);\ M \subset G \in \mathcal{T}\}, \tag{7}$$

které se nazývá **vnější** (**Lebesgueova**) **míra** množiny M.

Věta 19.2. *Vnější míra má tyto vlastnosti:*

$$\mu^*(M) \ge 0 \text{ pro každou množinu } M \subset \mathbb{R}^p; \tag{8}$$

$$M \subset N \Rightarrow \mu^*(M) \le \mu^*(N); \tag{9}$$

$$\mu^*\Big(\bigcup_k M_k\Big) \le \sum_k \mu^*(M_k) \text{ pro každý spočetný systém množin } M_k. \tag{10}$$

(8) konstatuje, že μ^* je nezáporná množinová funkce, definovaná na systému všech podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$, který budeme v dalším značit $\exp(\mathbb{R}^p)$.[6]) Vlastnost (9) je tzv. **monotonie** vnější míry, vlastnost (10) je její σ-**subaditivita**; kdybychom v (10) nahradili slovo „spočetný“ slovem „konečný“, dostali bychom slabší podmínku, které se říká **subaditivita**.

Z (10) ihned plyne, že pro každé dvě množiny $M \subset \mathbb{R}^p$, $N \subset \mathbb{R}^p$ platí nerovnost $\mu^*(M \cup N) \le \mu^*(M) + \mu^*(N)$; *rovnost však bohužel neplatí ani v případě, že množiny M, N jsou disjunktní.* To je *zásadní vada vnější míry.*

---

[4]) Čtverce $I_{n;jk}$ získáme tím, že rozdělíme rovinu vodorovnými přímkami o rovnicích $y = j/2^n$, $j \in \mathbb{Z}$, a svislými přímkami o rovnicích $x = k/2^n$, $k \in \mathbb{Z}$. Systém $\mathcal{A}_{n+1}$ vznikne ze systému $\mathcal{A}_n$ tím, že každý čtverec z $\mathcal{A}_n$ rozdělíme na 4 shodné čtverce.

[5]) Konstrukce je velmi názorná; doporučuji čtenáři, aby si nakreslil nějakou (nejlépe omezenou) otevřenou množinu $G \neq \emptyset$ a pak zakresloval množiny $B_1, B_2, \ldots$ a sledoval, jak se množina G postupně zaplňuje.

[6]) Označení $\exp(X)$ pro systém všech podmnožin množiny X není v literatuře jediné, ale lze se s ním setkat poměrně často.

Je jistě zřejmé, že $\mu^*(G) = v(G)$ *pro každou otevřenou množinu* G; čtenář bude jistě sám umět dokázat, že i

$$\text{(11)} \qquad \textit{pro každý interval } I \textit{ je } \ \mu^*(I) = v(I)\,.$$

Vnější míra tedy zobecňuje pojem objemu (intervalů a otevřených množin) na celý systém $\exp(\mathbb{R}^p)$. Ukazuje se, že neplatnost rovnosti $\mu^*(M \cup N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$ pro (některé) disjunktní množiny M, N *není důsledkem nesprávné metody zobecňování objemu, ale přílišné velikosti systému* $\exp(\mathbb{R}^p)$. (Lze dokázat, že *žádné* zobecnění objemu na systém $\exp(\mathbb{R}^p)$ nesplňuje uvedenou rovnost pro všechny dvojice disjunktních množin.) „Naštěstí“ však lze od systému $\exp(\mathbb{R}^p)$ přejít k několika dostatečně rozsáhlým podsystémům, v nichž žádaná rovnost (pro disjunktní množiny) platí.

Podsystém bychom samozřejmě chtěli zvolit tak, aby výsledek běžných množinových operací provedených na jeho elementech ležel opět v tomto podsystému. Jako nejvhodnější se proto jeví nějaká σ-**algebra**, což je neprázdný systém $\mathcal{A}$ podmnožin (jakékoli) množiny X mající tyto vlastnosti:

$$\text{(12)} \qquad X \in \mathcal{A};$$

$$\text{(13)} \qquad M \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{A} \Rightarrow M - N \in \mathcal{A};$$

$$\text{(14)} \qquad \text{pro každý spočetný systém množin } M_k \in \mathcal{A} \text{ je } \bigcup_k M_k \in \mathcal{A}.$$

Z de Morganových vzorců pak snadno plyne, že

$$\text{(15)} \qquad \text{pro každý spočetný systém množin } M_k \in \mathcal{A} \text{ je } \bigcap_k M_k \in \mathcal{A}.$$

Snadno nahlédneme, že

(16) *průnik libovolného systému σ-algeber obsažených v* $\exp(X)$ *je σ-algebra*.

Z toho ihned plyne, že *existuje nejmenší σ-algebra $\mathcal{B}$ obsahující systém $\mathcal{T}$*; je to samozřejmě průnik *všech* σ-algeber obsahujících všechny otevřené podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$. Vzhledem k (12) a (13) obsahuje $\mathcal{B}$ i všechny uzavřené množiny. V této σ-algebře, jejíž prvky se nazývají **borelovské množiny**, bychom sice mohli celkem dobře pracovat, ale dáme přednost jiné, ještě rozsáhlejší σ-algebře $\mathcal{M}$ tzv. (*lebesgueovsky*) *měřitelných množin*.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^p$ se nazývá (**lebesgueovsky**) **měřitelná**, jestliže

(17) *pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje množina $G \in \mathcal{T}$ tak, že $M \subset G$ a $\mu^*(G - M) < \varepsilon$.*

Názorně řečeno: *Množina M patří do $\mathcal{M}$, právě když ji lze pokrýt otevřenou množinou G tak, že vnější míra „přečnívající“ části $G - M$ množiny G je libovolně malá.* Měřitelné jsou tedy nejen všechny otevřené množiny, ale všechny množiny, které se v tomto smyslu od otevřených množin „málo liší“.

Definice. (**Lebesgueovou**) **mírou** $\mu(M)$ měřitelné množiny M nazveme její vnější míru; definujeme tedy

$$\mu(M) := \mu^*(M) \text{ pro každou množinu } M \in \mathcal{M}. \quad \square \tag{18}$$

Než přejdeme k vyjmenování základních vlastností míry, zaveďme dvě užitečná **označení**: Symbol

$$M_k \nearrow M \quad (\text{resp. } M_k \searrow M) \tag{19}$$

bude znamenat, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $M_k \subset M_{k+1}$ (resp. $M_k \supset M_{k+1}$), přičemž

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \quad (\text{resp. } M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k). \tag{20}$$

Věta 19.3. *Systém $\mathcal{M}$ všech měřitelných množin je σ-algebra obsahující všechny otevřené a všechny uzavřené podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$. Pro všechny množiny M, N a M_k z $\mathcal{M}$ přitom platí:*

$$M \subset N \Rightarrow \mu(M) \le \mu(N); \tag{21}$$

$$M \subset N,\ \mu(M) < +\infty \Rightarrow \mu(N - M) = \mu(N) - \mu(M); \tag{22}$$

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big) = \sum_k \mu(M_k) \text{ pro každý disjunktní spočetný systém množin } M_k; \tag{23}$$

$$M_k \nearrow M \Rightarrow \mu(M_k) \to \mu(M); \tag{24}$$

$$M_k \searrow M,\ \mu(M_1) < +\infty \Rightarrow \mu(M_k) \to \mu(M). \tag{25}$$

Jak je patrné, je míra μ monotónní nezáporná množinová funkce definovaná v $\mathcal{M}$; vlastnost (23) je její σ-**aditivita**. Tato vlastnost je silnější než tzv. **aditivita**, definovaná platností implikace

$$M \cap N = \emptyset \Rightarrow \mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N); \tag{26}$$

aditivita je ovšem také ekvivalentní s podmínkou, která vznikne z (23), nahradíme-li tam slovo „spočetný" slovem „konečný".

Cvičení 19.1. Nechť $I_k \subset \mathbb{R}$ je pro každé $k = 1, \dots, p$ interval *libovolného typu* (uzavřený, otevřený, polouzavřený, omezený, neomezený) s krajními body $a_k < b_k$. Dokažte, že pak je

$$I := I_1 \times \dots \times I_p \in \mathcal{M} \text{ a } \mu(I) = \prod_{k=1}^{p} (b_k - a_k); \tag{27}$$

součin vpravo je přitom $+\infty$, právě když je některý z intervalů I_k neomezený.

Cvičení 19.2. Je-li $\mu(M) = +\infty$, rovnost (22) neplatí, protože její pravá strana $+\infty-(+\infty)$ nemá smysl. Uvedením protipříkladu dokažte, že předpoklad konečnosti $\mu(M_1)$ je pro platnost tvrzení (25) také podstatný.
Rada: Položte např. $M_k = (k, +\infty)$. $\diamond$

Než podáme další charakteristiky měřitelnosti množin, zaveďme tři nové pojmy:

Definice. Říkáme, že **množina** $M \subset \mathbb{R}^p$ **má míru** 0, je-li $\mu^*(M) = 0$. Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je **typu** G_δ, je-li průnikem spočetně mnoha otevřených množin $M_k \subset \mathbb{R}^p$; říkáme, že množina $N \subset \mathbb{R}^p$ je **typu** F_σ, je-li sjednocením spočetně mnoha uzavřených množin $N_k \subset \mathbb{R}^p$. $\square$

Protože $\mathcal{M}$ je σ-algebra obsahující všechny otevřené a všechny uzavřené podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$, *jsou i všechny množiny typů* F_σ *a* G_δ *měřitelné.*

Cvičení 19.3. Dokažte tato tvrzení:

(28) *každá množina míry* 0 *je měřitelná*;

(29) *každá podmnožina množiny míry* 0 *má míru* 0;

(30) *sjednocení spočetně mnoha množin míry* 0 *má míru* 0;

(31) *každá spočetná množina má míru* 0.

Cvičení 19.4. Dokažte, že *množina* $M \subset \mathbb{R}^p$ *je typu* F_σ, *právě když je* $\mathbb{R}^p - M$ *typu* G_δ. Dokažte dále, že *množina* $\mathbb{Q}$ *všech racionálních čísel je typu* F_σ, *množina všech iracionálních čísel typu* G_δ.

Cvičení 19.5. Dokažte, že *každá otevřená množina je typu* F_σ, *každá uzavřená množina typu* G_δ.
Rada: V prvním případě užijte V. 19.1, ve druhém de Morganovy vzorce. $\diamond$

Věta 19.4. *K tomu, aby množina* $M \subset \mathbb{R}^p$ *byla měřitelná, je nutné a stačí, aby byla splněna kterákoli z těchto podmínek:*

1. *Existuje množina* $H \supset M$ *typu* G_δ *tak, že* $\mu(H - M) = 0$.
2. *Existuje množina* $K \subset M$ *typu* F_σ *tak, že* $\mu(M - K) = 0$.

Poznámka 19.1. Protože systém $\mathcal{M}$ všech měřitelných množin je σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny a systém $\mathcal{B}$ všech borelovských množin je nejmenší taková σ-algebra, je $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Lze ukázat, že $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$; nejen to: mohutnost systému $\mathcal{M}$ je „daleko větší“ než mohutnost systému $\mathcal{B}$.[7])

Přitom jsou měřitelné množiny v jistém smyslu „blízké“ borelovským množinám; k otevřeným množinám mají mnohé z nich ještě „dost daleko“ (viz definici (17)), ale *jakoukoli měřitelnou množinu lze získat z vhodné množiny typu* G_δ *odebráním vhodné množiny míry* 0 *a z vhodné množiny typu* F_σ *naopak přidáním vhodné*

---

[7]) Pro čtenáře, který se setkal s *mohutností* množin a s *kardinálními čísly*: $\mathcal{B}$ má „jen“ mohutnost kontinua $\mathfrak{c}$ (což je zároveň mohutnost prostoru $\mathbb{R}^p$), kdežto mohutnost systému $\mathcal{M}$ je rovna $2^{\mathfrak{c}}$, což je mohutnost systému všech podmnožin množiny mohutnosti $\mathfrak{c}$ (tedy speciálně mohutnost systému $\exp(\mathbb{R}^p)$). I systém všech množin míry 0 má mohutnost $2^{\mathfrak{c}}$.

množiny míry 0. Nepředstavitelnou rozmanitost měřitelných množin je tedy třeba přičíst množinám míry 0, přes něž má – jak se ukáže později – každá funkce Lebesgueův integrál rovný 0, takže je lze k integračnímu oboru přidávat, nebo je od něj odebírat, aniž se integrál (jak co do existence, tak co do hodnoty) změní. Poznamenejme ještě, že v početní praxi se při integraci nesetkáme s integračním oborem, který by nebyl typu F_σ nebo G_δ.

Představa, že bychom se mohli blíže seznámit se všemi množinami míry 0, je iluzorní. [8]) Nebude však na škodu představit čtenáři nejznámější nespočetnou množinu míry 0, tzv. Cantorovo diskontinuum, protože to je množina, která hraje podstatnou roli v nejrůznějších příkladech i tvrzeních nejen analýzy, ale především topologie.

Příklad 19.2. Cantorovo diskontinuum $\mathcal{D}$ je definováno jako množina všech čísel tvaru

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_k}{3^k}, \quad \text{kde } i_k \in \{0,1\} \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Přiřadíme-li číslu (32) číslo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_k}{2^k}, \tag{32'}$$

je tím zřejmě definováno zobrazení množiny $\mathcal{D}$ *na* interval $\langle 0,1\rangle$, protože každé číslo z tohoto intervalu lze napsat ve tvaru (32′). *Protože každý interval je nespočetná množina, platí totéž nutně i o* $\mathcal{D}$.

Zvolíme-li (na chvíli pevně) posloupnost $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$, označíme-li x součet příslušné řady (32) a položíme-li

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{i_k}{3^k} \tag{33}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí zřejmě nerovnosti

$$0 \le x - s_n \le 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^n},$$

takže $x \in \langle s_n, s_n + 3^{-n}\rangle$.

Utvoříme-li tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou posloupnost $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ nul a jedniček interval

$$I(i_1,\ldots,i_n) = \langle s_n, s_n + 3^{-n}\rangle, \tag{34}$$

leží $\mathcal{D}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ ve sjednocení D_n všech 2^n těchto intervalů. Protože každý z nich má délku 3^{-n} (a protože jsou disjunktní), je $\mu(D_n) = p_n := (2/3)^n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je tedy $\mu^*(\mathcal{D}) \le p_n$, a protože $p_n \to 0$ pro $n \to \infty$, je $\mu^*(\mathcal{D}) = 0$. $\mathcal{D}$ *je tedy* (podle (28)) *měřitelná množina a její míra* $\mu(\mathcal{D})$ *je rovna* 0.

[8]) Např. proto, že je jich $2^{\mathfrak{c}}$.

Protože při každé volbě čísel $i_k \in \{0,1\}$, $k \in \mathbb{N}$, je zřejmě

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(i_1,\dots,i_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{3^k}\,,$$

je $\mathcal{D}$ průnikem všech množin D_n; *protože každá z množin D_n je kompaktní, platí totéž o $\mathcal{D}$.* D obsahuje spočetnou množinu krajních bodů všech intervalů $I(i_1,\dots,i_n)$, ale kromě těchto bodů obsahuje $\mathcal{D}$ nespočetně mnoho dalších bodů.

Obsahuje-li nějaká množina nějaký interval, má zřejmě kladnou vnější míru. *Cantorovo diskontinuum* proto žádný interval neobsahuje, a nemá tedy žádné vnitřní body; protože je uzavřené, *je řídké v* $\mathbb{R}$.

Popišme intervaly $I(i_1,\dots,i_n)$ geometricky: Intervaly $I(0) = \langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ a $I(1) = \langle \frac{2}{3}, 1\rangle$ vzniknou tím, že interval $I = \langle 0,1\rangle$ rozdělíme na tři stejně dlouhé intervaly a prostřední otevřený interval $J = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ vynecháme. Intervaly $I(i_1,0)$ a $I(i_1,1)$ vzniknou obdobně: Každý z intervalů $I(i_1)$ rozdělíme na tři stejně dlouhé intervaly a prostřední otevřené intervaly $J(i_1)$ vynecháme. Obecně je interval $J(i_1,\dots,i_n)$ „prostřední otevřená třetina“ intervalu $I(i_1,\dots,i_n)$. Sjednocení všech intervalů

$$J,\ J(i_1),\ \dots,\ J(i_1,\dots,i_n),\ \dots \tag{35}$$

je otevřená množina $\langle 0,1\rangle - \mathcal{D}$ s mírou rovnou 1, přičemž *tyto intervaly jsou nejen disjunktní, ale mají dokonce disjunktní uzávěry.* Z toho plyne další pozoruhodná vlastnost Cantorova diskontinua: *$\mathcal{D}$ nemá žádný izolovaný bod, $\mathcal{D} = \operatorname{der}\mathcal{D}$.* (Kdyby totiž bod x byl izolovaným bodem množiny D, existovalo by okolí $P(x,\delta)$ disjunktní s $\mathcal{D}$, interval $(x-\delta, x)$ by byl částí některého z intervalů J' napsaných v (35) a jakýsi jiný interval J'' z této posloupnosti by obsahoval interval $(x, x+\delta)$. Bod x by tedy ležel v uzávěru dvou různých intervalů J', J''.) $\square$

„Zdravý selský rozum“ by nám mohl našeptávat, že Cantorovo diskontinuum má míru 0 proto, že je řídké; uvedl by nás tím v naprostý omyl. V následujících dvou příkladech se čtenář přesvědčí, že *řídkost a hustota s mírou vůbec nesouvisí.*

Příklad 19.3. Ukažme, že

(36) *pro každé $\varepsilon \in (0,1)$ existuje řídká množina $H \subset \langle 0,1\rangle$ s mírou $> 1-\varepsilon$.*

Nechť posloupnost čísel $a_k \in (0,1)$ obsahuje (jako členy) všechna racionální čísla ležící v $(0,1)$ a nechť $\varepsilon \in (0,1)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ buď I_k otevřený interval délky $< \varepsilon/2^k$, pro nějž je $a_k \in I_k \subset (0,1)$. Pak je $G := \bigcup_k I_k \subset (0,1)$ otevřená množina a $\mu(G) \le \sum_k \mu(I_k) < \sum_k \varepsilon/2^k = \varepsilon$. Množina $H := \langle 0,1\rangle - G$ je kompaktní a má míru $> 1-\varepsilon$. Protože množina $A := \{a_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$ je hustá v intervalu $\langle 0,1\rangle$, platí totéž o množině G; její doplněk H je proto řídký (sr. s V.12.14).

Příklad 19.4. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$, ale má míru 0, protože je spočetná.

Poznámka 19.2. Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^p$ má ještě jednu důležitou vlastnost: *Měřitelnost množiny a její míra jsou invariantní vůči posunutí, otočení (kolem kteréhokoli bodu) a zrcadlení (podle jakékoli nadroviny dimenze $p-1$):*

Jinými slovy: *Znamená-li rovnost $y = f(x)$ soustavu rovností*

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p + b_1\,,\\
&y_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p + b_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
&y_p = \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \ldots + \lambda_{pp}x_p + b_p\,,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

kde matice čísel λ_{jk} má determinant rovný ± 1 a kde b_j jsou libovolná čísla, je $M \subset \mathbb{R}^p$ měřitelná, právě když je měřitelná množina $f(M)$, načež $\mu(M) = \mu(f(M))$.

* * *

Úmluva. Až do konce této kapitoly bude slovo „funkce“ znamenat zobrazení do $\mathbb{R}^*$; zobrazením do $\mathbb{R}$ budeme v případě potřeby říkat „konečné funkce“. $\square$

Na začátku kapitoly 3 jsme zavedli algebraické operace s $\pm\infty$; dvě z nich je vhodné v teorii Lebesgueova integrálu modifikovat: Zatímco jsme dosud říkali, že součin $a_1 \ldots a_n$ nemá smysl, je-li jeden z faktorů 0 a jiný $\pm\infty$, **definujme** nyní, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každou n-tici čísel $a_1, \ldots, a_n$ z $\mathbb{R}^*$ je

$$a_1 a_2 \ldots a_n := 0\,,\ \textit{je-li } a_k = 0 \textit{ pro některé } k \in \{1, 2, \ldots, n\}\,, \tag{38}$$

a to i v případě, že jiný faktor a_j je roven $\pm\infty$. [9])

Kromě toho položme

$$(+\infty)^{\alpha} := +\infty \ \ \textit{a}\ \ (+\infty)^{-\alpha} := 0 \ \ \textit{pro všechna}\ \ \alpha \in \mathbb{R}_+\,. \quad \square \tag{39}$$

Integrovat budeme jen tzv. *měřitelné funkce* přes měřitelné množiny; podobně jako je tomu u měřitelných množin, kde výsledek spočetného sledu spočetných operací provedených na otevřených nebo uzavřených množinách je měřitelná (dokonce borelovská) množina, i zde bude platit, že *výsledek spočetného sledu spočetných operací provedených na spojitých funkcích je měřitelná funkce.* [10])

Definice. Říkáme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}^*$ je **měřitelná (v** M**)**, je-li $M \in \mathcal{M}$ a je-li množina

$$\{x \in M\,;\ f(x) > c\} \tag{40}$$

měřitelná pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Věta 19.5. *Funkce f spojitá na měřitelné množině M je v M měřitelná.*

---

[9]) Součinu $0 \cdot (\pm\infty)$ se v elementární analýze nepřiřazuje žádná hodnota, protože by to např. platnost tvrzení „$\lim(a_k \cdot b_k) = \lim a_k \cdot \lim b_k$, *má-li pravá strana smysl*“, stejně nezaručilo. Zde však je definice (38) výhodná, protože se dosti často vyskytují situace, kdy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ i $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou *neklesající posloupnosti nezáporných konečných čísel* (*nebo funkcí*), a v tom případě právě vyslovené tvrzení o limitě součinu platí, protože pak $\lim a_k = 0 \Rightarrow a_k b_k = 0$ pro všechna k.

[10]) „Prakticky“ se tedy nikdy nesetkáme ani s neměřitelnou množinou, ani s neměřitelnou funkcí, protože důkaz jejich existence je založen na *axiomu výběru* a příslušná konstrukce je neefektivní.

Množinu (40) lze totiž napsat ve tvaru $f_{-1}((c,+\infty))$, což je podle Cv. 12.31 množina otevřená v M, tedy průnik $M \in \mathcal{M}$ s jistou množinou otevřenou v $\mathbb{R}^p$.

Cvičení 19.6. Dokažte, že *měřitelnost funkce f v M je ekvivalentní se třemi výroky, které získáme, nahradíme-li v definici měřitelnosti symbol $>$ kterýmkoli ze symbolů $\geq$, $<$, $\leq$.*

Rada: Uvažte, že např.

$$\{x \in M\,;\ f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in M\,;\ f(x) > c + \tfrac{1}{n}\}\,. \diamond$$

Cvičení 19.7. Dokažte, že *z měřitelnosti funkce f v M plyne měřitelnost množin*

(41) $$\{x \in M\,;\ f(x) = c\} \text{ pro všechna } c \in \mathbb{R}^*\,.$$

Rada: Užijte Cv. 19.6. $\diamond$

Cvičení 19.8. Dokažte, že *pro každé dvě funkce f, g měřitelné v M jsou měřitelné i tyto množiny*:

(42) $$\{x \in M\,;\ f(x) < g(x)\}\,,\quad \{x \in M\,;\ f(x) \leq g(x)\}\,,\quad \{x \in M\,;\ f(x) = g(x)\}\,.$$

Rada: Uvažte, že první z množin je sjednocením přes všechna racionální čísla r průniků $\{x \in M\,;\ f(x) < r\} \cap \{x \in M\,;\ g(x) > r\}$. Druhá z množin je doplňkem množiny $\{x \in M\,;\ g(x) < f(x)\}$, třetí z nich je průnikem dvou množin prostředního typu. $\diamond$

Cvičení 19.9. Dokažte, že *pro každou funkci f měřitelnou v M a pro každou měřitelnou množinu $N \subset M$ je i restrikce $f\,|\,N$ měřitelná.*

Cvičení 19.10. Dokažte toto tvrzení: *Je-li každá ze spočetně mnoha množin M_k měřitelná, je-li $M = \bigcup_k M_k$ a je-li funkce $f : M \to \mathbb{R}^*$ měřitelná v každé z množin M_k, je měřitelná i v M.*

Cvičení 19.11. Dokažte toto tvrzení: *Je-li $N \subset M$, kde M, N jsou měřitelné množiny, je-li funkce f měřitelná v M a klademe-li*

(43) $$g(x) := \left\{ \begin{array}{cl} f(x) & \text{pro všechna } x \in N \\ 0 & \text{pro všechna } x \in M - N \end{array} \right\},$$

je funkce g měřitelná v M.

Rada: Užijte výsledky z předcházejících dvou cvičení. $\diamond$

Cvičení 19.12. Dokažte, že

(44) $$\mu(M) = 0\,,\ f : M \to \mathbb{R}^* \Rightarrow f \text{ je měřitelná v } M\,.$$

Rada: Uvažte, že všechny množiny (40) mají nyní míru 0. $\diamond$

Algebraické operace s měřitelnými funkcemi vedou sice opět k měřitelným funkcím, ale je třeba vždy uvážit, na jaké části původní množiny jsou definovány.

Věta 19.6. *Nechť funkce f, g jsou měřitelné v M. Pak platí:*

1. *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je funkce αf měřitelná v M.*

2. *Funkce $f + g$ je měřitelná v množině $M - \{x \in M;\ f(x) = -g(x) = \pm\infty\}$, funkce $f - g$ v množině $M - \{x \in M;\ f(x) = g(x) = \pm\infty\}$.*

3. *Funkce fg, $\max(f, g)$ a $\min(f, g)$ jsou měřitelné v M. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}_+$, je v M měřitelná i funkce $|f|^\alpha$.*

4. *Funkce f/g je měřitelná na množině*

$$M - (\{x \in M;\ g(x) = 0\} \cup \{x \in M;\ f(x) = \pm\infty \wedge g(x) = \pm\infty\}). \quad \square$$

Jak je patrné, *všechny funkce uvedené v předcházející větě jsou měřitelné na maximální podmnožině množiny M, na níž mají smysl.* $\square$

Je-li $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ posloupnost čísel (z $\mathbb{R}^*$) nebo funkcí (definovaných na jisté množině M), je její **limes inferior** a **limes superior** definován rovností

$$\liminf_{k\to\infty} f_k := \lim_{n\to\infty} \inf\{f_k;\ k \geq n\}, \quad \limsup_{k\to\infty} f_k := \lim_{n\to\infty} \sup\{f_k;\ k \geq n\}. \tag{45}$$

Připomeňme, že (jak pro posloupnosti čísel, tak i funkcí) *platí vždy nerovnost* $\liminf f_k \leq \limsup f_k$ a že $\lim f_k$ *existuje, právě když je* $\liminf f_k = \limsup f_k$.

Věta 19.7. *Je-li funkce f_k měřitelná v M pro každé $k \in \mathbb{N}$, jsou v M měřitelné i funkce*

$$\inf\{f_k; k \in \mathbb{N}\},\ \sup\{f_k; k \in \mathbb{N}\},\ \liminf_{k\to\infty} f_k,\ \limsup_{k\to\infty} f_k.$$

Funkce $\lim_{k\to\infty} f_k$ *je měřitelná na množině* $\{x \in M;\ \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ *existuje*$\}$.

Poznámka 19.3. Funkce spojité na měřitelné množině M se v teorii funkcí nazývají **funkce nulté Bairovy třídy**; podle V. 19.5 jsou měřitelné. Funkce, které jsou v M limitami posloupností spojitých funkcí, jsou **funkce první Bairovy třídy**, funkce, které jsou v M limitami posloupností funkcí první Bairovy třídy, jsou **funkce druhé Bairovy třídy** atd.

Vztah mezi měřitelností funkce a možností aproximovat je funkcemi různých Bairových tříd je podobný vztahu mezi měřitelnými množinami a množinami otevřenými (kterým se v teorii množin říká *borelovské množiny nulté třídy*) a typu F_σ a G_δ (což jsou *borelovské množiny první třídy*):

Věta 19.8. *Konečná funkce f je měřitelná v (měřitelné množině) M, právě když platí jedna z těchto ekvivalentních podmínek:*

1. *Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje otevřená množina G míry menší než ε tak, že restrikce $f\,|\,(M - G)$ je spojitá v $M - G$.*

2. *Existuje množina H míry 0 tak, že restrikce $f\,|\,(M - H)$ je první Bairovy třídy v $M - H$.*

Dodatek. *Pro každou konečnou funkci f měřitelnou v M existuje funkce g druhé Bairovy třídy v M a množina N míry 0 tak, že v $M - N$ je $f = g$.* $\square$

Charakteristická funkce χ_M množiny $M \subset \mathbb{R}^p$ je definována podmínkami

$$\chi_M := \left\{ \begin{array}{l} 1 \textit{ pro všechna } x \in M \\ 0 \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R}^p - M \end{array} \right\}. \tag{46}$$

Cvičení 19.13. Dokažte, že

$$\textit{množina } M \subset \mathbb{R}^p \textit{ je měřitelná, právě když je měřitelná funkce } \chi_M. \quad \square \tag{47}$$

V teorii Lebesgueova integrálu hrají důležitou úlohu tzv. *monotónní limitní přechody*, a to jak pro posloupnosti čísel, tak i funkcí.

Je-li $a_k \in \mathbb{R}^*$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, budeme psát

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k \nearrow a \\ a_k \searrow a \end{array} \right\}, \text{ je-li } a_k \to a \text{ a je-li } \left\{ \begin{array}{l} a_k \leq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{array} \right\} \text{ pro všechna } k \in \mathbb{N}. \tag{48}$$

Je-li buď $a_k \nearrow a$, nebo $a_k \searrow a$, budeme říkat, že **limitní přechod** $a_k \to a$ **je monotónní**.

Definice symbolu $f_k \nearrow f$ v M (resp. $f_k \searrow f$ v M) je zcela analogická; výrok „$f_k \leq f_{k+1}$ v M“ (resp. „$f_k \geq f_{k+1}$ v M“) přitom samozřejmě znamená, že je $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ (resp. $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$) pro všechna $x \in M$.

Je-li buď $f_k \nearrow f$ nebo $f_k \searrow f$ v M, budeme (podobně jako u posloupností čísel) říkat, že **limitní přechod** $f_k \to f$ **je v** M **monotónní**.

Cvičení 19.14. Dokažte, že (pro libovolné množiny M, N, M_k) platí:[11])

$$N \subset M \Rightarrow \chi_N \leq \chi_M; \tag{49}$$

$$M = \bigcup_k M_k, \ N = \bigcap_k M_k \Rightarrow \chi_M = \max\{\chi_{M_k}; k\}, \ \chi_N = \min\{\chi_{M_k}; k\}; \tag{50}$$

$$M = \bigcup_k M_k, \textit{ kde } M_k \textit{ jsou disjunktní množiny } \Rightarrow \chi_M = \sum_k \chi_{M_k}; \tag{51}$$

$$M_k \nearrow M \Rightarrow \chi_{M_k} \nearrow \chi(M); \tag{52}$$

$$M_k \searrow M \Rightarrow \chi_{M_k} \searrow \chi(M). \quad \square \tag{53}$$

Zavedeme ještě poslední pojem, s nímž je nutné seznámit se před definicí Lebesgueova integrálu: **Jednoduchou funkcí v** M budeme nazývat každou konečnou nezápornou funkci f, měřitelnou v M, pro niž je množina $f(M)$ konečná.

[11]) Je-li ve znaku pro sjednocení, průnik a součet místo dolní meze jen k, znamená to, že k probíhá od 1 buď do nějakého přirozeného čísla, nebo do ∞.

Příkladem jednoduchých funkcí v $\mathbb{R}^p$ jsou funkce tvaru

$$f = \sum_{k=1}^{q} a_k \chi_{M_k}\,, \tag{54}$$

kde $q \in \mathbb{N}$, kde $M_1, \dots, M_q$ jsou měřitelné podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$ a kde $a_1, \dots, a_q$ jsou konečná nezáporná čísla.

Každá kladná hodnota $f(x)$ takové funkce má zřejmě tvar $a_{k_1} + \ldots + a_{k_r}$, kde k_j, $1 \le j \le r$, jsou právě všechny indexy, pro něž je $x \in M_{k_j}$, $a_{k_j} > 0$. Jsou-li množiny M_k disjunktní, je každá hodnota funkce (54) rovna některému z čísel $0, a_1, \dots, a_q$. $\square$

Nechť f jej jednoduchá funkce na množině $M \ne \emptyset$ a nechť $a_1 < \ldots < a_q$ jsou právě všechny její hodnoty; pak jsou množiny $M_k := f_{-1}(a_k)$, $1 \le k \le q$, neprázdné a disjunktní, a podle Cv. 19.7 navíc měřitelné. Jsou funkcí f určeny jednoznačně a jejich sjednocení je M. Funkci f lze opět napsat ve tvaru (54), *nyní jsou však sčítance vpravo určeny funkcí f jednoznačně – dokonce i co do pořadí.*

Rovnost (54) budeme za právě popsané situace nazývat **kanonický rozklad** nebo **kanonické vyjádření** jednoduché funkce f.

Cvičení 19.15. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $f_1, \dots, f_n$ jsou jednoduché funkce na množině M. Ověřte, že pak jsou jednoduché i funkce

$$\sum_{k=1}^{n} f_k\,, \quad \prod_{k=1}^{n} f_k\,, \quad \min\{f_k\,;\, 1 \le k \le n\}, \quad \max\{f_k\,;\, 1 \le k \le n\}. \tag{55}$$

* * *

Lebesgueův integrál budeme definovat ve čtyřech etapách.

I. Lebesgueův integrál jednoduché funkce. Je-li (54) kanonické vyjádření jednoduché funkce f v M, položíme

$$\int_M f := \sum_{k=1}^{q} a_k\, \mu(M_k)\,. \tag{56}$$

Integrál (56) je zřejmě nezáporné číslo. Je-li $\mu(M) = +\infty$, je $\mu(M_k) = +\infty$ pro jeden nebo několik indexů k; je-li $a_k > 0$ pro některý z těchto indexů k, je součet vpravo rovný $+\infty$, a totéž tedy platí i o levé straně.

Poznámka 19.4. Součet na pravé straně rovnosti (56) má celkem jednoduchý geometrický význam: Kdyby byla množina $M \subset \mathbb{R}^2$ sjednocením disjunktních kruhů M_k, byla by pravá strana (56) rovna součtu objemu válců o základnách M_k a výškách a_k. (Objemem „degenerovaného válce o výšce 0“ rozumíme 0.) Jak uvidíme později (viz V. 19.13), je k-tý sčítanec na pravé straně (56) roven $(p+1)$-rozměrné míře množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1}\,;\, x \in M_k, 0 \le y \le a_k\}$, tedy $(p+1)$-rozměrnému objemu válce, jehož základnou je nyní měřitelná množina M_k.

Cvičení 19.16. Dokažte, že

$$\int_M c = c\mu(M) \text{ pro každé } c \in \langle 0, +\infty\rangle \text{ a každé } M \in \mathcal{M}, \tag{57}$$

a to i v případě, že $c = 0$ a $\mu(M) = +\infty$. Dokažte dále, že

$$\mu(M) = 0 \Rightarrow \int_M f = 0 \text{ pro každou jednoduchou funkci } f \text{ v } M. \tag{58}$$

Věta 19.9. *Nechť f, g jsou jednoduché funkce v M; pak platí:*

$$f \leq g \text{ v } M \Rightarrow \int_M f \leq \int_M g; \tag{59}$$

$$N \in \mathcal{M},\ N \subset M \Rightarrow \int_N f \leq \int_M f; \tag{60}$$

$$\alpha \in \langle 0, +\infty),\ \beta \in \langle 0, +\infty) \Rightarrow \int_M (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_M f + \beta \int_M g; \tag{61}$$

$$A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{M},\ A \cap B = \emptyset,\ M = A \cup B \Rightarrow \int_M f = \int_A f + \int_B f. \tag{62}$$

II. Lebesgueův integrál měřitelné nezáporné funkce. K jeho definici potřebujeme dvě věty:

Věta 19.10. *Pro každou nezápornou funkci f měřitelnou v $M \subset \mathbb{R}^p$ existuje posloupnost jednoduchých funkcí f_k tak, že $f_k \nearrow f$ v M.*

Věta 19.11. *Jsou-li f_k, g_k jednoduché funkce v M, pro něž je $f_k \nearrow f$, $g_k \nearrow f$, je*

$$\lim_{k\to\infty} \int_M f_k = \lim_{k\to\infty} \int_M g_k. \quad \Box \tag{63}$$

Za situace z V. 19.10 je posloupnost $\{\int_M f_k\}$ (podle (59)) neklesající, a má tedy (konečnou nebo nekonečnou) limitu, kterou budeme moci prohlásit za integrál funkce f přes množinu M, protože podle V. 19.11 *nezávisí na bližší volbě posloupnosti* $\{f_k\}$.[12])

Definice. Je-li $f : M \to \langle 0, +\infty\rangle$ měřitelná funkce, položíme

$$\int_M f := \lim_{k\to\infty} \int_M f_k, \tag{64}$$

kde $\{f_k\}$ je (jakákoli) posloupnost jednoduchých funkcí, pro niž je $f_k \nearrow f$ v M. $\Box$

[12]) Až na případ $f \equiv 0$ existuje přitom k dané funkci f takových posloupností nekonečně mnoho.

Zobecnění je korektní, protože pro jednoduchou funkci f lze klást $f_k = f$ pro všechna k.

Protože zobecňování definice Lebesgueova integrálu bude ještě pokračovat, omezme se na tři tvrzení, která jsou zvláště jednoduchá pro nezáporné funkce, a na větu charakterizující geometrický význam Lebesgueova integrálu nezáporné (měřitelné) funkce:

Věta 19.12. 1. *Jsou-li nezáporné funkce f, g měřitelné v $M \subset \mathbb{R}^p$ a jsou-li α, β konečná nezáporná čísla, je*

$$\int_M (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_M f + \beta \int_M g \,. \tag{65}$$

2. *Je-li $\{M_k\}$ konečná nebo nekonečná posloupnost disjunktních měřitelných množin, je-li M sjednocení všech M_k a je-li f nezáporná funkce měřitelná v M, je*

$$\int_M f = \sum_k \int_{M_k} f \,. \tag{66}$$

3. *Jsou-li f_k nezáporné funkce měřitelné v M, platí implikace*

$$f_k \nearrow f \ \text{ v } M \Rightarrow \int_M f_k \nearrow \int_M f \,. \tag{67}$$

Poznámka 19.5. *V Lebesgueově teorii má každá nezáporná měřitelná funkce integrál* (který ovšem může mít i hodnotu $+\infty$); to je jedna z velice podstatných výhod např. proti *Riemannově teorii, v níž můžeme integrovat* (*přes omezené množiny M, jejichž hranice má míru* 0) *jen funkce omezené, jejichž množina bodů nespojitosti ležících v* $\operatorname{int} M$ *má míru* 0. [13])

P ř í k l a d : Dirichletovu funkci

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{l} 0 \ \text{ pro všechna } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \ \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{array} \right\}, \tag{68}$$

která nemá Riemannův integrál přes žádný jednorozměrný interval (protože je všude nespojitá), zintegrujeme lebesgueovsky velmi snadno třeba přes celé $\mathbb{R}$: Rozdělíme $\mathbb{R}$ na množinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel a množinu $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ všech iracionálních čísel. Integrál přes $\mathbb{Q}$ se rovná nule, protože $\mathbb{Q}$ má jakožto spočetná množina míru 0; přes $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ je integrál rovný nule, protože integrand je v ní identicky nulový.

Lebesgueův integrál Dirichletovy funkce přes $\mathbb{R}$ se tedy rovná 0 *a podobné tvrzení platí i pro její integrál přes jakoukoli měřitelnou množinu $M \subset \mathbb{R}$.*

[13]) Nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu je obsahem věty 161 z Jarníkovy knihy [13]. Uvážíme-li, že při „praktickém počítání“ se setkáváme jen s borelovskými množinami první třídy a s funkcemi druhé Bairovy třídy, vidíme, že (lebesgueovsky) integrovat nezápornou funkci můžeme „prakticky zcela bez obav“, že by snad integrál neexistoval.

Věta 19.13. (Geometrický význam integrálu.) *Pro každou nezápornou funkci f, měřitelnou v množině $M \subset \mathbb{R}^p$, je*

$$\int_M f = \mu_{p+1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1};\, x \in M,\, 0 \le y \le f(x)\}). \quad \square \tag{69}$$

Množině vpravo se říkává **množina pod grafem funkce** f, i když tento název plně nevystihuje její dosti složitý popis: *Je to množina všech bodů $(x,y) \in M \times \mathbb{R}$, které leží nad nadrovinou $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ prostoru $\mathbb{R}^{p+1}$, určenou jeho prvními p souřadnicovými osami, nebo na ní, a v případě, že $f(x) \in \mathbb{R}_+$, i pod grafem*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1};\, x \in M,\, y = f(x)\} \tag{70}$$

funkce f nebo na něm. [14])

III. Lebesgueův integrál obecné měřitelné funkce. Před dalším zobecněním definice integrálu je třeba zavést dva nové symboly: Je-li $x \in \mathbb{R}^*$, budeme čísla

$$x^+ := \max(x,0),\ x^- := \max(-x,0) \tag{71}$$

nazývat **kladná** a **záporná část čísla** x.

Obě jsou nezáporná, (aspoň) jedno z nich je rovno 0 a platí pro ně rovnosti

$$x = x^+ - x^-,\ |x| = x^+ + x^-. \tag{72}$$

Podobně pro funkce:

$$f^+ := \max(f,0),\ f^- := \max(-f,0) \tag{73}$$

je **kladná** a **záporná část funkce** f. *Je-li f definována v M, jsou tam definovány i funkce f^+, f^- a platí pro ně nejen analogie rovností (72), ale i toto tvrzení:*

(74) *Funkce f je měřitelná v M, právě když to platí o funkcích f^+ a f^-.*

Lebesgueův integrál přes množinu M obecné funkce f měřitelné v M je definován rovností

$$\int_M f := \int_M f^+ - \int_M f^-, \text{ má-li pravá strana této rovnosti smysl.} \tag{75}$$

(Zobecnění je korektní, protože $f \ge 0 \Rightarrow f^+ = f,\ f^- = 0$.)

Protože oba integrály na pravé straně (75) existují, *integrál vlevo neexistuje, právě když jsou oba integrály vpravo rovny $+\infty$. Je-li (aspoň) jeden z integrálů vpravo konečný, integrál vlevo existuje*; je-li konečný první (resp. druhý) z integrálů vpravo, je $\int_M f < +\infty$ (resp. $\int_M f > -\infty$).

[14]) Délka právě uvedeného popisu „množiny pod grafem funkce“ je jistě příčinou, proč se tento ne zcela výstižný, ale podstatně kratší název užívá.

Jak víme z V.19.12, jsou integrály na pravé straně (75), geometricky řečeno, $(p+1)$-rozměrné míry množin pod grafy funkcí f^+ a f^-; integrál vlevo existuje, dají-li se tyto míry odečíst, tj. je-li (aspoň) jedna z nich konečná.

Ještě trochu jinak: Rozložíme-li množinu M na množiny

$$M^+ := \{x \in M\,;\ f(x) \geq 0\} \ \text{ a } \ M^- := \{x \in M\,;\ f(x) \leq 0\},$$

je na pravé straně (75) rozdíl měr $\mu_{p+1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1}\,;\ x \in M^+, 0 \leq y \leq f(x)\})$ a $\mu_{p+1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1}\,;\ x \in M^-, 0 \geq y \geq -f(x)\})$ (tedy míry množiny pod grafem funkce $f\,|\,M^+$ a míry množiny „nad grafem“ funkce $f\,|\,M^-$). Obě míry lze odečíst, právě když je (aspoň) jedna z nich konečná.

4. Závěrečná zobecnění. Pro Lebesgueovu teorii integrálu je charakteristické, že v ní lze na většině míst zanedbávat množiny míry nula. Abychom se mohli účelně vyjadřovat, zavedeme několik nových pojmů.

Definice. Budeme říkat, že výrok $V(x)$ týkající se bodů prostoru $\mathbb{R}^p$ platí **skoro všude v množině** $M \subset \mathbb{R}^p$ (nebo: **pro skoro všechna** $x \in M$), existuje-li množina $N \subset M$ tak, že $\mu(N) = 0$ a že $V(x)$ platí pro každé $x \in M - N$. Slova „skoro všude“ a „skoro všechna“ budeme zpravidla zkracovat na „s. v.“.

Definice. Je-li $f(x) = g(x)$ pro s. v. $x \in M$, píšeme $f \sim g$ v M a říkáme, že f, g jsou **funkce ekvivalentní v** M.[15])

Definice. Symetrická diference množin A, B je definována rovností

$$\Delta(A,B) := (A - B) \cup (B - A)\,; \tag{76}$$

je-li $\mu(\Delta(A,B)) = 0$, budeme říkat, že **množiny** A, B jsou **ekvivalentní** a psát $A \sim B$. $\square$

Symetrická diference množin A, B je množina všech bodů, které leží právě v jedné z množin A, B; lze ji napsat i ve tvaru

$$\Delta(A,B) = (A \cup B) - (A \cap B)\,. \tag{76'}$$

Snadno nahlédneme, že *implikace*

$$A \in \mathcal{M},\ A \sim B \ \Rightarrow\ B \in \mathcal{M},\ \mu(A) = \mu(B) \tag{77}$$

platí pro každé dvě množiny $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^p$ a že *tvrzení*

$$f \text{ je měřitelná v } M,\ f \sim g \text{ v } M \ \Rightarrow\ g \text{ je měřitelná v } M\,, \tag{78}$$

$$f \sim g \text{ v } M,\ \int_M f \text{ existuje } \ \Rightarrow\ \int_M g \ \text{ existuje a rovná se } \int_M f \tag{79}$$

jsou platná pro všechny dvojice funkcí f, g definovaných všude v M.

[15]) Z definice je patrné, že (reflexivní, symetrická a tranzitivní) relace $f \sim g$ v M nevyžaduje, aby tyto dvě funkce byly definovány všude v M; stačí, aby byly definovány *skoro všude v M*.

Je-li funkce f definována s. v. v M, má množina M_1 všech bodů $x \in M$, v nichž není $f(x)$ definováno, míru 0. Rozšíříme-li funkci f z $M - M_1$ na M všemi možnými způsoby, jsou (podle (78)) jen tyto dvě krajní možnosti:
1) *všechna* rozšíření jsou funkce měřitelné v M;
2) *žádné* z nich není v M měřitelné.

Z toho je patrné, že je korektní toto **zobecnění definice měřitelné funkce**: Říkáme, že **funkce** f definovaná s. v. na měřitelné množině M je **měřitelná v** M, je-li *nějaké* její rozšíření na M měřitelné v M v dosavadním smyslu. $\square$

Z tvrzení (79) ihned plyne, že je korektní toto **zobecnění definice integrálu**: Nechť f je definována skoro všude na měřitelné množině M a nechť některé její rozšíření f^* na M má Lebesgueův integrál podle dosud platné definice; pak definujeme

(80) $$\int_M f := \int_M f^* . \quad \square$$

Poznámka 19.6. Je-li $M \subset \mathbb{R}$ interval s krajními body $a < b$, budeme užívat běžné označení

(81) $$\int_a^b f := \int_M f ;$$

protože jednobodové množiny mají míru 0, není nutné specifikovat, o jaký typ intervalu (otevřený, polouzavřený, uzavřený) se jedná. Kromě toho je užitečné zavést integrál od a do b i v případě, že $a \geq b$, a to takto:

(82) *Pro každou funkci f a pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ je* $$\int_a^a f := 0 .$$

(83) *Je-li $a > b$, je* $$\int_a^b f := -\int_b^a f ,$$ *existuje-li integrál vpravo.* $\square$

Zvlášť důležité jsou funkce, které mají *konečný* integrál; množina všech takových funkcí má proto i své (víceméně standardní) označení:

(84) $$\mathcal{L}(M) := \{ f \text{ je definována s. v. v } M ;\ \int_M f \in \mathbb{R} \} .$$

Pro stručnost zápisu lze užívat např. i označení

(85) $$\mathcal{L}^*(M) := \{ f \text{ je definována s. v. v } M ;\ \int_M f \text{ existuje} \} .$$

Je-li M celý prostor $\mathbb{R}^p$, píšeme místo $\mathcal{L}(M)$ a $\mathcal{L}^*(M)$ někdy jen $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$.

* * *

Integrál závisí na integrované funkci (neboli integrandu) a na integračním oboru; základní tvrzení o integrálu proto rozdělíme na dvě skupiny.

A. Integrál jako funkce integrandu:

Věta 19.14. *Jsou-li f, g funkce měřitelné v M, platí implikace*

$$f \le g \;\; s.v. \text{ v } M \Rightarrow \int_M f \le \int_M g\,, \text{ existují-li oba integrály.} \tag{86}$$

Speciálně:

$$f \ge 0 \;\; s.v. \text{ v } M \Rightarrow \int_M f \ge 0\,, \tag{86'}$$

přičemž

$$f \ge 0 \;\; s.v. \text{ v } M,\; \int_M f = 0 \Rightarrow f = 0 \;\; s.v. \text{ v } M. \tag{86''}$$

Důsledek. *Pro každé dvě funkce f, g měřitelné v M platí:*

$$f \le g \;\; s.v. \text{ v } M,\; \int_M g < +\infty \Rightarrow \int_M f < +\infty\,; \tag{87$^+$}$$

$$f \ge g \;\; s.v. \text{ v } M,\; \int_M g > -\infty \Rightarrow \int_M f > -\infty\,; \tag{87$^-$}$$

$$|f| \le g \;\; s.v. \text{ v } M,\; g \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(M),\; \Big|\int_M f\Big| \le \int_M |f| \le \int_M g\,; \tag{88}$$

$$f \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}(M)\,. \tag{89}$$

Vlastnost (89) se nazývá **absolutní konvergence** Lebesgueova integrálu; jak víme, *Newtonův integrál analogickou vlastnost nemá*, protože i pro spojitou funkci f může $(\mathcal{N})\int_a^b f$ existovat, aniž existuje $(\mathcal{N})\int_a^b |f|$. (Příklad: Newtonův integrál od 0 do $+\infty$ funkce $(\sin x)/x$ existuje, příslušný integrál z absolutní hodnoty neexistuje.)

Poznámka 19.7. Označíme-li $I_k := (k\pi, (k+1)\pi)$ pro každé celé číslo $k \ge 0$, je funkce $f(x) := (\sin x)/x$ v intervalu I_k kladná pro každé sudé k a záporná pro každé liché k; *Newtonův* integrál od 0 do $+\infty$ funkce f je roven součtu alternující řady $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f$, jejíž k-tý člen konverguje k nule. Newtonův integrál existuje proto, že se při sčítání řady každý člen se sudým indexem částečně ruší s následujícím lichým členem, a to tak, že limita $\sum_{k=0}^{n} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f$ (pro $n \to \infty$) je konečná.

Definice Lebesgueova integrálu (jakékoli funkce) je založena na tom, že nejdříve integrujeme kladnou část, pak zápornou část integrandu a druhý výsledek odečteme od prvního, pokud je to možné. V případě, který nyní vyšetřujeme, to odpovídá integraci přes sjednocení I^+ všech intervalů I_{2k} a integraci přes sjednocení I^- všech intervalů I_{2k+1}. Protože je

$$\int_{I_{2k}} \frac{\sin x}{x}\,dx \ge \frac{2}{(2k+1)\pi}\,, \quad \int_{I_{2k+1}} \frac{-\sin x}{x}\,dx \ge \frac{2}{(2(k+1))\pi}$$

pro každé celé $k \ge 0$, jsou příslušné řady divergentní, takže $\int_{I^+} f = \int_{I^-} f = +\infty$.

Z toho plyne, že

$$(90) \qquad (\mathcal{L})\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \ \ \textit{neexistuje}, \quad (\mathcal{L})\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = +\infty\,;$$

písmeno $\mathcal{L}$ před integrály samozřejmě znamená, že jde o Lebesgueovy integrály, písmeny $\mathcal{N}$ a $\mathcal{R}$ od nich odlišíme integrály Newtonovy a Riemannovy. □

Z V. 19.14 ihned plynou tato dvě velmi často užívaná tvrzení:

(91) *Je-li f měřitelná a omezená na množině M konečné míry, je $f \in \mathcal{L}(M)$.*

(92) *Je-li f měřitelná a omezená v M a je-li $g \in \mathcal{L}(M)$, je i $fg \in \mathcal{L}(M)$.*

* * *

Tzv. (konečná) **aditivita integrálu** vzhledem k integrandu a **linearita integrálu** jsou obsahem tohoto tvrzení:

Věta 19.15. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je*

$$(93) \qquad \int_M \Big(\sum_{k=1}^n f_k\Big) = \sum_{k=1}^n \int_M f_k\,, \ \ \textit{má-li pravá strana rovnosti smysl.}$$

Obecněji: Jsou-li $c_1, \ldots, c_n$ konečná reálná čísla, je

$$(94) \quad \int_M \Big(\sum_{k=1}^n c_k f_k\Big) = \sum_{k=1}^n \Big(c_k \int_M f_k\Big), \ \textit{má-li pravá strana rovnosti smysl.} \quad \square$$

V Lebesgueově teorii hrají důležitou úlohu limitní přechody za znamením integrálu; následující věta jedná o **monotónních limitních přechodech**, další věta o tzv. **majorizovaném limitním přechodu**.

Věta 19.16. *Nechť funkce f_k jsou měřitelné v M; pak platí:*

$$(95) \qquad f_k \nearrow f \ \text{ s.v. v } M, \ \int_M f_1 > -\infty \Rightarrow \int_M f_k \nearrow \int_M f\,;$$

$$(96) \qquad f_k \searrow f \ \text{ s.v. v } M, \ \int_M f_1 < +\infty \Rightarrow \int_M f_k \searrow \int_M f\,.$$

Věta 19.17. *Nechť funkce f_k jsou měřitelné v M a nechť existuje funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $|f_k| \le g$ s.v. v M. Pak*

$$(97) \qquad f_k \to f \ \text{ s.v. v } M \Rightarrow \int_M f_k \to \int_M f\,. \quad \square$$

Funkce g se v kontextu vět, jako je V. 19.17, nazývá **integrovatelná majoranta** posloupnosti funkcí f_k; protože v této souvislosti slovo „integrovatelná“ znamená, že má *konečný* integrál, budeme raději mluvit o „**majorantě z** $\mathcal{L}(M)$“ nebo krátce „**z** $\mathcal{L}$“, je-li zřejmé, o kterou množinu M jde. [16])

Poznámka 19.8. Pozorný čtenář si jistě všiml, že výrok „pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $|f_k| \le g$ s.v. v M“ by mohl mít dvě interpretace:

A. Pro každé k existuje množina N_k míry 0 tak, že nerovnost $|f_k(x)| \le g(x)$ platí pro všechna $x \in M - N_k$.

B. Existuje množina N míry 0 tak, že nerovnost $|f_k(x)| \le g(x)$ platí pro všechna $x \in M - N$ a všechna k.

To je samozřejmě pravda; protože však sjednocení spočetně mnoha množin míry nula je množina míry nula, jsou výroky A a B ekvivalentní. (Výrok B je jen *zdánlivě* silnější; abychom jej dokázali pomocí výroku A, stačí položit $N := \bigcup_k N_k$.)

Poznámka 19.9. Ani jedna z předcházejících dvou vět nemá v Riemannově teorii obdobu, ani kdybychom např. doplnili předpoklad, že všechny zúčastněné funkce jsou omezené a že M je kompaktní jednorozměrný interval.

P ř í k l a d : Srovnejme všechna racionální čísla z intervalu $I = \langle 0, 1\rangle$ do prosté posloupnosti $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ a definujme posloupnost funkcí $f_k : I \to \mathbb{R}$ podmínkami $f_k(x) := 1$, je-li $x \in \{r_1, \dots, r_k\}$, a $f_k(x) := 0$ jinak.

Pak je $f_k \nearrow f$, kde f je Dirichletova funkce; jde přitom zároveň o majorizovanou posloupnost, protože $|f_k| \le 1$ v I pro všechna k a $\int_0^1 1 = 1$. Čtenář, který zná Riemannův integrál, ihned vidí, že je $\int_0^1 f_k = 0$ pro každé k, zatímco funkce f integrál nemá. V Lebesgueově teorii je vše v pořádku, protože jak funkce f_k, tak i funkce f mají přes I integrál rovný nule. $\square$

Přímým důsledkem vět o limitním přechodu za znamením integrálu jsou mj. tato tvrzení o **integraci řad člen po členu**:

Věta 19.18. *Nechť posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *funkcí měřitelných v* M *splňuje buď podmínku*

$$f_k \ge 0 \ \text{ s.v. v } M \text{ pro všechna } k\,, \tag{98}$$

nebo nechť

$$\text{existuje funkce } g \in \mathcal{L}(M) \text{ tak, že } \Big|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big| \le g \ \text{ s.v. v } M \text{ pro všechna } n\,; \tag{99}$$

pak je

$$\int_M \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k\,. \quad \square \tag{100}$$

[16]) Na rozdíl od některých cizích jazyků nemá čeština krátký název pro funkce mající konečný integrál, zatímco např. ve francouzštině slova „intégrable“ a „sommable“ dovolují obě podmínky – existenci a konečnost – jednoduše odlišit. V češtině je logické spojovat slovo „integrovatelná“ (funkce) s *existencí* integrálu, nikoli s jeho konečností. Snažme se proto vyvarovat nedorozumění.

Mezi věty o integraci řady člen po členu patří i následující tvrzení, které je zároveň jedním z **integrálních kritérií konvergence řady funkcí**.

Věta 19.19. *Je-li* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *posloupnost funkcí měřitelných v* M *a je-li*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f_k| < +\infty\,, \tag{101}$$

konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *absolutně s. v. v* M*, její součet leží v* $\mathcal{L}(M)$ *a platí rovnost*

$$\int_M \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k\,. \tag{102}$$

B. Integrál jako funkce integračního oboru:

Věta 19.20. *Je-li* $N \subset M$ *měřitelná množina a existuje-li* $\int_M f$*, platí tato tvrzení:*

$$\int_M f < +\infty \Rightarrow \int_N f < +\infty\,, \quad \int_M f > -\infty \Rightarrow \int_N f > -\infty\,, \tag{103}$$

$$f \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(N)\,, \tag{104}$$

$$f \geq 0 \ \text{s.v. v} \ M \Rightarrow \int_N f \leq \int_M f\,. \tag{105}$$

Vlastnost (105) Lebesgueova integrálu se někdy nazývá **monotonie integrálu nezáporné funkce vzhledem k integračnímu oboru**.

Věta 19.21. *Je-li* $n \in \mathbb{N}$ *a je-li* M *sjednocením disjunktních měřitelných množin* $M_1, \ldots, M_n$*, je*

$$\int_M f = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_k} f\,, \ \text{má-li jedna strana rovnosti smysl.} \tag{106}$$

Důsledek. *Je-li* $M \in \mathcal{M}$*, je-li* f *definována s. v. v* M *a položíme-li* $f(x) := 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}^p - M$*, je*

$$\int_M f = \int_{\mathbb{R}^p} f\,, \ \text{má-li jedna strana rovnosti smysl.} \quad \square \tag{107}$$

Hlavní část V. 19.21 popisuje tzv. (konečnou) **aditivitu integrálu** vzhledem k integračnímu oboru. V následující větě bude množin M_k spočetně mnoho a příslušné tvrzení se nazývá σ-**aditivita integrálu**. Pozor však! *Předpoklady pro platnost rovnosti* (108) *nejsou již symetrické vůči oběma stranám rovnosti, jak tomu bylo v případě rovnosti* (106)!

Věta 19.22. *Nechť* $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je posloupnost disjunktních měřitelných množin a nechť* M *je jejich sjednocením. Pak je*

$$\int_M f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f\,, \text{ existuje-li integrál vlevo.} \tag{108}$$

Poznámka 19.10. *K existenci* $\int_M f$ *nestačí, aby měla smysl pravá strana rovnosti* (108); *ani když je součet vpravo roven nule, nemusí integrál vlevo existovat!*

P ř í k l a d : Buď $M_k := (k, k+1\rangle$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ nechť je $f \equiv 1/k$ v M_{2k-1} a $f \equiv -1/k$ v M_{2k}. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ pak je

$$\int_{2k-1}^{2k} f = \frac{1}{k}\,, \quad \int_{2k}^{2k+1} f = -\frac{1}{k}\,, \quad \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{M_k} f = \frac{1}{n}\,, \quad \sum_{k=1}^{2n} \int_{M_k} f = 0\,,$$

takže $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f = 0$. Integrál z funkce f^+ (resp. f^-) přes interval $M = (1, +\infty)$, který je sjednocením všech intervalů M_k, $k \in \mathbb{N}$, je roven součtu integrálů této funkce přes všechny množiny M_{2k-1} (resp. M_{2k}), tj. součtu $+\infty$ harmonické řady. Lebesgueův integrál funkce f přes M tedy neexistuje. (Snadno přitom nahlédneme, že příslušný Newtonův integrál existuje a je roven nule.)

Poznámka 19.11. Riemannovým integrálem se zde sice nezabýváme, ale pro čtenáře, který jej zná (i ve vícerozměrných eukleidovských prostorech), uveďme toto důležité tvrzení (věta 157 z [13]):

$$\textit{Existuje-li } (\mathcal{R}) \int_M f, \textit{ existuje i } (\mathcal{L}) \int_M f \textit{ a oba integrály mají touž hodnotu.}$$

Lebesgueův integrál je tedy zobecněním integrálu Riemannova; *není však zobecněním tzv. zobecněného Riemannova integrálu ani integrálu Newtonova!* (Příklad jsme již uvedli: Funkce $(\sin x)/x$ má Newtonův i zobecněný Riemannův integrál od 0 do $+\infty$, ale příslušný Lebesgueův integrál neexistuje.)

Riemannův integrál se skoro nikdy nepočítá podle definice, ale jako integrál Newtonův, protože platí: *Existuje-li Riemannův i Newtonův integrál funkce* f *od* a *do* b, *mají oba integrály touž hodnotu*. Podobně je to s Lebesgueovým integrálem; k jeho výpočtu přes jednorozměrný interval lze často užít toto závažné tvrzení:

$$\textit{Rovnost } (\mathcal{L}) \int_a^b f = (\mathcal{N}) \int_a^b f \textit{ platí, existují-li oba integrály.} \tag{109}$$

V jednoduchých případech nebude tedy výpočet Lebesgueova integrálu přes jednorozměrný interval činit potíže. *Jak se však počítá vícerozměrný Lebesgueův integrál?*

Zásadní význam při řešení této otázky mají dvě tvrzení: *Fubiniho věta* a *věta o substituci*. V Lebesgueově teorii mají celkem jednoduchý a dobře aplikovatelný tvar, zatímco v Riemannově teorii bychom jednoduchou a dobře aplikovatelnou verzi těchto vět hledali marně.

Abychom mohli první z uvedených vět vyslovit v přehledném tvaru, je třeba zavést řadu označení a úmluv:

1. Prostor $\mathbb{R}^{p+q}$ ztotožníme s kartézským součinem $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ a v souvislosti s tím budeme body $z \in \mathbb{R}^{p+q}$ psát ve tvaru

$$z = (x, y), \text{ kde } x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \; y = (y_1, \ldots .y_q) \in \mathbb{R}^q . \tag{110}$$

Protože nyní budeme pracovat ve třech eukleidovských prostorech $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ a $\mathbb{R}^{p+q}$ s příslušnými mírami, budeme muset dávat někdy větší pozor na výroky závislé na míře. Pokud by hrozilo nedorozumění, budeme proto říkat např. „μ_p-měřitelná množina“ místo podrobnějšího „množina obsažená v $\mathbb{R}^p$ a měřitelná při míře μ_p“; „výrok V platí μ_{p+q}-skoro všude v M“ bude znamenat, že „výrok $V(x)$ platí pro všechna $x \in M - N$, kde $M \cup N \subset \mathbb{R}^{p+q}$ a $\mu_{p+q}(N) = 0$“.

Integrál funkce f resp. g přes množinu $A \subset \mathbb{R}^p$ resp. $B \subset \mathbb{R}^q$ budeme často značit

$$\int_A f(x)\,dx \quad \text{resp.} \quad \int_B g(y)\,dy .$$

2. Je-li $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$, označíme

$$M_{p\leftarrow} := \{x \in \mathbb{R}^p;\, \text{existuje } y \in \mathbb{R}^q \text{ tak, že } (x, y) \in M\}, \tag{111}$$

$$M_{\to q} := \{y \in \mathbb{R}^q;\, \text{existuje } x \in \mathbb{R}^p \text{ tak, že } (x, y) \in M\} \tag{112}$$

(ortogonální) **průměty** množiny M do prostoru $\mathbb{R}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$ (prvních p resp. posledních q souřadnic). Pro každé $y \in \mathbb{R}^q$ a každé $x \in \mathbb{R}^p$ kromě toho položíme

$$M(\cdot, y) := \{x \in \mathbb{R}^p;\, (x, y) \in M\} \text{ a } M(x, \cdot) := \{y \in \mathbb{R}^q;\, (x, y) \in M\} . \tag{113}$$

Nazveme-li **řezem** množiny M příslušným k y (resp. k x) průnik množiny M s nadrovinou $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q};\, x \in \mathbb{R}^p\}$ (resp. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q};\, y \in \mathbb{R}^q\}$) dimenze p (resp. q), rovnoběžnou s nadrovinou generovanou p prvními (resp. q posledními) souřadnicovými osami, je první (resp. druhá) z množin (113) ortogonálním průmětem tohoto řezu do $\mathbb{R}^p$ (resp. do $\mathbb{R}^q$).

(114) *Množina $M(\cdot, y)$ (resp. $M(x, \cdot)$) je neprázdná, právě když je neprázdný příslušný řez a také právě když je $y \in M_{\to q}$ (resp. $x \in M_{p\leftarrow}$).*

3. Pro každou funkci f proměnných x, y (tj. pro každé zobrazení z $\mathbb{R}^{p+q}$ do $\mathbb{R}^*$) budeme definovat funkce $f(\cdot, y)$ a $f(x, \cdot)$ takto: Při každém pevném $y \in \mathbb{R}^q$ je

$$(f(\cdot, y))(x) := f(x, y) \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}^p, \text{ pro něž má pravá strana smysl}, \tag{115}$$

a při každém pevném $x \in \mathbb{R}^p$ je

$$(f(x, \cdot))(y) := f(x, y) \text{ pro všechna } y \in \mathbb{R}^q, \text{ pro něž má pravá strana smysl}; \tag{116}$$

některé z těchto funkcí mohou mít samozřejmě prázdný definiční obor.

Věta 19.23. *Platí tato tvrzení:*

1. *Kartézský součin měřitelných množin $A \subset \mathbb{R}^p$ a $B \subset \mathbb{R}^q$ je měřitelný, přičemž*

$$\mu_{p+q}(A \times B) = \mu_p(A) \cdot \mu_q(B). \tag{117}$$

2. *Pro každou μ_{p+q}-měřitelnou množinu $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ jsou μ_q-skoro všechny množiny $M(\cdot, y) \subset \mathbb{R}^p$ a μ_p-skoro všechny množiny $M(x, \cdot) \subset \mathbb{R}^q$ měřitelné, přičemž*

$$\mu_{p+q}(M) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu_p(M(\cdot, y))\, dy = \int_{\mathbb{R}^p} \mu_q(M(x, \cdot))\, dx. \tag{118}$$

3. *Rovnost $\mu_{p+q}(M) = 0$ platí, právě když je $\mu_p(M(\cdot, y)) = 0$ pro μ_q-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ a také právě když je $\mu_q(M(x, \cdot)) = 0$ pro μ_p-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$.*

4. *Nechť f je měřitelná v množině $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$. Pak je funkce $f(\cdot, y)$ měřitelná v $M(\cdot, y)$ pro μ_q-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ a funkce $f(x, \cdot)$ je měřitelná v $M(x, \cdot)$ pro μ_p-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$.*

5. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^p$ měřitelná množina a je-li $f = (f_1, \dots, f_q) : A \to \mathbb{R}^q$ funkce, jejíž všechny složky $f_k : A \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné, je $\mu_{p+q}(\mathrm{gr}\, f) = 0$.*

Poznámka 19.12. Názorný význam první rovnosti (118) možná lépe vynikne, nahradíme-li množiny $M(\cdot, y)$ příslušnými řezy: Pro každé $y \in \mathbb{R}^q$ nejdříve „přenesme" míru μ_p z $\mathbb{R}^p$ do nadroviny $N(y) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q};\ x \in \mathbb{R}^p\}$ tím, že definujeme $\nu(W) := \mu_p(W_{p\leftarrow})$ pro každou množinu $W \subset N(y)$, jejíž průmět $W_{p\leftarrow}$ do $\mathbb{R}^p$ je měřitelný. Je-li $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$, je pak $\mu_p(M(\cdot, y))$ rovno $\nu(M(y))$, kde $M(y)$ znamená řez množiny M příslušný k y, a míru množinu M získáme integrací („podle y přes $\mathbb{R}^q$") měr $\nu(M(y))$ řezů množiny M. (Podobně pro druhou z rovností (118).)

P ř í k l a d . Je-li $M := U((0, 0), 1)$ (otevřený jednotkový kruh v rovině), lze jeho obsah získat takto: Uvážíme především, že řez kruhu M příslušný k y je prázdný (takže $\nu(M(y)) = 0$), je-li $|y| \geq 1$. Je-li naopak $|y| < 1$, je řez (otevřená) úsečka s krajními body $(\pm\sqrt{1 - y^2}, y)$, takže nyní je $\nu(M(y)) = 2\sqrt{1 - y^2}$. Integrace funkce $\nu(M(y))$ přes $\mathbb{R}$ se redukuje na integraci přes interval $(-1, 1)$ a její výsledek $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - y^2}\, dy = \pi$ je hledaný obsah kruhu M. (Vidíme přitom, že „přenášení" měr z méněrozměrného prostoru do prostoru větší dimenze není např. v geometrii nic neobvyklého: Délku úsečky definujeme jako vzdálenost jejích krajních bodů v prostoru jakékoli dimenze.)

Příklad 19.5. V rovině mají nulovou míru např. všechny přímky (a tím spíše všechny polopřímky a úsečky), všechny kuželosečky, lemniskata, ale např. také kartézský součin Cantorova diskontinua s $\mathbb{R}$ a grafy všech měřitelných reálných funkcí jedné proměnné.

V $\mathbb{R}^3$ mají nulovou míru nejen všechny roviny a přímky (a jejich části), ale i všechny kvadriky (sféry, pláště válců a kuželů, paraboloidy, hyperboloidy) a např. i množiny $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q}$, Cantorovo diskontinuum kartézsky násobené $\mathbb{R}^2$ a grafy všech měřitelných reálných funkcí dvou proměnných, stejně jako grafy všech měřitelných zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$.

Věta 19.24. (Fubiniho věta.) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ a nechť existuje integrál $\int_M f$. Pak pro μ_p-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ resp. pro μ_q-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ existuje integrál*

$$G(x) := \int_{M(x,\cdot)} f(x,\cdot) \quad \textit{resp.} \quad H(y) := \int_{M(\cdot,y)} f(\cdot,y) \tag{119}$$

a platí rovnosti

$$\int_M f = \int_{\mathbb{R}^p} G = \int_{\mathbb{R}^q} H\,. \tag{120}$$

Dodatek. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^p$ resp. $B \subset \mathbb{R}^q$ měřitelná množina obsahující průmět $M_{p\leftarrow}$ resp. $M_{\to q}$ množiny M do $\mathbb{R}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$, je*

$$\int_M f = \int_A G \quad \textit{resp.} \quad \int_M f = \int_B H\,. \tag{121}$$

Poznámka 19.13. V teorii musíme být opatrní, protože např. ortogonální průmět μ_2-měřitelné množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ do osy x nemusí být μ_1-měřitelný: Stačí zvolit nějakou neměřitelnou množinu $N \subset \mathbb{R}$ a definovat $M := \{(x,x) \in \mathbb{R}^2;\, x \in N\}$. Protože M je částí přímky o rovnici $y = x$, je $\mu_2(M) = 0$; M je tedy μ_2-měřitelná množina, jejíž ortogonální průmět N do osy x je μ_1-neměřitelný.

V početní praxi však většinou integrujeme přes množiny $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$, jejichž hranice má míru 0; pak je

$$\int_M f = \int_{\operatorname{int} M} f\,, \quad \textit{existuje-li jeden z integrálů},$$

a průměty otevřené množiny $\operatorname{int} M$ (do $\mathbb{R}^p$ i do $\mathbb{R}^q$) jsou zřejmě otevřené. *Místo přes množiny A, B lze pak ve* (121) *integrovat přímo přes průměty $M_{p\leftarrow}$ a $M_{\to q}$.*

Poznámka 19.14. Tvrzení vyslovená ve větě 19.24 jsou sice po formální stránce zcela korektní, ale v početní praxi, kdy jsou integrandy dány „předpisy“ resp. „vzorci“, kterými se hodnoty funkcí vypočítávají z hodnot „nezávisle proměnných“ x, y, dáváme přednost stručnějšímu znění a názornějšímu zápisu:

Je-li ortogonální průmět $M_{p\leftarrow}$ resp. $M_{\to q}$ množiny $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ do prostoru $\mathbb{R}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$ měřitelný, je

$$\iint_M f(x,y)\,dxdy = \int_{M_{p\leftarrow}} \Big(\int_{M(x,\cdot)} f(x,y)\,dy \Big) dx\,, \quad \textit{existuje-li integrál vlevo}, \tag{122_1}$$

resp.

$$\iint_M f(x,y)\,dxdy = \int_{M_{\to q}} \Big(\int_{M(\cdot,y)} f(x,y)\,dx \Big) dy\,, \quad \textit{existuje-li integrál vlevo}. \tag{122_2}$$

Integrál vlevo se nazývá **dvojný**, integrály vpravo jsou **dvojnásobné**. Nedělitelný symbol $dxdy$ vlevo znamená, že integrál je dvojný a integrační proměnné se jmenují

x, y. Symboly dx, dy na pravých stranách ukazují, „podle které proměnné zrovna integrujeme". V prvním případě tedy funkci $f(x, y)$ integrujeme nejdříve podle y při pevném, ale libovolném $x \in M_{p\leftarrow}$ přes příslušnou množinu $M(x, \cdot)$ a výsledky těchto integrací pak zintegrujeme podle x přes průmět $M_{p\leftarrow}$ množiny M do $\mathbb{R}^p$.

Podobně lze samozřejmě popsat dvojnásobnou integraci i ve druhém případě; vymění se jen x a y.

POZOR VŠAK! *Pro platnost rovností* (122_1) *a* (122_2) *je* (*v obou případech*) *podstatné, že existuje integrál vlevo; existence integrálů vpravo nestačí!*

Příklad 19.6. Položme

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{123}$$

a vypočítejme oba dvojnásobné integrály přes otevřený čtverec $M := (0, 1) \times (0, 1)$. Snadno zjistíme, že

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = \frac{1}{1 + x^2}\,, \quad \int_0^1 f(x, y)\, dx = -\frac{1}{1 + y^2}\,; \tag{124}$$

z toho je patrné, že

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dy \Big) dx = \frac{\pi}{4}\,, \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dx \Big) dy = -\frac{\pi}{4}\,. \tag{125}$$

Protože dvojnásobné integrály mají různé hodnoty, dvojný integrál neexistuje.

Tento velice jednoduchý příklad (v němž je integrand racionální funkce dvou proměnných, spojitá v integračním oboru) by proto měl být důrazným varováním – předpoklady aplikovaných vět se vyplácí ověřovat! [19]) „Prakticky" je ovšem třeba dát pozor jen na integraci funkcí měnících znaménko, protože integrál z měřitelné nezáporné (resp. nekladné) funkce přes měřitelnou množinu existuje vždy.

Cvičení 19.17. Dokažte (přímým výpočtem), že dvojný integrál z předcházejícího příkladu neexistuje proto, že integrand je v otevřeném trojúhelníku s vrcholy (0,0), (1,0), (1,1) kladný, přičemž příslušný integrál je roven $+\infty$, zatímco integrál přes otevřený trojúhelník s vrcholy (0,0), (0,1), (1,1), v němž je integrand záporný, je roven $-\infty$. (Důsledek: $\int_M f^+ = \int_M f^- = +\infty$.)

[19]) Vzpomínám si, že kdysi dávno skupina vysokoškolských učitelů, uctívačů (bezduchého) kalkulu, diskutovala o otázce, čemu že se vlastně v tomto případě rovná integrál funkce f přes M: Prvnímu, nebo druhému výsledku ze (125), nebo snad jejich aritmetickému průměru? Nezbývá než doufat, že se podobné „problémy" již na vysokých školách neřeší. V současné době je však třeba *dát pozor při integraci pomocí počítačových programů*, protože např. dvojná integrace se v nich nahrazuje dvojnásobnou; omezíme-li se tedy např. na první z integrálů (125), ujde nám, že druhý se mu nerovná, a nezjistíme, že dvojný integrál vůbec neexistuje. Je to ovšem ještě daleko horší: *Ani když se oba dvojnásobné integrály nějaké funkce rovnají* 0, *neplyne z toho existence integrálu dvojného!* (Stačí zvolit funkci $f(x, y) \cdot \operatorname{sgn} x$ místo funkce (123) a integrovat přes $(-1, 1) \times (0, 1)$.)

Poznámka 19.15. Aplikaci Fubiniho věty lze ovšem (v případě, že $p+q \geq 3$) opakovat tak dlouho, až dostaneme samé jednorozměrné integrály (které pak můžeme počítat jako integrály Newtonovy, jsou-li splněny příslušné podmínky). Podobně jako při integraci přes množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ rozlišujeme dvojný a dvojnásobný integrál, mluvíme v případě množiny $M \subset \mathbb{R}^3$ o integrálu **trojném** a **trojnásobném**.

Příklad 19.7. Vypočítejme trojný integrál

$$\iiint\limits_M (x^2 + y^2)\, dxdydz\,, \text{ kde } M := \{(x,y,z);\, x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1 - x\}\,, \tag{126}$$

který má fyzikální význam momentu setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa M (s hustotou rovnou 1), kde M je – geometricky řečeno – válec $x^2 + y^2 \leq 1$ „seříznutý“ rovinami $z = \pm(1-x)$ (jejichž poloroviny, určené nerovností $x \leq 1$, tvoří „klín“).

Konstatujme především, že M je kompaktní množina a že integrand je spojitá nezáporná funkce; integrál tedy jistě existuje. Trojrozměrnou integraci rozdělíme na dvojrozměrnou (vně) a jednorozměrnou (uvnitř). Průmětem množiny M do roviny xy je kruh $K := \{(x,y);\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, protože pro každý bod $(x,y) \in K$ je např. $(x,y,0) \in M$, ale žádný bod (x,y,z), pro nějž je $x^2+y^2 > 1$, v M zřejmě neleží. Je-li $(x,y) \in K$, je $|x| \leq 1$ a bod (x,y,z) leží v M, právě když je $-(1-x) \leq z \leq 1-x$.

Dvojný integrál přes K převedeme v dalším kroku na dvojnásobný; průmětem množiny K do osy x je interval $\langle -1, 1 \rangle$ a řez příslušný číslu x z tohoto intervalu je charakterizován nerovnostmi $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.[20])

Integrál (126) se tedy rovná[21])

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \Big(\int_{x-1}^{1-x} (x^2+y^2)\, dz \Big)\, dxdy = 2 \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)(1-x)\, dxdy \tag{127}$$

a to je dále rovno

$$2 \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)(1-x)\, dy \Big) dx = \tag{127'}$$

$$\tfrac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-x)\sqrt{1-x^2}\, (1+2x^2)\, dx = \pi\,,$$

jak čtenář, který naše výsledky přepočítává, po jisté námaze jistě také zjistil.[22])

* * *

[20]) Množiny M a K z tohoto příkladu si lze velmi dobře představit a geometrický názor nám pomůže najít i potřebné průměty a řezy; protože však u složitějších množin, daných nerovnostmi, geometrická představa často selhává, je vhodné učit se průměty a řezy hledat „aritmeticky“, pouze na základě příslušných nerovností a podle definice průmětů a řezů.

[21]) Aby se nezaváděla zbytečná nová označení, často se podmínka nebo podmínky, které integrační obor definují, píší přímo pod integrál.

[22]) Vypočítat poslední integrál (asi substitucí $x = \sin t$) chvilku trvá; za chvíli se však vrátíme ke druhému z integrálů (127) a ukážeme, jak lze postupovat ekonomičtěji. (V této chvíli nemáme k dispozici potřebný nástroj – větu o substituci pro vícerozměrné integrály.)

Protože věta o substituci operuje s difeomorfismy, je důležité vědět, že jak měřitelnost množiny, tak i měřitelnost funkce je vůči nim invariantní a že obrazy (i vzory, protože zobrazení inverzní k difeomorfismu je také difeomorfní) množin míry 0 mají také míru 0:

Věta 19.25. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a je-li $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ difeomorfismus, platí tato tvrzení:*

1. *Je-li $X \subset \Omega$ měřitelná množina, je i množina $\Phi(X)$ měřitelná.*

2. *Je-li $X \subset \Omega$, $\mu_p(X) = 0$, je i $\mu_p(\Phi(X)) = 0$.*

3. *Je-li funkce f měřitelná v množině $Y \subset \Phi(\Omega)$, je funkce $f \circ \Phi$ měřitelná v množině $\Phi_{-1}(Y)$.*

Věta 19.26. (Věta o substituci.) *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a je-li $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ difeomorfismus, platí tato dvě tvrzení:*

$$(128) \quad M \subset \Omega \Rightarrow \int\limits_{\Phi(M)} f = \int\limits_{M} (f \circ \Phi) \, |\det \Phi'| \,, \text{ má-li jedna strana rovnosti smysl;}$$

$$(129) \quad N \subset \Phi(\Omega) \Rightarrow \int\limits_{N} f = \int\limits_{\Phi_{-1}(N)} (f \circ \Phi) \, |\det \Phi'| \,, \text{ má-li jedna strana rovnosti smysl.}$$

Poznámka 19.16. Pro „výpočetní praxi“ je důležité promyslit si tyto principy:

1. Protože rovnosti (128) a (129) platí, má-li jedna jejich strana smysl, *nemusíme ověřovat existenci integrálů vlevo, tedy před substitucí.* Substituci přirozeně provádíme proto, aby se integrál zjednodušil, a *stačí, abychom ověřili existenci integrálu vpravo*, tedy integrálu, u něhož by ověření mělo být jednodušší. Nelze pochopitelně vyloučit, že substituce prokáže *neexistenci* integrálu vlevo (viz např. Cv. 19.50).

2. *Není nutné, aby integrály v* (128) *a* (129) *byly konečné*, věta 19.26 nic podobného nežádá. To je prakticky důležité zejména v případě, že integrujeme měřitelnou nezápornou funkci (např. majorantu jiné funkce), která má (konečný nebo nekonečný) integrál vždy; teprve po aplikaci Fubiniho věty nebo věty o substituci se leckdy dodatečně dozvíme, zdali integrál konverguje nebo ne. [23])

Vše, co bylo právě uvedeno, platí samozřejmě jen *za předpokladu, že substituující funkce Φ i množina M resp. N splňuje předpoklady věty o substituci.* □

---

[23]) Učebnic a monografií zabývajících se integrály je velmi mnoho a jejich kvalita není stejná. Integrální počet pojatý jako kalkulus se o přesné znění vět mnohdy nestará a jen počítá a počítá. Monografie o teorii integrálu se spíše zabývají elegantním zavedením definic, odvozováním vlastností různých integrálů a porovnáváním jejich existence, než aby čtenáři dávaly návody, jak počítat konkrétní příklady. V případě Lebesgueova integrálu se autoři často omezují na konečné integrály, protože se s nimi daleko jednodušeji pracuje. Máme-li však při aplikaci Fubiniho věty a věty o substituci nejdříve dokazovat, že počítaný integrál je konečný, můžeme mít značné potíže. Pro čtenáře jsou proto asi nejcennější knihy, v nichž se podle vyložené teorie dobře počítá. Jsem přesvědčen, že knihou, v níž jsou metody výpočtu Lebesgueových integrálů vyloženy vynikajícím způsobem, je Jarníkova učebnice [13], v níž jsou patrně poprvé v celosvětové literatuře obě citované věty dokázány *bez předpokladu konečnosti příslušných integrálů.* A jen takto formulované věty umožňují v řadě případů výpočet kvalifikovaně odstartovat.

Stejně jako je pro výpočet jednorozměrných integrálů nutné znát některé běžné substituce, ani v případě vícerozměrných integrálů se bez explicitní znalosti některých difeomorfismů Φ neobejdeme [24]); u nejčastěji užívaných difeomorfismů se vyplatí pamatovat si i determinanty příslušných matic Φ'.

Příklad 19.8. *Permutace souřadnic* je jedním z nejjednodušších difeomorfismů $\mathbb{R}^p$ na $\mathbb{R}^p$. Je to zobrazení definované rovností

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p) := (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}), \tag{130}$$

kde p-tice $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ je permutací p-tice $(1, 2, \ldots, p)$. Je pak $\det \Phi' = \pm 1$ a tato rovnost značně zjednodušuje pravé strany rovností (128) – (129). Protože permutaci souřadnic lze provést v každém integrálu, který existuje, je zřejmé, že *při převádění vícerozměrného integrálu na integrály méněrozměrné nezáleží na pořadí proměnných, podle nichž se postupně integruje.*

Ve Fubiniho větě samé není tedy nutné, aby se $p + q$ souřadnic bodů $z \in \mathbb{R}^{p+q}$ rozdělovalo na p-tici prvních a q-tici posledních souřadnic – lze zvolit jakoukoli permutaci $(k_1, \ldots, k_p, k_{p+1}, \ldots, k_{p+q})$ čísel $1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q$ a bod z napsat jako dvojici (x, y), kde $x := (z_{k_1}, \ldots, z_{k_p})$, $y := (z_{k_{p+1}}, \ldots, z_{k_{p+q}})$.

Příklad 19.9. Obecnějším difeomorfismem prostoru $\mathbb{R}^p$ na sebe, než je permutace souřadnic, je *lineární zobrazení* Φ, pro něž rovnost $y = \Phi(x)$ znamená totéž jako platnost rovností (37), kde matice Λ koeficientů λ_{jk} je regulární. Na pravých stranách rovností (128) – (129) je pak $\det \Phi' = \det \Lambda \neq 0$. Z algebry je známo, že pro tzv. *ortogonální transformace* (zachovávající ortogonalitu souřadnicových os a neměnící měřítka na nich) je $\det \Phi' = \pm 1$ jako v případě permutací souřadnic, protože ty jsou jen speciálním případem ortogonálních transformací.

Příklad 19.10. Jedna z nejužitečnějších nelineárních substitucí v $\mathbb{R}^2$ souvisí s *přechodem od kartézských souřadnic x, y k polárním souřadnicím r, φ*; je $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, a příslušné zobrazení je tedy

$$\Phi(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,; \tag{131}$$

Φ je třídy C_∞ v celé rovině $\mathbb{R}^2$, přičemž determinant

$$\det \Phi'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \tag{132}$$

je nenulový všude kromě počátku.

Označíme-li

$$P_\alpha := \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha);\ r \in \mathbb{R}_+^0\}, \quad \Omega_\alpha := \mathbb{R}_+ \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \tag{133}$$

pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, snadno zjistíme, že

$$\textit{Φ zobrazuje množinu Ω_α difeomorfně na množinu $\mathbb{R}^2 - P_\alpha$}. \tag{134}$$

[24]) Na rozdíl od kapitoly 16 půjde nyní o „globální“, nikoli „lokální“ difeomorfismy.

Protože polopřímka P_α má (dvojrozměrnou) míru 0, lze z integračního oboru N v rovnosti (129) vynechat všechny body ležící v P_α, aniž se cokoli podstatného změní. Z toho plyne tento velmi důležitý závěr:

(135) *Při transformaci kartézských souřadnic na polární lze tvrzení* (128) a (129) *užít s libovolnými měřitelnými množinami* $M \subset \mathbb{R}^2$ a $N \subset \mathbb{R}^2$.

Podobné tvrzení platí zřejmě i pro cylindrické souřadnice r, φ, z *v prostoru* $\mathbb{R}^3$, *které ponechávají beze změny třetí kartézskou souřadnici* z *a jejichž vztah ke dvěma prvním kartézským souřadnicím* x, y *je dán rovnostmi* $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

Příklad 19.7 – ekonomičtější řešení. Vraťme se k (127) a v integrálu vpravo přejděme k polárním souřadnicím:

$$(127^*)\qquad 2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)(1-x)\,dxdy = 2\iint\limits_{\substack{0<r<1\\ 0<\varphi<2\pi}} r^3\,(1-r\cos\varphi)\,drd\varphi =$$

$$2\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} r^3\,(1-r\cos\varphi)\,d\varphi\Big)dr = 4\pi\int_0^1 r^3\,dr = \pi\,,$$

protože $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$.

Příklad 19.11. Trojrozměrnou analogií polárních souřadnic jsou v $\mathbb{R}^3$ *sférické souřadnice* r, φ, ϑ, jejichž vztah ke kartézským souřadnicím je dán rovnostmi

$$(136)\qquad (x,y,z) = \Phi(r,\varphi,\vartheta) := (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,.$$

Φ je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^3$ a determinant

$$(137)\qquad \det\Phi'(z,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta$$

je nenulový, právě když je $r \neq 0$ a $\vartheta \not\equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi$.

Snadno se ověří, že 1) restrikce zobrazení Φ na množinu

$$(138)\qquad \Omega := \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

je prostá, 2) r je vzdálenost bodu (136) od počátku, 3) úhly φ, ϑ odpovídají (při pevném r) zeměpisné délce (měřené od 0° do 360°) a zeměpisné šířce (měřené od −90° do +90°), 4) množina $\Phi(\Omega)$ neobsahuje žádný bod (x,y,z), kde $x \ge 0, y = 0$, ale obsahuje všechny body ostatní body $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Z toho plyne, že

(139) Φ *zobrazuje množinu* Ω *difeomorfně na prostor* $\mathbb{R}^3$, *z něhož je vynechána uzavřená polorovina ohraničená osou* z *a obsahující kladnou poloosu osy* x, *tj. množinu všech bodů* $(x,0,0)$, *kde* $x \in \mathbb{R}_+$.

Uvážíme-li, že vynechaná množina má trojrozměrnou míru 0, vidíme, že

(140) *zobrazení Φ lze ve větě o substituci užívat bez omezení, tj. pro jakýkoli (měřitelný) integrační obor obsažený v $\mathbb{R}^3$.*

Interval $(0, 2\pi)$ *v* (138) *lze přitom nahradit jakýmkoli otevřeným intervalem délky* 2π. Zvolíme-li např. interval $(-\pi, \pi)$, budeme „zeměpisnou délku“ počítat od $-180°$ do $+180°$ a vynechána bude polorovina ohraničená osou z a obsahující zápornou poloosu osy x.

Příklad 19.12. Ověřme známý vzorec pro výpočet objemu koule. Protože Lebesgueova míra je invariantní vůči posunutím, lze předpokládat, že středem koule K o poloměru $R \in \mathbb{R}_+$ je bod $(0, 0, 0)$. Přejdeme-li od kartézských souřadnic ke sférickým a užijeme-li V. 19.26 spolu s V. 19.24, získáme rovnosti

$$\mu_3(K) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le R} 1 \, dx dy dz = \iiint\limits_{\substack{0<r<R,\ 0<\varphi<2\pi \\ -\pi/2<\vartheta<\pi/2}} r^2 \cos\vartheta \, dr d\varphi d\vartheta =$$

$$\int_0^R \Big(r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Big) d\vartheta \Big) dr = 2\pi \cdot 2 \int_0^R r^2 \, dr = \tfrac{4}{3}\pi R^3 .$$

Aplikace věty o substituci a Fubiniho věty proběhla zcela bez potíží; integrand 1 je spojitý a nezáporný a transformaci do sférických souřadnic lze provádět bez omezení. Protože integrand v posledním integrálu v první řádce nezávisel na φ, integrovali jsme nejdříve (= uvnitř) podle φ, pak podle ϑ a nakonec podle r; všechny jednorozměrné integrály jsme počítali (v souladu se (109)) jako Newtonovy.

Příklad 19.13. Vypočtěme tzv. **Laplaceův integrál**

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx , \tag{141}$$

který elementárními metodami založenými na primitivní funkci počítat nelze, protože primitivní funkce integrandu nepatří mezi tzv. elementární funkce.

Protože funkce $e^{-(x^2+y^2)}$ je spojitá a kladná ve čtvrtrovině $\Omega := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, lze aplikovat Fubiniho větu:

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy = \int_0^{+\infty} \Big(e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \Big) dx = \int_0^{+\infty} I \, e^{-x^2} \, dx = I^2 .$$

Všechny integrály jsou samozřejmě Lebesgueovy; *jejich konečnost dokazovat nemusíme, protože Fubiniho větu lze aplikovat i na integrály rovné* $\pm\infty$. (Nebylo by to však nijak obtížné, protože (141) je podle vět 10.3 a 10.11 zároveň integrálem Newtonovým – majorantou integrandu je v intervalu $\langle 1, +\infty)$ např. funkce x^{-2}.) Ani k přechodu k polárním souřadnicím informaci o konečnosti integrálu (141) nepotřebujeme.

Věta o substituci spolu s Fubiniho větou vedou k rovnostem

$$I^2 = \iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\substack{0<r<+\infty \\ 0<\varphi<\pi/4}} r\,e^{-r^2}\,drd\varphi = \int_0^{+\infty}\Big(r\,e^{-r^2}\int_0^{\pi/4} d\varphi\Big)dr =$$

$$\tfrac{1}{4}\pi\big[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\big]_0^{+\infty} = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Protože $f \geq 0$, je i $I \geq 0$; z toho je patrné, že

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,. \tag{141*}$$

Poznámka 19.17. Čtenář si jistě všiml, že jsme v předcházejících příkladech několikrát vytkli před integrál skoro všude nenulovou funkci proměnné, podle které se zrovna neintegruje. Dodejme, že integrál ze součinu dvou funkcí, z nichž každá závisí jen na jedné proměnné, lze někdy napsat jako součin integrálů:

Pro každé dvě množiny $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ platí rovnost

$$\iint_{A\times B} f(s)\,g(t)\,dsdt = \int_A f(s)\,ds \cdot \int_B g(t)\,dt \tag{142}$$

za předpokladu, že je buď $f \in \mathcal{L}(A)$ a $g \in \mathcal{L}(B)$, nebo že obě funkce jsou měřitelné a nezáporné (skoro všude v A resp. v B).

POZOR VŠAK! *K platnosti rovnosti* (142) *nestačí, aby její pravá strana měla smysl:* Položme totiž $A = (-1,2)$, $B = \mathbb{R}_+$, $C = A \times B$, $f(x) = x$, $g(y) \equiv 1$; v množině $C^+ = \langle 0,2) \times \mathbb{R}_+$ (resp. $C^- = (-1,0) \times \mathbb{R}_+$) je pak $fg \geq 0$ (resp. $fg < 0$). Na pravé straně (142) je

$$\int_{-1}^{2} x\,dx \cdot \int_0^{+\infty} 1\,dy = \tfrac{3}{2}\cdot(+\infty) = +\infty\,,$$

ale integrál vlevo neexistuje, protože

$$\int_C (fg)^+ = \int_{C^+} x\,dxdy = \int_0^2 x\,dx \cdot \int_0^{+\infty} 1\,dy = 2\cdot\mu(\mathbb{R}_+) = +\infty\,,$$

$$\int_C (fg)^- = \int_{C^-} (-x)\,dxdy = \int_{-1}^0 (-x)\,dx \cdot \int_0^{+\infty} 1\,dy = \tfrac{1}{2}\cdot\mu(\mathbb{R}_+) = +\infty\,.$$

(Kdybychom byli položili $A = (-1,1)$, byl by na pravé straně rovnosti (142) součin $0\cdot(+\infty) = 0$, což by mohlo vést k domněnce, že příčinou neplatnosti (142) je „nesprávná definice“ tohoto součinu. Taková domněnka by však byla mylná, protože pro *nezáporné* funkce f, g rovnost (142) platí i v případě, že vpravo je $0\cdot(+\infty)$.)

* * *

Z Fubiniho věty je odvozena výpočetní metoda nazývaná **integrace podle parametru**: *V jednorozměrném integrálu napíšeme integrand nebo jeho vhodnou část ve tvaru integrálu a změníme integrační pořadí;* někdy se stane, že integrál lze pak vypočítat. Ilustrujme to na jednom Lebesgueově a na jednom Newtonově integrálu:

Příklad 19.14. Předpokládejme, že $0 < a < b < +\infty$, a v integrálu

$$I(a,b) := \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\, dx \tag{143}$$

z nezáporné funkce (což zaručuje jeho existenci) přepišme integrand ve tvaru[25])

$$\frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x} = \Big[\frac{\operatorname{arctg} xy}{x} \Big]_{y=a}^{b} = \int_a^b \frac{dy}{1+x^2y^2}\,. \tag{144}$$

Je tedy

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \Big(\int_a^b \frac{dy}{1+x^2y^2} \Big)\, dx \tag{145}$$

a rádi bychom věděli, 1) zdali lze pořadí integrace podle y a x obrátit a 2) zdali to k něčemu bude.[26])

Dvojný integrál funkce $1/(1+x^2y^2)$ přes $(0,+\infty)\times(a,b)$ existuje (protože integrand je spojitá nezáporná funkce) a je (podle Fubiniho věty) roven nejen integrálu (145), ale i integrálu

$$\int_a^b \Big(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2y^2} \Big)\, dy = \int_a^b \Big[\frac{\operatorname{arctg} xy}{y} \Big]_{x=0}^{+\infty} dy = \int_a^b \frac{\pi}{2y}\, dy = \frac{\pi}{2} \lg \frac{b}{a}\,. \tag{146}$$

Tím je dokázáno, že pro všechna konečná kladná čísla $a < b$ je

$$I(a,b) := \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \lg \frac{b}{a}\,; \tag{143*}$$

je však zřejmé, že předpoklad $a < b$ (který se nám hodil při výpočtu) je zbytečný.

* * *

Ačkoli všechny limity (v metrických prostorech) lze převést na limity posloupností, je převádění limity, např. $\lim_{x\to a} f(x)$), na limity posloupností $\lim_{k\to\infty} f(x_k)$, kde $a \neq x_k \to a$, mnohdy zbytečnou komplikací problému. Ve druhém příkladu na integraci podle parametru (ale nejen tam) se spíše než věta 19.17 (o limitním přechodu za znamením integrálu pro majorizovanou *posloupnost*) hodí jiná verze této věty:

[25]) Jednou z potíží integrace podle parametru je nalézt vhodný přepis integrandu nebo jeho části; pomůže buď hledání v paměti, nebo v tabulkách integrálů.

[26]) Protože podmínka 2) asi v neznámé situaci nebude na první pohled patrná, je lépe nejdříve zkusit, zdali změnou pořadí integrace něčeho dosáhneme, a jen v případě, že ano, ověřit dodatečně korektnost postupu.

Věta 19.17*. (O limitním přechodu za znamením integrálu – 2. verze.) *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a $M \subset \mathbb{R}^p$; nechť existuje okolí $P(c)$ tak, že pro každé $z \in P(c)$ je funkce $f(x,z)$ proměnné x měřitelná v M, a nechť existuje funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ a množina $N \subset M$ míry 0 tak, že nerovnost $|f(x,z)| \leq g(x)$ platí pro všechna $x \in M - N$ a všechna $z \in P(c)$. Pak*

$$\lim_{z\to c} f(x,z) = F(x) \text{ pro všechna } x \in M - N \Rightarrow \lim_{z\to c} \int_M f(\cdot, z) = \int_M F. \tag{147}$$

Analogická tvrzení platí pro limitu zprava a zleva v bodech $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Příklad 19.15. Vypočítejme Newtonův integrál

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{148}$$

jehož integrand nemá elementární primitivní funkci. Postupujme nejdříve ryze formálně, abychom viděli, zdali náš postup k něčemu povede.

Uvážíme-li, že rovnost

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$$

platí pro každé $x \in \mathbb{R}_+$, vidíme, že (148) lze napsat ve tvaru

$$I = \int_0^{+\infty} \Big(\sin x \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy \Big)\, dx. \tag{149}$$

Kdybychom obrátili pořadí integrace podle x a y, dostali bychom integrál

$$\int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx \Big)\, dy = \tag{150}$$

$$\int_0^{+\infty} \Big[-e^{-xy} \frac{\cos x + y \sin x}{1+y^2} \Big]_{x=0}^{+\infty} dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Zřejmě tedy zbývá dokázat rovnost integrálů (149) a (150). Pořadí integrací podle x a y lze podle V. 19.24 změnit, existuje-li příslušný dvojný integrál; *ten ovšem v našem případě zcela určitě neexistuje*, protože kdyby existoval, byly by všechny napsané integrály absolutně konvergentní, a integrál (148) konverguje jen neabsolutně. [27])

Neabsolutní konvergence integrálu (148) je způsobena jeho horní mezí, protože integrál od 0 do z funkce $(\sin x)/x$ konverguje pro každé $z \in \mathbb{R}_+$ absolutně. Důkaz, že pro každé takové z konverguje dvojný integrál

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-xy} \sin x\, dx dy, \text{ kde } \Omega := (0,z) \times \mathbb{R}_+, \tag{151}$$

[27]) Tato situace nastane tedy vždy, když se v Lebesgueově teorii snažíme neabsolutně konvergentní integrál počítat integrací podle parametru.

zjistíme pomocí majoranty; na první pohled nejjednodušší majoranta e^{-xy} bohužel nepatří do $\mathcal{L}(\Omega)$, protože

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^z \Bigl(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\Bigr)\,dx = \int_0^z \frac{dx}{x} = +\infty\,. \tag{152}$$

„Vinna“ je ovšem tentokrát dolní mez; u počátku jsme funkci $e^{-xy}\sin x$ odhadli příliš hrubě, protože funkce $\sin x$ je „blízko nuly“ „daleko menší“ než 1. Užijeme proto lepší odhad $|\sin x| \le x$; počítáme-li podobně jako v (152), zjistíme, že $\iint_\Omega x\,e^{-xy} = z$; dvojný integrál (151) tedy skutečně konverguje.[28]) Podle Fubiniho věty se rovná dvojnásobným integrálům

$$\int_0^z \Bigl(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dy\Bigr)\,dx = \int_0^z \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{153_1}$$

a

$$\int_0^{+\infty} f(y,z)\,dy\,, \ \text{ kde } \ f(y,z) := \int_0^z e^{-xy}\sin x\,dx\,. \tag{153_2}$$

Abychom získali integrál (148), stačí ve (153_1) provést limitní přechod $z \to +\infty$; totéž je proto třeba provést i s integrálem (153_2), kde se však limitní přechod musí provést za znamením integrálu.

Aplikujme proto větu 19.17*: Je

$$f(y,z) = \Bigl[-e^{-xy}\,\frac{\cos x + y\sin x}{1+y^2}\Bigr]_{x=0}^{z} = \frac{1 - e^{-yz}(\cos z + y\sin z)}{1+y^2}\,,$$

přičemž absolutní hodnota čitatele posledního zlomku je menší než 3, protože

$$|e^{-yz}\cos z| \le 1\,, \quad |e^{-yz}y\sin z| \le yz\,e^{-yz} \le \max\{w\,e^{-w};\, w \in \mathbb{R}_+\} = e^{-1} < 1\,.$$

Funkce $3/(1+y^2)$ ležící v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ je tedy majorantou funkce $f(y,z)$ a podle věty 19.17* můžeme limitní přechod $z \to +\infty$ za znamením integrálu provést. Protože $\lim_{z\to+\infty} f(y,z) = 1/(1+y^2)$ (pro všechna $y \in \mathbb{R}_+$), je tedy opravdu

$$I = \lim_{z\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(y,z)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{148*}$$

* * *

Značný význam mají v teorii i při výpočtu různých integrálů tato dvě tvrzení:

---

[28]) Všimněme si opět, jak zásadní význam má platnost Fubiniho věty i v případě, že se dvojný integrál rovná $+\infty$. V nejrůznějších situacích, stejně jako v příkladu právě řešeném, zkoušíme různé majoranty, abychom dokázali konvergenci integrálu, jehož integrand mění znaménko. Při běžném počítání jsou majoranty jistě měřitelné a z definice jsou nezáporné; existence jejich dvojného integrálu je tedy zaručena, ale teprve po převedení na dvojnásobný integrál jsme schopni zjistit, zdali je dvojný integrál konečný nebo ne.

Věta 19.27. (O spojitosti integrálu závislého na parametru.) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^p$, nechť (X, ρ) je metrický prostor a nechť $A \subset X$. Nechť funkce f proměnných $x \in \mathbb{R}^p$ a $\alpha \in A$ splňuje tyto předpoklady:*

1. *Pro každé $\alpha \in A$ je funkce $f(\cdot, \alpha)$ měřitelná v M.*
2. *Pro skoro všechna $x \in M$ je funkce $f(x, \cdot)$ spojitá v A.*
3. *Pro každé $\alpha \in A$ existuje $\delta > 0$ a funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že*

$$\alpha' \in A,\ \rho(\alpha', \alpha) < \delta \Rightarrow |f(x, \alpha')| \le g(x) \text{ pro skoro všechna } x \in M. \tag{154}$$

Pak je integrál $\int_M f(\cdot, \alpha)$ spojitou funkcí parametru α v A.

Věta 19.28. (O derivování integrálu podle parametru.) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť f je funkce proměnných $x \in M \subset \mathbb{R}^p$ a $\alpha \in I$. Nechť dále platí:*

1. *Integrál $\int_M f(x, \alpha)\, dx$ konverguje aspoň pro jedno $\alpha \in I$.*
2. *Pro každé $\alpha \in I$ je funkce $f(\cdot, \alpha)$ měřitelná v M.*
3. *Existuje systém $\mathcal{S}$ otevřených intervalů, jejichž sjednocením je I, tak, že pro každý interval $J \in \mathcal{S}$ existuje funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ a množina $N \subset M$ míry 0 tak, že*

$$x \in M - N,\ \alpha \in J \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \le g(x). \tag{155}$$

Pak integrál $F(\alpha) := \int_M f(x, \alpha)\, dx$ konverguje pro všechna $\alpha \in I$ a je

$$F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx \quad \text{pro každé } \alpha \in I. \tag{156}$$

Poznámka 19.18. Píšeme-li $x = (x_1, \ldots, x_p)$, vystupují ve větě 19.28 reálné proměnné $x_1, \ldots, x_p$, podle nichž se integruje, a proměnná α, podle níž se neintegruje a která se v této souvislosti nazývá *parametr*. Třetí předpoklad věty 19.28 znamená, že parciální derivace $\partial f / \partial \alpha$ funkce f podle parametru α má majorantu $g \in \mathcal{L}(M)$ nezávislou na α „*lokálně*“, tedy v jistém okolí každého bodu $\alpha \in I$. Tento předpoklad odpovídá tomu, že derivování je lokální operace; případ $\mathcal{S} = \{I\}$, kdy má derivace majorantu z $\mathcal{L}$ nezávislou na parametru v celém I, není samozřejmě „zakázán“, ale v konkrétních příkladech jde spíše o výjimku. □

Věta 19.28 se hodí k rychlejšímu a elegantnějšímu výpočtu některých elementárních integrálů i k výpočtu některých integrálů, jejichž integrand nepatří mezi elementární funkce. Ukažme to na několika příkladech.

Příklad 19.16. Vyjdeme-li z rovnosti

$$\int_0^1 x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad \text{kde } \alpha \in (-1, +\infty) \tag{157_0}$$

a kde vlevo je Lebesgueův integrál, který je zároveň integrálem Newtonovým, a uvážíme-li, že parciální derivaci $x^\alpha \lg x$ integrandu podle α lze v každém intervalu

$$J := (\beta, +\infty), \quad \text{kde } \beta \in (-1, +\infty), \tag{158}$$

majorizovat funkcí $x^\beta |\lg x|$, která leží v $\mathcal{L}((0,1))$ (protože např. pro $\gamma := \frac{1}{2}(\beta+1)$ je $|\lg x| = O(x^{-\gamma})$ pro $x \to 0+$, tedy $x^\beta |\lg x| = O(x^{\beta-\gamma})$, a $\int_0^1 x^{\beta-\gamma} dx$ konverguje, protože $\beta - \gamma = \frac{1}{2}(\beta - 1) > -1$); za $\mathcal{S}$ lze tedy ve větě 19.28 zvolit systém všech intervalů (158). Protože i ostatní předpoklady věty 19.28 jsou zřejmě splněny, je

$$(157_1) \qquad \int_0^1 x^\alpha \lg x \, dx = \int_0^1 \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha} \, dx = \Big(\frac{1}{\alpha+1}\Big)' = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

pro každé $\alpha \in (-1, +\infty)$.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}_+$ je

$$(159) \qquad \frac{\partial^n x^\alpha}{\partial \alpha^n} = x^\alpha \lg^n x$$

a protože tato funkce má pro α z intervalu (158) majorantu $x^\beta |\lg^n x|$ patřící (podobně jako $x^\beta |\lg x|$) do $\mathcal{L}((0,1))$, dostaneme opakovanou aplikací věty 19.28 rovnost

$$(157_n) \qquad \int_0^1 x^\alpha \lg^n x \, dx = \Big(\frac{1}{\alpha+1}\Big)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ (a každé $\alpha \in (-1, +\infty)$). [29])

Příklad 19.17. Ze známého výsledku

$$(160) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}_+ \text{ a všechna } b \in \mathbb{R}$$

získáme (zatím formálním) derivováním podle parametru a rovnost

$$(161) \qquad \int_0^{+\infty} x e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$$

a derivováním podle parametru b rovnost

$$(162) \qquad \int_0^{+\infty} x e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}\,.$$

Protože ostatní předpoklady V. 19.28 jsou zřejmé, zabývejme se jen majorantami: V prvním případě je $|x e^{-ax} \sin bx| \le x e^{-cx}$, je-li $0 < c < a$, takže systém $\mathcal{S}$ všech intervalů $(c, +\infty)$, kde $c \in \mathbb{R}_+$, splňuje předpoklad 3. Ve druhém případě je to ještě jednodušší, protože majorantou k funkci $x e^{-ax} \cos bx$, nezávislou na parametru b, je funkce $x e^{-ax}$. Protože uvedené majoranty patří do $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, platí rovnosti (161) a (162) pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ a všechna $b \in \mathbb{R}$. [30])

[29]) Tento výsledek lze sice získat i elementárně, integrací per partes, ale derivováním podle parametru to jde elegantněji a rychleji.

[30]) Integrály (161), (162) lze opět počítat elementárně (integrací per partes), ale zde uvedený postup je elegantnější a kratší.

Příklad 19.18. Integrál

$$I(a,b) := \int_0^{+\infty} \frac{\lg(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}\,dx\,, \text{ kde } a \in \mathbb{R}_+^0,\ b \in \mathbb{R}_+\,, \tag{163}$$

zřejmě konverguje, protože integrand je $O(x^{-3/2})$ pro $x \to +\infty$. Elementárními metodami jej počítat nelze, můžeme se však o to pokusit derivováním podle parametru a, protože tím odstraníme logaritmus, který elementárnímu výpočtu brání.

Je-li $0 < a_1 < a < a_2 < +\infty$, je

$$\Big|\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{\lg(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}\Big)\Big| = \Big|\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\Big| \le \frac{2a_2x^2}{(1+a_1^2x^2)(1+b^2x^2)}\,, \tag{164}$$

přičemž poslední funkce patří do $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ a intervaly (a_1, a_2) pokrývají $\mathbb{R}_+$. Z toho plyne, že pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ je

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = \int_0^{+\infty} \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\,dx\,; \tag{165}$$

podle V. 19.27 je tato funkce proměnné a navíc spojitá v $\mathbb{R}_+$.

Je-li $b \ne a$, je

$$\frac{2a}{b^2-a^2}\Big(\frac{1}{1+a^2x^2} - \frac{1}{1+b^2x^2}\Big)$$

rozklad posledního integrandu na jednoduché zlomky, takže

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = \frac{2a}{b^2-a^2}\Big[\frac{\operatorname{arctg} ax}{a} - \frac{\operatorname{arctg} bx}{b}\Big]_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{b(a+b)} \tag{165'}$$

pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ různá od b. Protože však posledně napsaná funkce je spojitá v $\mathbb{R}_+$ stejně jako funkce (165), je výsledek správný pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$.

Integrací podle a z něj (pro $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+$) získáme rovnost

$$I(a,b) = \frac{\pi}{b}\lg(a+b) + c, \tag{166}$$

kde c je vhodná konstanta nezávislá na a (ale obecně závislá na b). Abychom ji našli, uvažme, že integrand ve (163) je spojitou funkcí $(x,a) \in \mathbb{R}_+ \times \langle -1, 1\rangle$ a má tam majorantu $\lg(1+x^2)/(1+b^2x^2)$ nezávislou na a a ležící v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$; podle V. 19.27 je tedy integrál (163) spojitou funkcí parametru $a \in \langle -1, 1\rangle$.[31] Z toho, z platnosti rovnosti (166) pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ a ze spojitosti její pravé strany v bodě 0 zprava ihned plyne, že $c = -(\pi \lg b)/b$, protože $I(0,b) = 0$ (pro všechna $b \in \mathbb{R}_+$).

Tím je dokázáno, že pro všechna $a \in \mathbb{R}_+^0$, $b \in \mathbb{R}_+$ je

[31]) Ve skutečnosti je spojitou funkcí parametru a v celém $\mathbb{R}$, ale nikde to nepotřebujeme.

$$(163^*) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\lg(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{b}\,\lg\frac{a+b}{b}\,. \quad \square$$

Někdy vede výpočet integrálu derivováním podle parametru k diferenciální rovnici:

Příklad 19.19. Při každém (pevném, ale libovolném) $a \in \mathbb{R}_+$ konverguje integrál

$$(167) \qquad I(b) := \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\,dx$$

pro všechna $b \in \mathbb{R}$, protože majoranta $\exp(-ax^2)$ integrandu (nezávislá na b) leží v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$. Formálním derivováním podle parametru získáme rovnost

$$(168) \qquad I'(b) = -\int_0^{+\infty} x\,e^{-ax^2} \sin bx\,dx\,;$$

protože integrand má majorantu $x\exp(-ax^2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, platí rovnost (168) podle V. 19.28 pro všechna $b \in \mathbb{R}$. Integrací per partes získáme diferenciální rovnici

$$(169) \qquad I'(b) = \frac{1}{2a}\Big[e^{-ax^2}\sin bx\Big]_0^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}\,I(b)\,.$$

Rovnice $I' + bI/2a = 0$ má integrační faktor $\exp(b^2/4a)$ a řešení

$$(170) \qquad I(b) = C\,e^{-b^2/4a}\,,$$

kde C nezávisí na b, ale může záviset na a. Provedeme-li v integrálu (141^*) substituci $\sqrt{a}\,x = t$, zjistíme, že

$$(141^{**}) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \textit{pro každé } a \in \mathbb{R}_+\,;$$

této konstantě se rovná i $C = I(0)$. Z toho plyne, že

$$(167^*) \qquad I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\exp\Big(-\frac{b^2}{4a}\Big)$$

pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ a všechna $b \in \mathbb{R}$.

* * *

Na závěr uveďme několik vlastností **funkce gamma**, která je definována rovností

$$(171) \qquad \Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{pro všechna } s \in \mathbb{R}_+\,,$$

a **funkce beta**, která je definována rovností

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{pro všechna } p \in \mathbb{R}_+,\ q \in \mathbb{R}_+ . \tag{172}$$

Mělo by být zřejmé, že *pro uvedené hodnoty parametrů* s, p, q *Lebesgueovy integrály* (171) *a* (172) *konvergují a že existují též jako integrály Newtonovy.*

Cvičení 19.18. Dokažte integrací per partes, že je

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \quad \textit{pro všechna } s \in \mathbb{R}_+ ; \tag{173}$$

pak uvažte, že $\Gamma(1) = 1$ a odvoďte ze (173) rovnost

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \textit{pro všechna celá čísla } n \geq 0 . \tag{174}$$

Cvičení 19.19. Pro $s = \frac{1}{2}$ proveďte v (171) substituci $x = t^2$ a užijte Př. 19.13; tím dokážete, že

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} . \tag{175}$$

Kombinací tohoto výsledku se (173) ověřte, že

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \textit{pro všechna celá čísla } n \geq 0 . \quad \Box \tag{176}$$

Bez důkazu [32]) uveďme ještě identitu

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \textit{pro všechna } s \in (0,1), \tag{177}$$

známou pod názvem **doplňková věta**, a poznamenejme, že *funkci gamma lze právě jedním způsobem holomorfně rozšířit z* $\mathbb{R}_+$ *na množinu* $\Omega := \mathbb{C} - \{n \in \mathbb{Z};\, n \leq 0\}$. *Po tomto rozšíření platí identita* (177) *pro všechna* $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, *identita* (173) *pro všechna* $s \in \Omega$.

Příklad 19.20. Dokažme, že je

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \textit{pro všechna } p \in \mathbb{R}_+,\ q \in \mathbb{R}_+ . \tag{178}$$

Součin $\Gamma(p)\,\Gamma(q)$ lze podle Po. 19.16 napsat ve tvaru

$$\Big(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx\Big)\Big(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y}\,dy\Big) = \iint\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y}\,dx dy ; \tag{179}$$

[32]) Důkaz není jednoduchý; lze jej najít např. v [13] nebo v [6].

ověřme, že v posledním integrálu lze provést substituci

$$\Phi(u,v) := (u(1-v), uv)\,, \quad \text{kde } (u,v) \in \Omega := \mathbb{R}_+ \times (0,1)\,. \tag{180}$$

Protože Φ je v Ω třídy C_∞ a splňuje tam podmínku

$$\Phi'(u,v) = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u \neq 0\,,$$

je v Ω regulární. Je-li $x = u(1-v)$, $y = uv$, $(u,v) \in \Omega$, je $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$; obráceně, je-li $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$, je $u = x + y \in \mathbb{R}_+$ a $v = y/(x+y) \in (0,1)$. Φ je tedy difeomorfní zobrazení množiny Ω na množinu $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, je (179) rovno integrálu

$$\iint_\Omega u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u}\, du dv =$$

$$\Big(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u}\, du\Big)\Big(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dv\Big) = \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}\,(p,q)\,;$$

tím je (178) dokázáno. $\square$

Poznámka 19.19. Funkce $\omega(t) := \sin^2 t$ zobrazuje prostě interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$ na interval $(0,1)$, je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}$ a $\omega'(t) = 2 \sin t \cos t \neq 0$ v $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Substituce $x = \omega(t)$ vede k identitě

$$\mathrm{B}(p,q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\, dt\,; \tag{181}$$

položíme-li ještě $2p = \alpha$ a $2q = \beta$ a užijeme-li (178), dostaneme rovnost

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} t \cos^{\beta-1} t\, dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{2}\beta)}{2\,\Gamma(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))} \quad \textit{pro všechna } \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \beta \in \mathbb{R}_+\,. \tag{182}$$

Protože hodnoty funkce Γ jsou podrobně tabelovány a každý dobrý počítačový program zabývající se tzv. vyšší matematikou a jejími aplikacemi funkci gamma „zná“, dává rovnost (182) možnost efektivního výpočtu všech konvergentních integrálů typu uvedeného na její levé straně. Pro všechna přirozená čísla α, β hodnoty pravé strany známe (viz (174) a (176)) a můžeme si tak ušetřit zdlouhavý výpočet integrálů vlevo např. integrací per partes.

Cvičení 19.20. Pomocí (182) ověřte rovnosti

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^6 t\, dt = \frac{3\pi}{512}\,, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,. \tag{183}$$

Cvičení

Existuje-li integrál funkce f přes množinu $M \subset \mathbb{R}^2$, vypočtěte jej. Uvažte, že integrál omezené měřitelné funkce f přes měřitelnou množinu M konečné míry (speciálně: přes omezenou měřitelnou množinu) *konverguje* a že integrál nezáporné měřitelné funkce f přes (každou) měřitelnou množinu M *existuje*. Nabývá-li funkce f jak kladných, tak i záporných hodnot, lze *konvergenci* jejího integrálu často dokázat pomocí vhodné majoranty z $\mathcal{L}$.

	$f(x,y) =$	$M =$
19.21.	$x^3y + xy^3$	$(0,1)^2$
19.22.	x^y	$(0,1)^2$
19.23.	$\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$	$(0,1)^2$
19.24.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$(-1,1)^2$
19.25.	$y \sin xy$	$(0, \sqrt{\pi}\,)^2$
19.26.	$\sin(x+y) + \cos(x-y)$	$(0,\pi) \times (0, \frac{1}{2}\pi)$
19.27.	$x \sin xy - y \cos xy$	$(0,\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
19.28.	$\dfrac{y}{1+x^2y^2}$	$(0,1) \times (-1,0)$
19.29.	$\dfrac{y}{1-x^2y^2}$	$(0,1)^2$
19.30.	$\dfrac{1}{1+x+y^2}$	$(-1,1) \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
19.31.	$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$	$(1,2) \times (0,1)$
19.32.	$(x+y) \lg(1+x+y)$	$(-1,1) \times (0,1)$
19.33.	$xy \lg(x^2+y^2)$	$(0,1)^2$
19.34.	$\dfrac{\lg(x+y)}{x+y}$	$(0,1)^2$
19.35.	$\sqrt[3]{\operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 y}$	$(0, \frac{1}{2}\pi) \times (0, \frac{1}{2}\pi)$
19.36.	$x \operatorname{arctg} xy$	$(0,1)^2$
19.37.	$y \arcsin \dfrac{x}{y}$	$(0,1) \times (1,2)$
19.38.	$\dfrac{1}{\cosh x - \cosh y}$	$(1,2)^2$

19.39. $\dfrac{1}{1+x^2y^2}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.40. $\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.41. $\dfrac{x \operatorname{arctg} x^2y^2}{1+x^4y^4}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+ \times (1,+\infty)$

19.42. $y\,e^{-(x+y^2)}$ $\qquad$ $(0,1)\times\mathbb{R}_+$

19.43. $xy\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.44. $x^2y^3\,e^{-(x+y)}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.45. $(x^2+y^2)\,e^{-xy}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.46. $\dfrac{\sqrt{y}}{e^{xy}(e^{xy}+1)}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+\times(0,1)$

19.47. $\dfrac{1}{\cosh xy}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+\times(0,1)$

19.48. $xy^2\,e^{-xy}\sin xy$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+\times(0,1)$

19.49. $\sqrt{y}\,e^{-xy}\sin x$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.50. $e^{-xy^2}\cos xy$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

Vypočtěte $\int_M f$, je-li M trojúhelník resp. čtyřúhelník s uvedenými vrcholy.

	$f(x,y) =$	vrcholy:
19.51.	$\sin(x+y)$	$(\frac{1}{2}\pi,0)$, $(0,\pm\frac{1}{2}\pi)$
19.52.	$\sin(x+y)-\cos(x-y)$	$(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$
19.53.	$x\,e^{x+y}$	$(\pm1,0)$, $(0,1)$
19.54.	$\lg\dfrac{x}{x^2+y^2}$	$(0,0)$, $(1,\pm1)$
19.55.	$\operatorname{arctg}(x+y)$	$(-1,0)$, $(0,\pm1)$
19.56.	e^{x-y}	$(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$
19.57.	$\dfrac{1}{1+\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$	$(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$
19.58.	$\lg(1+\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)$	$(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$
19.59.	x^2y^2	$(\pm2,0)$, $(0,\pm1)$
19.60.	x^2-y^2	$(-2,0)$, $(0,\pm1)$, $(1,0)$

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ a nechť

$$M_1 := U((0,0),1), \quad M_2 := U((1,0),1), \quad M_3 := U((-1,0),1),$$

$$M_4 := M_1 \cap \{(x,y);\, y > 0\}, \quad M_5 := M_1 \cap \{(x,y);\, x > 0\}, \quad M_6 := M_2 \cup M_3\,,$$

$$M_7 := \Big\{(x,y);\ \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 < 1\Big\}, \quad M_{ij} := M_i \cap M_j, \text{ je-li } 1 \le i < j \le 5\,.$$

Zjistěte, zdali existuje integrál $\int_M f$, a v případě, že ano, vypočtěte jeho hodnotu.

	$f(x,y) =$	$M =$		$f(x,y) =$	$M =$
19.61.	$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	M_1	**19.62.**	$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	M_2
19.63.	$(x^2+y^2)x^\alpha y^\beta$	M_{45}	**19.64.**	$(x^2+y^2)\lg(x^2+y^2)$	M_1
19.65.	$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x+y)^2}$	M_{45}	**19.66.**	$(x^2+y^2)\,e^{x^2+y^2}$	M_1
19.67.	$\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$	M_{34}	**19.68.**	$\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}$	M_{12}
19.69.	$\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$	M_{24}	**19.70.**	$xy\,e^{-x^2-y^2}$	M_{34}
19.71.	$\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{7/2}}$	$M_4 - M_6$	**19.72.**	$\sqrt{\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\dfrac{y}{b}\Big)^2}$	M_7
19.73.	$\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$	$M_4 - M_6$	**19.74.**	$\dfrac{x^2y^2}{\Big(\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\dfrac{y}{b}\Big)^2\Big)^2}$	M_7

V dalších příkladech bude úkolem vypočítat *obsah* neboli *dvojrozměrnou Lebesgueovu míru* množiny M dané buď *aritmeticky* (jednou nebo několika nerovnostmi), nebo *geometrickým popisem* (např. že M je množina ohraničená hyperbolami o rovnicích $y = \pm\sqrt{1+x^2}$ a přímkami o rovnicích $x = \pm a$, kde $a \in \mathbb{R}_+$); ve druhém případě je na čtenáři, aby dané podmínky „zaritmetizoval".

Čtenář ví, že integrace výrazů obsahujících $x^2 + y^2$ se často zjednoduší přechodem k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Podobně lze však transformovat např. součet $x + y$ nebo $x^{2/3} + y^{2/3}$; v prvním případě můžeme zkusit substituci $x = r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$, ve druhém substituci $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$. Kromě výpočtu příslušného jakobiánu je ovšem třeba zjistit, v jaké oblasti je taková substituce difeomorfismem; [33]) po substituci se často hodí vzorec (182).

[33]) V právě uvedených dvou příkladech je to např. oblast $\mathbb{R}_+ \times (0, \frac{1}{2}\pi)$, která transformací přechází v první otevřený kvadrant.

V Př. 19.75 –19.100 jsou $a < b$ a $c < d$ čísla z $\mathbb{R}_+$. Je-li (f, g) difeomorfismus a je-li množina M dána nerovnostmi $a < f(x, y) < b$, $c < g(x, y) < d$, může vést k řešení příkladu substituce $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, protože transformovaná množina je pak interval $(a, b) \times (c, d)$. Poznamenejme ještě, že v příkladech 19.75, 19.77, 19.78 a 19.81 počítáme po řadě obsah smyčky lemniskaty, astroidy, strofoidy a Descartova listu; i když z obrázků nic neodvozujeme, není geometrická představa integračního oboru M v jednotlivých příkladech vůbec na škodu.

M je dána nerovnostmi nebo nerovností

19.75. $(x^2 + y^2)^2 < 2a^2(x^2 - y^2)$, $x > 0$

19.76. $(x + y)^3 < xy$, $x > 0$, $y > 0$

19.77. $x^{2/3} + y^{2/3} < a^{2/3}$

19.78. $x(x^2 + y^2) < x^2 - y^2$, $x > 0$

19.79. $(x^2 + y^2)^2 < xy$, $x > 0$, $y > 0$

19.80. $(x^2 + y^2)^3 < xy^2$

19.81. $x^3 + y^3 < xy$, $x > 0$, $y > 0$

19.82. $x^4 + y^4 < x^2 y$, $x > 0$

19.83. $x^4 + y^4 < x^2 + y^2$

19.84. $ax^2 < y < bx^2$, $cy^2 < x < dy^2$

19.85. $a < \sqrt{x}\, y < b$, $c\sqrt{x} < y < d\sqrt{x}$

19.86. $ax^3 < y^2 < bx^3$, $cy^3 < x^2 < dy^3$

19.87. $ax^3 < y < bx^3$, $cy^3 < x < dy^3$

M je množina ohraničená křivkami s popisem

19.88. $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$, $x = \pm a$

19.89. $y = a\sqrt{x}$, $y = b\sqrt{x}$, $xy = c$, $xy = d$

19.90. $y = \sinh x$, $y = 2\sinh x$, $y = e^{-x}$

19.91. $y = \sinh x$, $y = 2\sinh x$, $y = e^{-x}$, $y = 2e^{-x}$

19.92. $y = 2\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $xy = 1$, $xy = 4$

19.93. $x^2 + y^2 = p^2$, $(x - 2)^2 + y^2 = q^2$, $p = 1, 2$, $q = 1, 2$

19.94. $(x, y) = (\cos \pi t, t), (x, y) = (1 + \sin \pi t, t)$, $0 \le t \le \frac{3}{2}$

19.95. $(x \pm 4)^2 + y^2 = 9$, $x^2 + (y \pm 3)^2 = 4$

19.96. $x^2 y = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{x}$

19.97. $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $x > 0$

19.98. $y = |\sin \pi x| \sinh x$, $y = |\sin \pi x| \cosh x$, $x > 0$

19.99. $y = \lg(1 + x^2)$, $y = \lg(2 + x^2)$

19.100. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctg} 2x$, kde $x \geq 0$

Existuje-li $\int_M f$, vypočtěte jej, v opačném případě odůvodněte, proč neexistuje.

	$f(x,y) =$	M je množina určená podmínkami
19.101.	$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$	$0 < x < 2$, $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < y < \sqrt{x}$
19.102.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$0 < x < 1$, $x^2 < y < \sqrt{x}$
19.103.	$\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^a}$, kde $a \in \mathbb{R}$	$(x-1)^2 + y^2 < 1$
19.104.	$\dfrac{y}{x^a}$, kde $a \in \mathbb{R}$	$x > 1$, $0 < y < x$
19.105.	$\sqrt{\dfrac{y}{x}}$	$x > 1$, $0 < y < \dfrac{1}{x}$
19.106.	$\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$	$\frac{1}{2}x < y < 2x$, $xy < 1$, $x > 0$
19.107.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2 - y^2}}$	$(x-1)^2 + y^2 < 1$, $y > 0$
19.108.	$x^2 + y^2$	$(x^2+y^2)^2 < 2(x^2 - y^2)$
19.109.	$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$	$(x^2+y^2)^2 < 2(x^2 - y^2)$, $x > 0$, $y > 0$
19.110.	$\dfrac{x}{x^2+y^2}$	$0 < x < 1$, $x^2 < y < \sqrt{x}$

Mezi příklady na trojrozměrnou integraci budou i příklady na výpočet objemu; bude se nám proto hodit vzorec pro výpočet *objemu rotačního tělesa*: Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina a nechť $f : A \to \langle 0, +\infty)$ je měřitelná funkce; označíme-li

(184) $$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in A,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

„množinu pod grafem funkce f" v rovině xy, bude

(185) $$B_x := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in A,\ \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}$$

množina, která vznikne z B rotací kolem osy x. Tato množina je opět měřitelná, a zavedeme-li v rovině yz polární souřadnice $(y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, vidíme, že její *objem je roven*

$$\mu_3(B_x) = \iiint\limits_{B_x} dx\,dy\,dz = \int\limits_A \Big(\iint\limits_{\substack{0<r<f(x)\\0<\varphi<2\pi}} r\,dr d\varphi \Big) dx = \pi \int\limits_A f^2 . \quad \square \tag{186}$$

Ve Cv. 19.111 − 19.140 budou a, b, c, d čísla z $\mathbb{R}_+$ a ve Cv. 19.111 − 19.130 bude cílem vypočítat objem (neboli trojrozměrnou Lebesgueovu míru) množiny $M \subset \mathbb{R}^3$.

19.111. M je elipsoid ohraničený plochou o rovnici

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 = 1 .$$

Rada: Přejděte k „zobecněným sférickým souřadnicím“

$$x = ra\cos\varphi\cos\vartheta\,,\ y = rb\sin\varphi\cos\vartheta\,,\ z = rc\sin\vartheta\,.\ \diamond$$

19.112. M je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.

19.113. M je pětistěn (pyramida) s vrcholy $(\pm 1, 1, 0)$, $(\pm 1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

19.114. M je průnik válce $(x - R)^2 + y^2 \le R^2$ s koulí $x^2 + y^2 + z^2 \le 4R^2$ (kde $R \in \mathbb{R}_+$), tedy tzv. *Vivianiho těleso*.

Rada: Integrujte nejdříve podle z a pak zaveďte polární souřadnice; pozor při odmocňování! $\diamond$

19.115. $M = \{(x, y, z);\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 < 8(x^2 + y^2 - z^2)\}$.

19.116. M je *paraboloid* vzniklý rotací úseče paraboly $y^2 \le 2cx$, $0 \le x \le a$, kolem osy x .

19.117. M je část *eliptického kužele* $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le z^2$, kde $0 \le z \le c$.

19.118. M je lineární obal obdélníka $\langle -a, a\rangle \times \langle -b, b\rangle \times \{0\}$ v rovině xy a úsečky s krajními body $(\pm c, 0, d)$, kde $c < a$; podobá se klínu.

Rada: Klín je ohraničen pěti rovinami a jeho objem je roven čtyřnásobku jeho průniku s prvním oktantem. Průmět tohoto průniku do roviny xy je sjednocením lichoběžníku s trojúhelníkem, přes něž je třeba integrovat odděleně. $\diamond$

19.119. M je *anuloid* (neboli *torus*) vzniklý rotací kruhu $x^2 + (z - R)^2 \le r^2$, kde $0 < r < R < +\infty$, kolem osy x.

Rada: Je-li x vodorovná, z svislá osa, vypočtete objem anuloidu jako rozdíl objemů těles, která vzniknou rotací množin pod horní a pod dolní půlkružnicí ohraničující uvedený kruh. $\diamond$

19.120. Množina M vznikla rotací množiny pod částí hyperboly $xy = 1$, odpovídající $x \ge \frac{1}{2}$, kolem osy x.

19.121. Množina M vznikla rotací vnitřku astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ kolem osy x.

19.122. Množina M vznikla rotací množiny pod částí řetězovky $y = \cosh x$, $-a \le x \le a$, kolem osy x (tzv. *katenoid*).

19.123. Množina M vznikla rotací množiny pod grafem funkce $\sin^n x$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $0 \le x \le \pi$, kolem osy x.

19.124. Množina M („sud s kruhovými dužinami“) vznikla rotací množiny pod obloukem kružnice $(y+4)^2 + x^2 = 36$, $|x| \le 3$, kolem osy x.

19.125. Množina M („sud s parabolickými dužinami“) vznikla rotací množiny pod parabolou $y = 6 - x^2/25$, $|x| \le 5$, kolem osy x.

19.126. $M = \{(x,y,z);\, (x^2+y^2+z^2)^2 < xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

19.127. M je množina ohraničená *eliptickým paraboloidem* $(x/a)^2 + (y/b)^2 = z$ a rovinou $z = c$.

19.128. M je část *eliptického válce* $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1$ ohraničená rovinami $z = \pm(x-a)$.

19.129. $M = \{(x,y,z);\, x^2+y^2 \le R^2,\ y^2+z^2 \le R^2\}$ (průnik dvou válců).

19.130. M je průnik elipsoidu $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \le 1$ s eliptickým válcem $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le \frac{1}{4}$.

* * *

Hmotnost tělesa (= měřitelné množiny) $M \subset \mathbb{R}^3$, jehož hustota je dána nezápornou měřitelnou funkcí $\rho(x,y,z)$, je definována rovností

$$\text{(187)} \qquad \mathrm{hm}(M) := \iiint\limits_M \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Konverguje-li integrál

$$\text{(188)} \qquad \mathrm{stm}_{\mathrm{yz}}(M) := \iiint\limits_M \rho(x,y,z)\, x\, dx\, dy\, dz\,,$$

definuje tzv. *statický moment tělesa M vzhledem k rovině* yz; *statické momenty* $\mathrm{stm}_{\mathrm{xz}}(M)$ a $\mathrm{stm}_{\mathrm{xy}}(M)$ vzhledem k rovinám xz a xy se definují analogicky, jako integrály funkcí ρy a ρz. *Těžiště* tělesa M je definováno jako bod

$$\text{(189)} \qquad \frac{(\mathrm{stm}_{\mathrm{yz}}(M),\, \mathrm{stm}_{\mathrm{xz}}(M),\, \mathrm{stm}_{\mathrm{xy}}(M))}{\mathrm{hm}(M)}$$

za předpokladu, že statické momenty existují a hmotnost je konečná kladná.

Konverguje-li integrál

$$\text{(190)} \qquad \iiint\limits_M \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz\,,$$

nazývá se jeho hodnota *moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k ose* z; *momenty setrvačnosti vzhledem k osám* x a y získáme ze (190), píšeme-li (y^2+z^2) a (z^2+x^2) místo (x^2+y^2).

19.131. Vypočítejte hmotnost koule $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, je-li hustota ρ rovna a) $1/r$, b) $1/r^2$, c) $1/(r^2+1)$, kde $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

19.132. Vypočítejte hmotnost elipsoidu $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2 \le 1$, je-li hustota rovna $x^2 + y^2 + z^2$.

19.133. Najděte těžiště krychle $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle$, je-li $\rho(x,y,z) = xy^2z^3$.

19.134. Najděte těžiště části *rotačního paraboloidu* $x^2+y^2 \le 2z \le 2c$, je-li $\rho \equiv 1$.

19.135. Najděte těžiště *rotačního kužele* $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}z^2$, $0 \le z \le c$, v případě, že $\rho(x,y,z) = z$.

19.136. Najděte moment setrvačnosti koule $(x-R)^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ vzhledem k ose z, je-li $\rho \equiv 1$.

19.137. Při $\rho \equiv 1$ najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose y části dutého válce $R_1^2 \le x^2 + z^2 \le R_2^2$ $(0 < R_1 < R_2 < +\infty)$ mezi rovinami $y = 0$ a $y = c$.

19.138. Najděte moment setrvačnosti kvádru $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle$ vzhledem k ose z, je-li $\rho(x,y,z) = xyz$.

19.139. Najděte moment setrvačnosti *eliptického kužele* $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le z^2$, $0 \le z \le c$, vzhledem k ose z, je-li hustota rovna 1.

19.140. Najděte moment setrvačnosti *eliptického paraboloidu* $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le z \le c$ vzhledem k ose z, je-li hustota rovna 1.

* * *

19.141. Vyjděte z rozvoje funkce $1/(x^2+1)$ v Taylorovu řadu o středu 0 (která konverguje, právě když je $|x| < 1$) a dokažte rovnost

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ pro všechna } x \in \langle -1, 1\rangle .$$

Rada: Ověřte, že částečné součty (alternující) řady pro $1/(x^2+1)$ leží mezi 0 a 1 a užijte V. 19.18. ◇

19.142. Integrací člen po členu řady pro $1/\sqrt{1-x^2}$ ověřte platnost identity

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ pro všechna } x \in \langle -1, 1\rangle .$$

Rada: Řada pro $1/\sqrt{1-x^2}$ má nezáporné členy; užijte V. 19.18. ◇

19.143. Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)^2} .$$

19.144. Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\lg(1-x)}{x}\, dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Poznámka: V kapitole 20 zjistíme, že součet řady vpravo je roven $\frac{1}{6}\pi^2$.

19.145. Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\,\frac{1}{k^2}\,.$$

Rada: Ukažte, že částečné součty Taylorova rozvoje integrandu leží mezi $\frac{1}{2}$ a 1. $\diamond$

19.146. Ověřte, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x\,e^{-kx}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

19.147. Indukcí a derivováním podle parametru a ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} x^n\,e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad \text{a všechna celá čísla} \quad n \geq 0\,.$$

19.148. Indukcí a derivováním podle parametru y ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^1 x^y\,\lg^n x\,dx = \frac{(-1)^n\,n!}{(y+1)^{n+1}} \quad \text{pro všechna} \quad y > -1 \quad \text{a všechna celá čísla} \quad n \geq 0\,.$$

19.149. Indukcí a derivováním podle parametru a ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{(2n-3)!!\,\pi}{2\,(2n-2)!!\,a^{n-1/2}} \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad \text{a všechna} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

19.150. Indukcí a derivováním podle parametru a ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}\,e^{-ax^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\,a^{n+1/2}}\,\sqrt{\pi} \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad \text{a všechna celá} \quad n \geq 0\,.$$

19.151. Předpokládejte, že $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$, užijte výsledky z Př. 19.17 a derivováním podle parametru ukažte, že

$$\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{2b\,(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3}\,, \quad \int_0^{+\infty} x^2\,e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{2a\,(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3}\,.$$

19.152. Derivováním podle parametru dokažte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{b}-\sqrt{a}) \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}_+\,.$$

19.153. Rovnost uvedenou v příkladě 19.152 dokažte integrací podle parametru.

Rada: Uvažte, že integrand je při $a < b$ roven $\int_a^b e^{-x^2 y}\,dy$; při $a > b$ stačí vyměnit oba parametry, případ $a = b$ je triviální. $\diamond$

19.154. Derivováním podle parametru ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}.$$

Rada: O něco výhodnější je derivovat podle b. ◇

19.155. Derivováním podle parametru nejdříve ověřte, že

$$\int_0^{\pi} \frac{\lg(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin a \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, 1).$$

Pak dokažte, že integrál vlevo je spojitý v intervalu $\langle -1, 1\rangle$; protože i pravá strana je v $\langle -1, 1\rangle$ spojitá, platí rovnost i v krajních bodech, takže

$$\int_0^{\pi} \frac{\lg(1 \pm \cos x)}{\cos x}\,dx = \pm\tfrac{1}{2}\pi^2.$$

Rada: Lokální majoranta derivace integrandu:

$$|a| \le b < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + a\cos x} \le \frac{1}{1 - b}.$$

Hodnoty funkce $\lg(1 + a\cos x)$ leží mezi $\lg(1 - \cos x)$ a $\lg(1 + \cos x)$ a obě funkce $\lg(1 \pm \cos x)/\cos x$ leží v $\mathcal{L}(\langle -1, 1\rangle)$; to spolu s dalšími, snadno ověřitelnými podmínkami zaručí podle V. 19.27 spojitost integrálu v $\langle -1, 1\rangle$. ◇

19.156. Dokažte, že

$$I(a) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-a^2/4} \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Rada: Derivujte podle parametru (majoranta $xe^{-x^2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$), výsledek integrujte per partes a vyřešte vzniklou lineární diferenciální rovnici 1. řádu; $I(0)$ je Laplaceův integrál. ◇

19.157. Integrací podle parametru ověřte, že

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \lg(1 + \sqrt{2}).$$

Rada: Je $\operatorname{arctg} x/x = \int_0^1 (1 + x^2y^2)^{-1}\,dy$, aplikace Fubiniho věty nedělá potíže; substituujte $x = \sin t$. ◇

19.158. Integrací podle parametru ověřte, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lg(1 + b^2x^2) - \lg(1 + a^2x^2)}{x^2}\,dx = \pi(|b| - |a|) \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}.$$

Rada: Pro $a < b$ je integrand je roven integrálu od a do b funkce $2y/(1 + x^2y^2)$, aplikace Fubiniho věty nečiní potíže, pozor však na znaménko. ◇

19.159. Integrací podle parametru dokažte, že

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\frac{1-\cos x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\lg\frac{a^2+1}{a^2}\quad\text{pro všechna }\ a\in\mathbb{R}_+\,.$$

Rada: Integrand lze napsat ve tvaru $\int_0^1 e^{-ax}\sin xy\,dy$, majoranta e^{-ax} integrandu právě napsaného integrálu leží v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+\times(0,1))$. $\diamond$

19.160. Integrací podle parametru dokažte, že

$$I := \int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;$$

uvažte při tom, že *integrál* (jeden z tzv. *Fresnelových integrálů*) *je Newtonův, nikoli Lebesgueův.*

Rada: Substituce $x=\sqrt{t}$ (v Newtonově integrálu!) vede k rovnosti

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\,,\quad\text{přičemž}\quad \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-ty^2}\,dy$$

pro všechna $t\in\mathbb{R}_+$. Funkce $f(t,y) := e^{-ty^2}\sin t$ *nemá* Lebesgueův integrál přes $\mathbb{R}_+^2$ (proč?), ale má konečný integrál přes množinu $(0,A)\times\mathbb{R}_+$ pro každé $A\in\mathbb{R}_+$ – majoranta e^{-ty^2} má přes tuto množinu integrál rovný $\sqrt{A\pi}$. Fubiniho věta dává rovnost

$$\int_0^A\Big(\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy\Big)dt = \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^A f(t,y)\,dt\Big)dy\,;$$

limitní přechod $A\to+\infty$ vlevo vede k I, týž limitní přechod vpravo je nutné provést za znamením integrálu, podle V. 19.17*. (Vnitřní integrál vpravo vypočítáme a pak odhadneme např. funkcí $(y^2+2)/(y^4+1)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$.) $\diamond$

Řešení

19.21. $\frac{1}{4}$

19.22. $\lg 2$

19.23. 4

19.24. $8\operatorname{argsinh} 1$

19.25. $\sqrt{\pi}$

19.26. 4

19.27. 0

19.28. $\frac{1}{4}(2\lg 2-\pi)$

19.29. $\lg 2$

19.30. $\sqrt{2}\,(\pi+2\lg 2)$

19.31. $4\lg 2-2\sqrt{2}-6\lg(\sqrt{2}-1)$

19.32. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\lg 2$

19.33. $\frac{1}{2}\lg 2-\frac{3}{8}$

19.34. $\lg 2\,(\lg 2-2)$

19.35. $\pi^2/\sqrt{3}$

19.36. $\frac{1}{2}(1-\lg 2)$

19.37. $\frac{1}{12}\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{7}{3}$

19.38. neexistuje

19.39. $+\infty$

19.40. $\frac{1}{4}\pi$

19.41. $\frac{1}{16}\pi^2$

19.42. $(e-1)/2e$

19.43. $\frac{1}{4}$

19.44. 12

19.45. $+\infty$

19.46. $2(1-\lg 2)$

19.47. $+\infty$

19.48. $\frac{1}{2}$

19.49. $\pi/\sqrt{2}$

19.50. neexistuje

19.51. 1

19.52. $\pi-2$

19.53. $\frac{1}{2}\sinh 1-1/e$

19.54. $\frac{1}{2}(5-\pi)-\lg 2$

19.55. $\frac{1}{4}(2-\pi)$

19.56. $2\sinh 1$

19.57. $4(1-\lg 2)$

19.58. 1

19.59. $\frac{8}{45}$

19.60. 1 $\square$

19.61. $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$ pro $\alpha<1$; $+\infty$ pro $\alpha\geq 1$

19.62. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}(1-\alpha)}\,\dfrac{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}$ pro $\alpha<1$; $+\infty$ pro $\alpha\geq 1$,

19.63. $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}(1+\alpha))\,\Gamma(\frac{1}{2}(1+\beta))}{2(4+\alpha+\beta)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}$, je-li $\alpha>-1$, $\beta>-1$; $+\infty$ jinak

19.64. $-\frac{1}{4}\pi$

19.65. 1

19.66. π

19.67. $-\infty$

19.68. $\frac{3}{16}\sqrt{3}+\frac{1}{12}\pi$

19.69. $\frac{11}{24}$

19.70. $(3-2e)/16e$

19.71. $\frac{1}{12}$

19.72. $\frac{2}{3}\pi ab$

19.73. 1

19.74. $\frac{1}{8}\pi a^3b^3$

$\square$

19.75. a^2

19.76. $\frac{1}{60}$

19.77. $\frac{3}{8}\pi a^2$

19.78. $2-\frac{1}{2}\pi$

19.79. $\frac{1}{4}$

19.80. $\frac{1}{3}\pi$

19.81. $\frac{1}{6}$

19.82. $\pi/(16\sqrt{2}\,)$

19.83. $\pi\sqrt{2}$

19.84. $\dfrac{(b-a)(d-c)}{3abcd}$

19.85. $\frac{4}{3}\,(\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}\,)\Big(\dfrac{1}{\sqrt{c}}-\dfrac{1}{\sqrt{d}}\Big)$

19.86. $\dfrac{(b-a)(d-c)}{5abcd}$

19.87. $\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a}\,)(\sqrt{d}-\sqrt{c}\,)}{2\sqrt{abcd}}$

$\square$

19.88. $2\,(a\sqrt{1+a^2}+\operatorname{argsinh} a)$

19.89. $\frac{2}{3}\,(d-c)\lg\dfrac{b}{a}$

19.90. $2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\doteq 0.0964$

19.91. $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}\doteq 0.132$

19.92. $1+\frac{4}{3}\,\lg 2\doteq 1.924$

19.93. $2\arcsin\frac{1}{4}+8\arcsin\frac{7}{8}+$
$\sqrt{15}-2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\pi\doteq 2.107$

19.94. $\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\doteq 2.1366$

19.95. $24+10\arcsin\frac{4}{5}-9\pi\doteq 4.9986$

19.96. $\frac{10}{3}$

19.97. 1

19.98. $\dfrac{\pi\,(e+1)}{(1+\pi^2)(e-1)}\doteq 0.625$

19.99. $2\,(\sqrt{2}-1)\,\pi\doteq 2.6026$

19.100. $+\infty$

$\square$

19.101. $\frac{1}{4}\,(2-\lg 3)$

19.102. $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{8}\,\lg(3+2\sqrt{2}\,)$

19.103. 0 pro $\alpha<2$,
neexistuje pro $\alpha\ge 2$

19.104. $\dfrac{1}{2\,(\alpha-3)}$ pro $\alpha>3$,
$+\infty$ pro $\alpha\le 3$

19.105. $\frac{2}{3}$

19.106. $2\lg 2$

19.107. π

19.108. $\frac{1}{2}\pi$

19.109. $\frac{1}{12}\,(4-\sqrt{2}\,)$

19.110. $1-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\lg 2$ $\square$

19.111. $\frac{4}{3}\,\pi abc$

19.112. $\frac{1}{6}\,abc$

19.113. $\frac{4}{3}$

19.114. $\frac{16}{9}\,(3\pi-4)\,R^3$

19.115. $4\pi^2$

19.116. $\pi a^2 c$

19.117. $\frac{1}{3}\,\pi abc^3$

19.118. $\frac{2}{3}\,bd\,(2a+c)$

19.119. $2\pi^2 Rr^2$

19.120. 2π

19.121. $\frac{32}{105}\,\pi a^3$

19.122. $\pi\,(a+\sinh a\cosh a)$

19.123. $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\pi^2$

19.124. $(294-72\sqrt{3}-48\pi)\,\pi$

19.125. 322π

19.126. $\frac{1}{1440}$

19.127. $\frac{1}{2}\pi abc^2$

19.128. $2\pi a^2 b$

19.129. $\frac{16}{3}R^3$

19.130. $(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3})\pi abc \quad \square$

19.131. $2\pi R^2$, $4\pi R$, $4\pi(R - \operatorname{arctg} R)$

19.132. $\frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2 + c^2)$

19.133. $\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{3}{4}b,\ \frac{4}{5}c\right)$

19.134. $(0,\ 0,\ \frac{2}{3}c)$

19.135. $(0,\ 0,\ \frac{4}{5}c)$

19.136. $\frac{28}{15}\pi R^5$

19.137. $\frac{1}{2}\pi c(R_2^4 - R_1^4)$

19.138. $\frac{1}{16}a^2b^2c^2(a^2 + b^2)$

19.139. $\frac{1}{20}\pi abc^5(a^2 + b^2)$

19.140. $\frac{1}{12}\pi abc^3(a^2 + b^2)$